





GÉODÉSIE.

On trouve chez le même Libraire les Ouvrages suivants du même Auteur.

Traité de Mécanique théorique, 5e édit., 1 vol. in-8°, prix :	7 fr. 50 c.
Cours de Mathématiques pures, 2 vol. in-8°, 4e édit........	15 fr.
Uranographie, 1 vol. in-8°, 5e édit.....................	9 fr. 50 c.
Astronomie pratique, 1 vol in-8°, 2e édit..................	7 fr. 50 c.
Géodésie, 1 vol. in-8°, 2e édit............................	7 fr. 50 c.
Le Dessin linéaire, 4e édit., 1 vol. in-8° avec atlas..........	7 fr.
Traité élémentaire de Technologie, 1 vol. in-8°............	7 fr.
Éléments de Statique, 1 vol. in.8°........................	3 fr.
Flore parisienne, 1 vol. in-18............................	2 fr.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

GÉODÉSIE,

OU

TRAITÉ

DE LA FIGURE DE LA TERRE

ET DE SES PARTIES;

COMPRENANT

LA TOPOGRAPHIE, L'ARPENTAGE, LE NIVELLEMENT,
LA GÉOMORPHIE TERRESTRE ET ASTRONOMIQUE,
LA CONSTRUCTION DES CARTES,
LA NAVIGATION.

Leçons données à la Faculté des Sciences de Paris,

Par L.-B. Francoeur,

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, Membre des Sociétés royale et centrale d'Agriculture, Philomatique, d'Encouragement pour l'Industrie, et de plusieurs autres Associations Françaises et Étrangères; Membre honoraire des Académies de Pétersbourg, Édimbourg, etc.



DEUXIÈME ÉDITION.



PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1840





A

M. LE COLONEL PUISSANT,

MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, ETC.

Vous avez accepté, mon cher Ami, la dédicace de la première édition de ma Géodésie, science qui est si redevable à vos utiles travaux; veuillez agréer la seconde, que vos conseils ont contribué à améliorer. C'est un témoignage de l'estime profonde que je vous porte.

Francoeur.

ERRATA.

Page 3, ligne 22, p. 254, *lisez* p. 265

9, 8 en rem., le trait A, *lisez* le trait i

10, 16, 29 degrés, *lisez* 29 demi-degrés

44, 15 en rem., verticalement, *lisez* horizontalement

51, 10 en rem., *lisez* $\log n = \bar{8}.8950557$

74, 8, $R = 10$, *lisez* $R = 10^{10}$, $\log R = 10$

84, 2 en rem., B, *lisez* A

111, 8, $A = B$, *lisez* $y = y'$

128, 6, 100°, *lisez* 10°; ligne 19, $l = 5$, *lisez* $x = 5$

141, 18, 9.98509, *lisez* $\bar{9}.98509$

149, 6, $\left(\frac{a+b}{4}\right)$, *lisez* $\left(\frac{a+b}{4}\right)^2$

156, 5 en rem., les longitudes, *lisez* les latitudes

171, 10, *remplacez* Maraldi *par* Plana et Nicollet

171, 8 en rem., l'ellipsoïde, *lisez* l'ellipse

244, 4 en rem., *lisez* $\varphi = 27570^m,74$

247, 5, φ..., *lisez* k...

263, 15, $(n+2)$, *lisez* $(n \pm 2)$

265, 21, $= \frac{1}{16}(\varphi +$, *lisez* $= \frac{1}{16}(\varphi^2 +$

275, 10 en rem., $\frac{1}{24}\lambda^3$, *lisez* $\frac{1}{12}\lambda^3$

7, n° 364, *lisez* n° 264

278, 4 et 5, *lisez* $\log B = \bar{3}.7051690$, $C = 9^m,781027$

3 en rem., 1322, *lisez* 1832

285, 16, QNO et QOA, *lisez* LCNO et QBA

289, 9, *ajoutez* (fig. 95)

6 en rem., RCO et AQBO, *lisez* RCOLQ et AQB

290, 13 et 21, AOB, *lisez* AQB

294, 5 en rem., *effacez* $= \zeta + Cf'$

295, dernière colonne du Tableau, $\zeta =$, *lisez* $\zeta =$

5, n° 70, 2,84748, *lisez* 2,74748

296, 8 et 9 en rem., *lisez* demi-circonf. et 18 parties

309, 10 et 14, *sa*, *lisez* Sa

333, 3 en rem., les trois diff. 1res, *ajoutez* et les deux diff. 2es

364, 6, *ajoutez* α Serpent *sous la polaire*

335, 4 en rem., 16° 6', *lisez* 6° 16'

344, dernière, 10 août, *lisez* 10 septembre

347, 8, $2^h 23'$, *lisez* $9^h 23'$

355, 15, $d = 70°49'$, *lisez* $d = 74°49'$

362, 10, *effacez* $(s + D)$

372, 10 en rem., $-p = 19.15$..., *lisez* $-p = 18.15$...

389, 10, $\sin(k = \delta)$, *lisez* $\sin(k - \delta)$

394, 10, $(d + d^1 \cos P$, *lisez* $(d + d^2 \cos P$

453, 4, l'équ. (4) doit porter le n° (3)

460, 6, sin..., *lisez* $\sin \varphi$.

NOTIONS HISTORIQUES.

Il faut remonter jusqu'aux Égyptiens, plus de 1600 ans avant notre ère, pour trouver les premières mesures de la Terre, et c'est à tort que l'on a attribué à Érathostènes cette belle opération. M. Jomard a démontré (*Description de l'Égypte, antiquités*, T. X), par les dimensions des monuments, que non-seulement ces peuples avaient mesuré l'arc de méridien de leur pays, mais même qu'ils avaient adopté un système métrique sexagésimal, fondé comme le nôtre, sur la grandeur de la Terre. Particulièrement, la grande pyramide, dite *de Chéops*, a son périmètre égal à la 120e partie du degré du méridien d'Égypte, et les autres mesures étaient aussi des subdivisions de cet arc. En Grèce, on croyait la Terre plane, et la Mythologie rendait populaire une erreur que les savants ne partageaient pas. Thalès, Hérodote, Platon, Pythagore, etc., s'étaient instruits dans la patrie de toutes les sciences, mais cachaient des vérités repoussées par la religion.

On n'a que de vagues notions sur les mesures de la Terre par les Chaldéens. Quant aux Romains, peuple le plus ignorant de l'antiquité, il n'y a rien à en dire sur ce sujet.

En 830 de notre ère, les Arabes ont mesuré le degré terrestre à Sangiar et à Médine.

C'est en 1550, sous Henri II, que Fernel mesura le degré de Paris vers Amiens par le nombre de tours des roues de sa voiture. En 1615, Snellius, astronome des Pays-Bas, forma le premier une chaîne de triangles, pour mesurer la distance de Malines à Alcmaër. Norwood, en 1635, imita ces deux procédés sur la route de Londres à Yorck. Picard, partant d'une base de Villejuif à Juvisy, mesura, à l'aide de 35 triangles, l'arc de Sourdon, près Amiens, jusqu'à Malvoisine; travail, fait en 1670, qui le premier donna une mesure passable des dimensions de la Terre. Cassini fils, vers 1700, dirigea la mesure du méridien de Dunkerque à Barcelone.

Des idées théoriques avaient suggéré à Newton que la Terre est aplatie aux pôles de $\frac{1}{230}$: par suite, des voyages furent entrepris, en 1736, pour vérifier ce résultat, par Bouguer et la Condamine, au Pérou, par Clairaut et Maupertuis, en Laponie. La Caille et Cassini III firent, en 1740, une nouvelle mesure de la méridienne de France; et La Caille alla ensuite mesurer le degré au cap de Bonne-Espérance, tandis que Boscowich prenait la distance de Rome à Rimini, Beccaria (en 1762) le degré du Piémont, Liesganig trois degrés en Autriche et un en Hongrie. En 1768, Mason et Dixon ont mesuré deux degrés en Pensylvanie. Enfin, en 1799, l'établissement de notre système a été préparé par une troisième mesure de la méridienne de France, par Delambre et Méchin. MM. Biot et Arago ont ensuite prolongé la méridienne de Paris jusqu'à Formentera, et M. Puissant a récemment refait et corrigé les calculs de cet arc qui a près de 13°.

Depuis cette admirable opération, d'autres semblables ont été entreprises par des savants étrangers. Mudge a mesuré trois degrés en Angleterre; Swanberg, un degré et demi en Laponie; Lambton, treize degrés, et Everest trois degrés dans l'Inde; Gauss et Olbers, deux degrés en Hanôvre; Struve, trois degrés et demi en Courlande; Tenner, quatre degrés $\frac{1}{2}$ au sud.

La toise du Pérou avait été déclarée l'étalon des mesures françaises, en 1766; une commission formée de Borda, Lagrange, Laplace, Monge et Condorcet, fit adopter le mètre, dix-millionième partie du quart de méridien de Paris. Sa longueur provisoire, adoptée en 1799, fut corrigée et définitive le 2 novembre 1801. Si, dix ans après, cet admirable système fut malheureusement modifié dans ses subdivisions, la loi du 4 juillet 1837 l'a rétabli dans sa simplicité primitive, en prohibant l'usage de toute autre mesure à dater du 1er janvier 1840.

Nous nous proposons, dans cet ouvrage, d'exposer les méthodes géométriques qui sont employées dans ces sortes d'opérations.

Les Grecs donnaient le nom de *Géodésie*, Γεωδαισία, à la science qui enseigne à mesurer et diviser les terres (γῆ, *terre*, δαίω, *diviser*, *partager*). Sous cette acception, on entendait donc la même chose par *Géodésie* et *Géométrie* (γῆ, *terre*, μέτρον, *mesure*). Mais depuis un temps immémorial, ces dénominations ont été appliquées à des sciences tout-à-fait différentes. La Géométrie considère les dimensions et les figures de tous les corps, et la mesure de la terre n'est qu'une de ses plus faciles applications ; la Géodésie embrasse toutes les théories qui concernent la figure de la terre, tant dans son ensemble que dans ses parties solides ou fluides. Cette science se sert de méthodes simples ou compliquées, selon la nature des objets qu'elle considère; ce qui conduit à la diviser en trois parties tellement distinctes, qu'elles composent autant de traités différens, la *Topographie*, *la Géomorphie* et la *Navigation.*

Lorsqu'on veut déterminer la forme, les accidens et les divisions territoriales d'une localité peu étendue, on n'a besoin d'employer que des instrumens peu compliqués, et de n'appliquer que des théories élémentaires fort simples, parce qu'on fait abstraction de la rondeur de la terre, et qu'on n'attend des opérations qu'une exactitude limitée. L'ensemble de ces procédés forme une section de la Géodésie qu'on appelle la TOPOGRAPHIE, comprenant le levé des plans, l'arpentage, le nivellement et la division des héritages. Les opérations du cadastre, les cartes et plans des parcs, bois, jardins, communes, sont du ressort de la Topographie.

Mais lorsqu'on recherche la forme du globe terrestre, ou qu'on veut embrasser dans les opérations la surface d'un état, ou même d'une province, les considérations exigent plus de précision dans les résultats du calcul et de l'observation; les

théories deviennent plus compliquées et d'une nature tout-à-fait différente. Ces doctrines composent la section que nous appelons Géomorphie (Γῆ, *terre*, Μορφὴ, *forme*), et à laquelle les auteurs donnent le nom de *Géodésie*, mais qui pour nous n'est qu'une des divisions de cette science. La Géomorphie comprend, outre les méthodes d'observation et de calcul relatives aux objets célestes, celles qui se rapportent aux observations terrestres, et qui se rattachent à l'Astronomie : elle comprend aussi le nivellement des hautes montagnes, les mesures du pendule à secondes, et le dessin géométrique des cartes de géographie. Les procédés qu'on emploie dans cette science doivent être d'une extrême précision, et les instrumens construits avec un soin particulier.

Enfin, lorsqu'on a pour objet de traiter de la surface fluide du globe terrestre, des procédés propres à faire connaître le lieu où se trouve un navire, la direction à suivre pour arriver au port qu'on veut atteindre, comme l'observateur est placé sur un sol mobile, les méthodes éprouvent des modifications, et les instrumens sont construits d'une manière spéciale. Comme les expériences ne sont susceptibles que d'une exactitude limitée; on donne aux équations des formes plus simples. La science qui comprend les théories applicables à ces circonstances prend le nom de navigation : une de ses divisions est fondée sur l'Astronomie.

En exposant successivement les principes de ces trois sections, nous compléterons tous ce qui est relatif à la forme du globe terrestre et de ses parties solides ou fluides.

La *Topographie* n'est qu'une suite d'applications des théorèmes de Géométrie et de Trigonométrie rectiligne. L'usage qu'on y fait de ces théorèmes est aussi varié que la figure même du sol. Ce serait donc se perdre dans une foule de détails que de prétendre analyser tous les cas, résoudre tous les problèmes de levé des plans que la campagne peut présenter. Mais il nous suffira d'indiquer la construction et l'usage des divers instrumens qu'on y emploie, et de poser les principes généraux de la science. L'intelligence de l'ingénieur suppléera

facilement à des développemens que nous ne pourrions donner sans prolixité.

La *Géomorphie* est une science beaucoup plus étendue, et fait le sujet d'un examen bien plus attentif; c'est elle qui est la partie principale de ce Traité. Un grand nombre d'auteurs l'ont enrichie de leurs découvertes. Mais loin d'avoir l'intention de présenter ici tous ces travaux, nous nous bornerons à exposer les seuls procédés qui sont en usage, parce qu'ils sont d'une application facile, et qu'on n'y sacrifie jamais l'exactitude des calculs au désir de les abréger. Nous ne donnons donc pas un traité complet de Géomorphie, mais seulement l'ensemble des méthodes reconnues utiles, exactes, et propres à satisfaire à tous les besoins. Les personnes qui désireront connaître les grandes théories analytiques qui s'y rattachent, consulteront la *Mécanique céleste*, le *Traité du Système métrique*, et surtout le bel ouvrage de Géodésie de M. Puissant.

La *Navigation* est bien plus limitée dans ses ressources que la Géomorphie, quoiqu'elle emprunte l'usage des mêmes doctrines, parce que le marin, placé sur un observatoire en mouvement, ne peut se servir de niveau ni de fil-à-plomb; ses instrumens sont donc appropriés à la condition où il se trouve. Nous exposerons les méthodes qui suffisent aux besoins des gens de mer, et qui ont le degré de précision que comportent les observations, lesquelles sont soumises elles-mêmes à tant de chances de petites erreurs.

Comme la division du cercle en 360 degrés est en usage parmi tous les peuples de la terre, que les tables de logarithmes de Callet sont les plus répandues, enfin que les instrumens d'observation sont ordinairement divisés sur ce principe, j'ai cru devoir préférer ce mode de division à celui en 400 grades. Ce n'est donc pas par un esprit de résistance à cette innovation que j'ai adopté, dans les exemples que je présente, la division ancienne du cercle, mais seulement pour me servir d'idées plus connues et même devenues populaires dans tout le monde savant. Je conviens volontiers que la division en 400 grades

est plus commode pour les calculs et plus rationnelle ; elle doit un jour remplacer l'autre. J'ai partout employé le système métrique français, qui a, sur tout autre, l'avantage de la simplicité et de l'uniformité, et l'on comprend que la division du cercle en 360 degrés ne peut pas être repoussée par les mêmes motifs que les anciennes unités de longueur, de surface, de poids et de capacité.

Pour mieux faire comprendre l'usage des formules, j'ai pris le soin d'en faire de nombreuses applications ; et quand j'ai dû tirer de la *Connaissance des Tems* les données relatives aux problèmes d'astronomie, j'ai formé tous les exemples pour l'année 1836, parce que cet ouvrage a reçu récemment des améliorations, et est arrivé maintenant au degré de perfection qu'il était loin d'avoir dans les temps antérieurs.

L'ouvrage que je présente au public est composé de sujets que depuis long-temps je professe à la Faculté des Sciences de Paris. Ce livre sera particulièrement utile aux élèves qui suivent mes Cours, et aux ingénieurs que leurs fonctions appellent à faire des opérations géodésiques. Au reste, il s'en faut de beaucoup que tous les sujets que j'ai renfermés dans ce Traité aient été enseignés dans mes Cours. La Topographie ne présente pas de doctrines assez élevées pour mériter d'être traitée à la Faculté des Sciences ; le dessin des cartes de géographie est d'une nature spéciale qui se rattache à la Géométrie descriptive ; une grande partie de la Géomorphie et de la Navigation rentre dans les attributions du professeur d'Astronomie, etc.

Je terminerai en exprimant ma reconnaissance envers M. le colonel Corabœuf, qui a bien voulu m'aider de ses excellens conseils, et redresser quelques erreurs qui m'étaient échappées.

TABLE

DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

TOPOGRAPHIE.

LIVRE II.

GÉOMORPHIE.

LIVRE III.

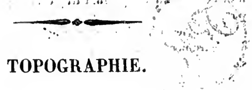
NAVIGATION.

TABLES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

GÉODÉSIE.

LIVRE PREMIER.



TOPOGRAPHIE.

1. Concevons que dans une localité peu étendue on ait abaissé, sur un plan horizontal, des perpendiculaires de tous les objets qu'on y voit : les traces des pieds des verticales sur ce plan, ou les *projections* horizontales des objets, forment, par leur ensemble, ce qu'on appelle leur *plan*. Ce système général, reproduit sur le papier par le dessin, et dans de moindres dimensions, est le *levé du plan*. On y voit tracés les sinuosités des ruisseaux et des chemins, les contours des bois, les configurations des champs et des clôtures, etc. Toutes les parties y conservent les relations naturelles d'étendue, de forme et de distances, à l'échelle du plan; et les figures dessinées y sont semblables à celles que forment les projections sur le plan, comme si l'ensemble des objets était vu, à vol d'oiseau, à l'aide d'un verre qui en diminuerait toutes les dimensions. La *Topographie* enseigne le *levé des plans*, le *nivellement*, l'*arpentage* ou l'évaluation des surfaces, enfin l'art de dessiner les plans. Cette dernière partie n'étant pas fondée sur des considérations géométriques, ne sera pas traitée ici.

CHAPITRE Ier. — LEVÉ DES PLANS.

Montrons la construction et l'usage des divers instrumens employés en Topographie, en omettant toutefois ceux dont on se sert en Géométrie, tels que la règle, l'équerre, les compas, les tire-lignes, etc., qui sont trop connus pour que nous nous y arrêtions.

L'art de lever les plans exige principalement la connaissance des instrumens qu'on a imaginés dans ce but : l'habitude de s'en servir fait en grande partie le mérite de l'arpenteur.

2. *Échelle.* Tout plan doit être accompagné d'une échelle qui indique la proportion du dessin avec l'original. Le plus souvnet, on trace sur le plan une ligne droite (fig. 2) divisée en parties égales, qu'on numérote; chaque partie désigne une unité métrique, telle qu'une toise, une lieue, un décamètre, etc. On voit dans la figure 2 qu'une partie, en-deçà du zéro, est divisée en dix parties : si l'on veut prendre, avec le compas, 4 unités et 6 dixièmes, on pose l'une des pointes du compas sur la division n° 4, et l'autre sur la subdivision n° 6, prise en-deçà de zéro. On obtient ainsi 4,6 mètres, si l'unité est le mètre, ou 46 décimètres. Quand on prend la toise pour unité, on partage la première partie en 6, qui représentent des pieds, etc.

On exprime souvent en chiffres le rapport entre les distances prises sur le plan et celles des objets mêmes. Si un millimètre représente un décamètre, on dit que le *plan est au dix-millième,* parce que le décamètre contient 10000 millimètres. Si 10 toises sont représentées par une ligne, le plan est au 8640e, parce que 10 toises valent 8640 lignes. Les plans de la grande carte de France par Cassini sont au 86400e, une ligne y vaut 100 toises; l'échelle du Dépôt de la guerre est au 80000e, un millimètre vaut 80 mètres. Les échelles du Gadastre sont au 5000e, au 2500e, et au 1250e, selon que le terrain est plus ou moins

morcelé. Le millimètre représente donc 5^m, ou $2^m\frac{1}{2}$, ou $1^m\frac{1}{4}$. Les tableaux d'assemblage sont au dix-millième ou au vingt-millième.

3. Quand on veut pouvoir prendre au compas, avec précision, de très petites fractions de l'unité, on se sert d'une *échelle de transversales ;* nous renvoyons, pour cette théorie, aux traités de Géométrie. La figure 3 est une *échelle de dixmes ;* l'unité principale est extrêmement petite, car elle est contenue 100 fois dans chacune des divisions verticales portées sur la longueur, et 10 fois sur chaque division en largeur : les obliques permettent d'apprécier ces unités, et voici comment. Si, par exemple, l'une des pointes du compas est sur la ligne horizontale notée 300, et l'autre sur l'oblique n° 80, la distance étant d'ailleurs prise sur la verticale n° 4 (car il faut toujours que les deux pointes du compas portent sur une même ligne verticale), la longueur mesurée contiendra 384 unités : elle sera de 384 mètres, toises ou lieues, selon l'unité métrique principale qu'on aura adoptée.

L'échelle de dixmes est commode pour le système décimal des nouvelles mesures ; mais on établirait de même les subdivisions d'après d'autres bases que 10. (*Voyez* mon *Cours de Mathématiques pures*, t. I, p. 254, et l'art. *Échelle* du *Dictionnaire de Technologie.*)

4. *Rapporteur.* **Cet instrument, représenté fig. 5, 6 et 8, est destiné à mesurer les angles tracés sur le papier, ou à construire ceux dont on a la graduation. C'est un demi-cercle en cuivre ou en corne, dont le limbe est divisé en degrés de 0° à 180°, et même en demi-degrés : le numérotage procède, tant dans un sens qu'en sens contraire; et même on marque aussi, sur une demi-circonférence concentrique, les arcs de 180 à 360 degrés, afin d'évaluer ceux qui dépassent 180°. (*Voy.* fig. 5.)**

Pour mesurer un angle tracé sur le papier, on applique le diamètre du rapporteur sur l'un des côtés AC (fig. 7) et le sommet C de l'angle au centre ; l'autre côté CK

coupe la demi-circonférence en un point K, où on lit la graduation : elle est ici de 54°.

Si l'on veut faire un angle LOK (fig. 6) d'un nombre de degrés donné, par exemple, de 36°, placez le rapporteur de manière à faire tomber le rayon du 36e degré sur la droite IK qui doit être l'un des côtés de l'angle, et à faire passer le bord O*b* par le point E, où l'on veut que l'autre côté se dirige : la droite LO fera l'angle LOK de 36°, puisqu'elle est, par la construction du rapporteur, parallèle au diamètre AC*o*.

Comme la vue ne permet guère d'estimer sur le limbe que des quarts de degré, cette construction est peu exacte. On a imaginé de faire des rapporteurs qui ont une *alidade* mobile CD (fig. 8), traînant avec elle un *vernier* D propre à donner les minutes. (*Voy.* n° 9, l'usage du vernier et sa construction.) Le centre C du demi-cercle est au milieu d'un trou à jour, où il est marqué par deux soies qui se croisent. En construisant l'instrument, on a soin que le bord ID de l'alidade soit exactement aligné sur ce centre dans toutes les positions.

Au reste, il est encore plus exact de se servir des cordes des arcs. La figure 4 est une *échelle de cordes :* on trace d'abord un arc de cercle AK (fig. 7) avec un rayon égal à la corde de 60°, qui, comme on sait, est le côté de l'hexagone inscrit : puis, prenant sur l'échelle (fig. 4) une ouverture de compas égale à la corde AK de l'arc dont on donne la graduation, par exemple, celle de 54°, on porte sur cet arc l'ouverture AK dont il s'agit. Ces cordes sont prises, avec le compas, sur l'échelle, depuis l'origine zéro jusqu'aux nos 60 et 54. Les rayons CA, CK, menés aux extrémités de l'arc ainsi déterminé, font l'angle demandé C. Pour ne pas donner à la figure 7 de trop grandes dimensions, les cordes ont été prises sur une plus petite échelle que la figure 4 ; ce sont les longueurs prises sur cette même échelle réduites au cinquième.

Pour que cette construction ait une grande précision, au lieu de prendre la longueur de la corde sur la figure 4, il faudra d'abord obtenir cette longueur en parties du rayon ; ainsi on

la calculera par l'équation n° 35, ou plutôt, on en prendra la valeur numérique dans une table de cordes (*voyez* mon *Cours de Math.* et ma *Goniométrie*) ; on prendra ensuite, avec un compas, sur une échelle de dixmes (fig. 3) une ouverture qui sera la longueur de la corde à porter sur l'arc en AK (fig. 7). Ainsi la corde de 54° est 9080, le rayon étant 10000 : avec un rayon CA (fig. 7) de 10000 parties d'une échelle quelconque, on décrira l'arc AK, sur lequel on portera la corde AK de 9080 parties de l'échelle, etc.

5. *Jalons.* Ce sont des bâtons bien droits, dont un bout a une pointe de fer et qu'on fiche verticalement en terre. Ce signal est plus facile à apercevoir de loin, lorsqu'on y a fixé une petite planchette blanche appelée *voyant*, ou une feuille de papier. On plante les jalons aux divers points de la campagne qu'on veut prendre pour signaux, ou pour stations successives. On s'en sert aussi pour marquer une direction rectiligne, en se plaçant à l'une des extrémités, dirigeant un rayon visuel sur l'autre, et faisant planter par un aide les intermédiaires.

6. *Chaîne.* On mesure les petites distances avec une règle métrique divisée ; pour les grandes distances, on se sert de la chaîne d'arpenteur. Cette chaîne est formée de *chaînons* ou tiges en gros fil de fer, dont chaque bout est courbé en boucle, et qui sont réunis deux à deux par un anneau. Ces chaînons ont tous 2 décimètres de long, entre les centres de deux anneaux consécutifs ; il y a 50 chaînons, en sorte que la chaîne a un décamètre de longueur (*). Les anneaux sont en fer, excepté ceux qui sont de mètre en mètre, qu'on fait en cuivre. Chaque bout de la chaîne a une poignée qui fait partie de sa longueur totale. (*Voy.* fig. 1.) L'anneau du milieu est un peu plus fort que les autres.

(*) On donne à la chaîne 5 millimètres de plus que la longueur de 10^m, pour compenser l'épaisseur de la fiche et la perte qu'on fait par le défaut de tension de la chaîne.

Comme l'effort qu'on exerce perpétuellement sur la chaîne pour la tendre doit enfin l'allonger, il faut souvent la soumettre à une vérification attentive. Aussi, dans les grandes opérations cadastrales, l'ingénieur a-t-il soin, avant de commencer son travail, de s'assurer que sa chaîne a exactement 10 mètres (et 5 mill.) de long; ensuite il marque cette longueur sur une muraille, et présente chaque jour sa chaîne à cet étalon pour reconnaître si elle a varié.

Pour mesurer une distance, on commence par la jalonner afin d'en suivre la direction rectiligne dans l'opération. Partant du premier jalon, l'arpenteur tient sa poignée fixée sur le sol, au point *a* de départ de la distance qu'il veut mesurer, et son aide, ou *porte-chaîne*, marche en avant dans l'alignement; il tend la chaîne contre terre, en évitant les tortillemens, les pierres, les touffes d'herbe, et tout ce qui dérangerait la direction rectiligne. L'aide plante alors en terre, à l'extrémité *d*, une *fiche*, ou petit piquet de fer, qu'il entre dans sa poignée, et qu'il laisse en place. L'arpenteur et l'aide procèdent en avant, en traînant la chaîne, et l'arpenteur vient appliquer sa poignée sur cette première fiche, qu'il prend pour point d'arrêt, pendant que l'aide tend la chaîne et plante une seconde fiche, et ainsi de suite. L'arpenteur enlève chaque fois le piquet et le conserve; autant il a de ces fiches en main à la fin de l'opération, autant de décamètres sont contenus dans la distance totale. En comptant les chaînons *ab*, *bc*... qui sont tendus depuis la dernière fiche jusqu'au jalon terminal, on a les fractions de décamètre. Si la distance a plus de 100 mètres, quand l'arpenteur a ramassé les dix fiches, il les rend à son aide, et marque sur le papier ce qu'il appelle une *portée*, dont la valeur est de 100 mètres, et ainsi de suite.

Quand le terrain est en pente, ou qu'il présente des accidens, on tient la chaîne horizontale en l'élevant au-dessus du sol; car les mesures qu'on porte sur le plan doivent toujours être prises parallèlement à l'horizon. Mais comme la chaîne se courbe sous son poids, ce procédé n'est pas exact; il est donc

mieux de calculer la projection après avoir mesuré la longueur de la pente et son inclinaison. (*Voy.* n° 45.)

7. *Alidades, pinnules.* Les instrumens de topographie sont pourvus d'un appareil spécial pour viser les signaux d'observation ; la forme varie selon la nature de l'instrument ; mais en décrivant celui qui sert aux levés à la planchette, on comprendra aisément tous les autres.

L'alidade est une règle mobile qu'on dirige vers les objets dont on veut déterminer la position relative, en les prenant pour points de mire. Cette règle (fig. 10) porte à ses deux extrémités des lames de cuivre AB, CD perpendiculaires à la règle sur laquelle ces lames sont articulées à charnière, afin de pouvoir se rabattre et se coucher sur elle quand on n'en fait pas usage, et d'être commodément transportables dans une boîte. On nomme ces lames *pinnules*. A l'une est un petit trou, ou une fente verticale très étroite A, D, contre lequel on applique l'œil ; à l'autre, et vis-à-vis, est une fenêtre à jour B, C dans le milieu de laquelle est tendue une soie, ou un fil, ou un crin, perpendiculaire à la règle ; le plan passant par ce fil et par le trou opposé, rase le bord ID de la règle. Comme il est utile de prendre indifféremment l'une ou l'autre pinnule pour place de visée, chacune porte un trou et une fenêtre avec sa soie, l'une au-dessus de l'autre, et en regard réciproque avec ceux de l'autre pinnule.

Pour viser un signal, on tourne l'alidade dans la direction de cet objet, de manière que le rayon visuel qui part du trou de la pinnule antérieure rase le fil de l'autre, et que ce fil paraisse coïncider avec l'objet. Cet alignement détermine un plan de *collimation* perpendiculaire au plan de la règle, et qui doit exactement en raser le bord. On vérifie si cette condition est remplie en pointant un objet, et marquant sur un papier une ligne le long du bord de la règle ; puis retournant l'alidade bout pour bout, et visant le même objet ; on voit si le nouveau plan de collimation donné par cet alignement coïncide avec le premier. Sans cela, il y aurait une erreur, et il faudrait déplacer le fil pour la faire disparaître.

Les instrumens qui ont des arcs de cercle destinés à mesurer les angles, ont de semblables alidades; mais elles sont assujetties à un mouvement de rotation autour du centre. (*Voy.* ci-après et fig. 22.)

8. Quand les signaux sont hors de la portée de la vue, au lieu de simples pinnules, on se sert d'une *lunette* (fig. 18) formée de deux verres lenticulaires; l'un tourné vers les objets, est l'*objectif*, l'autre où l'œil doit être appliqué est l'*oculaire*. Ces deux verres sont écartés l'un de l'autre jusqu'à ce que leurs foyers respectifs aboutissent presqu'au même point, dans l'intérieur du tube. En ce foyer commun est placé un *Réticule;* c'est un diaphragme à jour où deux fils sont tendus en croix. Cet appareil doit être mobile le long du tube de la lunette, afin de pouvoir être exactement placé au foyer de l'objectif. (*Voy.* ci-après, n° 103.)

Pour pointer un objet, on y dirige la lunette, et le signal doit apparaître juste à la croisée des fils, ou en coïncidence avec l'un d'eux. Cette lunette renverse les images, ce qui ne présente aucun inconvénient pour l'usage qu'on en fait. Il est bon aussi que la lunette soit montée sur un axe I qui lui permette un mouvement de bascule au-dessus de l'alidade.

9. *Vernier, Nonius.* Pour lire les fractions de division d'un instrument coupé en parties égales, on se sert d'une petite lame de métal, dont le bout arase les divisions, et qui est elle-même coupée en parties égales. Si $n - 1$ parties principales sont divisées sur cette lame en n parties égales, cet appareil servira à fractionner les premières en n parties de leur longueur. Cette lame, ainsi divisée et mobile le long des divisions de cet instrument, est ce qu'on appelle un *vernier* ou un *nonius*, des noms de deux géomètres, dont le premier est l'inventeur de l'appareil, et dont l'autre en a répandu l'usage. Voici la théorie du vernier.

Soit HAI (fig. 11) une règle fixe divisée en parties égales,...8, 9, 10...; la réglette CD, mobile parallèlement et le long de la première, est juste de la longueur, par exemple, de 5 de ces

parties, et on l'a coupée en 6 divisions égales et numérotées. Imaginons que l'extrémité C coïncide avec la 10ᵉ division. En prenant pour unité l'une des divisions de AB, et comparant les traits de AB et de CD, on voit que le n° 1 de la réglette est au-dessus du n° 11, de $\frac{1}{6}$ d'unité; le n° 2 est plus haut que 12 de $\frac{2}{6}$ d'unité; le n° 3 est plus haut que 13 de $\frac{3}{6}$; le n° 4 est plus élevé que 14 de $\frac{4}{6}$; le n° 5 l'est plus que 15 de $\frac{5}{6}$; enfin le n° 6 l'est plus que 16 de $\frac{6}{6}$ ou 1, c'est-à-dire que le n° 6 correspond à la 15ᵉ division exacte de la règle.

Cela posé, que la réglette CD, qui est le vernier, soit déplacée et portée en C'D', il sera facile d'évaluer la fraction de division qui répond à C', c'est-à-dire la longueur 13 *i*. En effet, cherchez sur le vernier et la règle quels sont les deux traits qui se trouvent en exacte coïncidence, et vous trouvez ici que c'est le n° 5 qui répond à H; d'où vous concluez que la longueur 13*i* est les $\frac{5}{6}$ d'une division de la règle HA, en sorte que le point C' répond à 13 unités et $\frac{5}{6}$ d'unité. En effet, le n° 4 est au-dessous de 17 de $\frac{1}{6}$; le n° 3 au-dessous de 16 de $\frac{2}{6}$, etc.; enfin C' est au-dessous de 13 de $\frac{5}{6}$. Sans prendre la peine de compter une à une ces parties, le chiffre 5 de la division en coïncidence, donne de suite la fraction $\frac{5}{6}$. Les unités sont ici fractionnées en sixièmes, parce que 5 de ces unités ont été partagées en 6 sur le vernier. La fig. 12 est établie sur le système décimal; la longueur de 9 parties de l'échelle est coupée en 10 sur le vernier AB ; d'après la disposition qui y est représentée, le trait *i*, appelé *ligne de foi*, répond à 57 unités et une fraction qu'on évalue en remarquant que le trait n° 6 est le seul qui coïncide avec les traits de l'échelle, ce qui donne $\frac{6}{10}$: ainsi le trait A répond à 56,6.

Le même raisonnement s'applique au cas où les divisions égales sont tracées sur une circonférence (fig. 9). Supposons que l'alidade AC, mobile autour du centre C de l'arc gradué AD, porte le vernier IF fixé à l'alidade. Ce vernier FI est terminé par un arc concentrique, qui arase les divisions de l'arc AD dans toutes les positions de l'alidade. Un arc de 9 degrés du limbe est porté de I en F, et divisé en 10 parties égales,

et le vernier donne des dixièmes de degré. En sorte que si l'alidade a d'abord été fixée de manière que le trait F, appelé *ligne de foi*, soit sur le zéro du limbe, les divisions du vernier, comparées à celles de l'arc gradué, seront au-dessus de leurs correspondantes, successivement de $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, etc.

L'alidade étant tournée dans une autre position, telle que CB, on voit que la ligne de foi F répond à 56 degrés et une fraction ; et l'on évalue cette fraction en dixièmes, en considérant que le 6[e] trait du vernier est juste sur l'un de ceux du limbe ; ce qui donne 56°,6 pour la grandeur de l'angle ACB.

Dans la plupart des instrumens qui servent à mesurer les angles, le limbe est divisé en 360 degrés, et le vernier donne la minute : on fait l'arc du vernier de 59 degrés, qu'on divise en 60 parties égales, ce qui donne alors des soixantièmes de degré, c'est-à-dire des minutes. Si le limbe est divisé en demi-degrés, on prend l'arc du vernier de 29 degrés qu'on divise en 30, ce qui donne des trentièmes de demi-degré, c'est-à-dire encore des minutes.

Mais lorsque la construction soignée de l'instrument et ses dimensions permettent d'en obtenir une plus grande précision, on peut diviser le limbe et le vernier en parties plus serrées, et y lire les fractions de minutes. Par exemple, pour que les divisions puissent être estimées de 5″ en 5″, on coupera chaque degré du limbe en 12 parties égales, dont chacune occupera un arc de 5 minutes; puis prenant sur le vernier un arc de 59 de ces parties, on divisera cet arc en 60; alors les fractions seront de $\frac{1}{60}$ de 5 minutes, ou de 5 secondes. Les cercles répétiteurs et théodolites sont souvent divisés de cette manière (*voy.* n[os] 92 et 105); mais les instrumens d'arpentage ne donnent pas une aussi grande précision, parce qu'on n'y trouverait aucune utilité, les observations n'étant pas assez soignées pour cela.

Les divisions très serrées du limbe et du vernier ne peuvent être bien distinctes que par le secours d'une *loupe*, et l'art de la construction des instrumens est poussé à un tel degré de perfection, qu'on peut compter sur l'égalité parfaite des di-

visions, parce qu'on les trace par le secours de machines ingénieuses. Comme il serait difficile de compter le nombre des traits du vernier depuis la ligne de foi à son extrémité, jusqu'au trait de coïncidence, pour évaluer la fraction, on numérote les divisions du vernier, et il suffit de lire le chiffre qui affecte ce dernier trait; ce chiffre exprime le nombre de minutes ou de secondes, etc., qu'il faut ajouter au chiffre des parties entières indiquées par la ligne de foi sur le limbe. Un instrument bien centré et bien divisé donne des valeurs angulaires dont l'exactitude étonne.

Comme les divisions sont en général très serrées, la différence de largeur de celles du vernier et du limbe se perd souvent dans la fine épaisseur des traits de séparation, et l'on trouve que la coïncidence paraît exacte sur deux traits consécutifs. On s'arrête alors sur la moyenne entre ces deux indications.

10. *Vis de rappel.* On donne ce nom à un appareil destiné à imprimer des mouvemens très lents à une pièce mobile le long d'une pièce fixe. Par exemple, lorsqu'on veut pointer un signal avec la lunette d'un graphomètre, on la dirige d'abord à peu près vers l'objet; puis il reste à mettre ensuite cet objet en exacte coïncidence avec le fil du réticule, en donnant un petit mouvement à la lunette. C'est ce qu'on produit par une vis de rappel.

La difficulté que présente ce problème consiste à laisser la lunette indépendante de l'appareil, dans les grands mouvemens, et à ne le mettre en usage que pour les petits, en sorte que la lunette soit libre dans un cas et arrêtée dans l'autre. Voici comment cet ajustement est combiné.

AB (fig. 16) est le limbe d'un graphomètre, CD le bras ou rayon mobile qui porte la lunette, D un curseur entraîné par le bras CD avec la vis de rappel V tournant dans un canon *b*. Dans une fenêtre *ab* du curseur est logée une pièce susceptible d'y glisser d'un certain espace, et qui, solidaire avec le bras CD et la lunette, porte un écrou *i* dans lequel la vis V

mord : en sorte qu'en tournant la vis, la pièce *ab* s'approche ou s'éloigne de *b*, et imprime un petit mouvement au bras et à la lunette qu'il porte. Sous l'appareil est une *agrafe* formée de deux mâchoires, et armée d'une vis de pression K; ces mâchoires lâchent ou saisissent le limbe selon qu'on tourne la vis K dans un sens ou dans l'autre.

Voici l'effet que produit ce mécanisme : quand la vis de pression K est lâchée, le bras CD emporte le système CD et la lunette qu'on peut pointer à peu près sur le signal. On serre alors la vis K qui attache le curseur D et la vis V au limbe, et les rend solidaires. Qu'on fasse alors tourner la vis de rappel V dans son canon *b*. Cette vis, mordant dans l'écrou *i*, fera avancer ou reculer la pièce *ab* dans la petite fenêtre où elle est logée; et comme cette pièce est fixée au bras qui porte la lunette, celle-ci prendra une marche très lente, et permettra d'amener le fil du réticule à coïncider avec le signal. En effet, on sait qu'un tour entier de la vis ne fait marcher l'écrou dans le sens de l'axe que d'une longueur égale au pas de la vis. Si ce pas est d'un demi-millimètre, en faisant tourner la tête de la vis de 30 degrés (12ᵉ de la circonférence), l'écrou *i* et la pièce *ab* ne marcheront donc que d'un vingt-quatrième de millimètre.

La disposition des vis de rappel varie avec la forme de l'instrument; mais c'est toujours le principe précédent qui en détermine la construction. Le plus souvent le vernier, au lieu d'être placé dans une fenêtre au bout du bras mobile, comme dans la figure 16, est fixé latéralement comme fig. 9, ce qui est tout-à-fait arbitraire, puisqu'on ne consulte le vernier que pour estimer des fractions de degrés.

Pour lire sur le limbe et le vernier la graduation indiquée par les deux traits en coïncidence, on s'aide d'une *loupe* M qu'on tient à la main, ou qui est attachée au bras, de manière qu'en tournant sur l'axe I, on puisse l'amener au-dessus du vernier. Une articulation en I permet de porter la loupe à la distance du limbe exigée par la force de vision du lecteur.

Le canon *b* et l'écrou *i* sont montés sur pivots pour que l'axe de la vis puisse rester perpendiculaire au bras CD, et

qu'un léger mouvement de torsion permette à cette vis de marcher librement.

11. *Supports*. Le pied qui porte les instrumens d'arpentage est à trois branches (fig. 15), qu'on peut écarter à volonté pour obéir aux plis du terrain. Ces pieds sont réunis en haut, chacun par une vis de pression, avec une tige verticale en tronc de pyramide, terminée par un cylindre ou axe qui reçoit la *douille* de l'instrument. Cette douille est un cylindre creux où entre cet axe, et qui peut y pirouetter, à moins qu'on n'arrête la rotation avec une autre vis de pression. Chaque pied a une face plate suivant laquelle il s'applique contre une face de la tige triangulaire commune, et peut y tourner sur la vis de pression qui l'y fixe. En serrant fortement ces trois vis, après que les pieds ont été convenablement écartés, l'ensemble est assez stable et solide. Le bout inférieur des pieds est muni d'une pointe en fer qui entre en terre, et rend le système immobile; on observe aisément les signaux avec l'instrument ainsi établi sur son pied. Lorsqu'on veut transporter l'instrument, les trois branches du pied peuvent être rapprochées et réunies en un faisceau que maintient une frette mobile.

Comme ce pied est léger, les branches en sont faibles, et cèdent au mouvement de torsion qu'on est obligé de donner à l'instrument. On évite cet inconvénient en faisant chaque branche de deux barres de bois, réunies en V très allongé; les deux bouts sont entrés dans un sabot de cuivre qui porte la pointe de fer, et l'ouverture d'en haut serre, à l'aide d'une vis de pression, une oreille quadrangulaire qu'on a ménagée à la partie supérieure du pied (*voy*. fig. 14).

12. *Genou*. Il est nécessaire de pouvoir tourner le limbe de l'instrument, pour lui donner les positions horizontale, verticale ou oblique, selon la nature de l'observation qu'on veut faire. Le genou est un mode d'articulation de l'instrument avec le pied, qui permet ou défend ces mouvemens à volonté et selon les cas. Il en est de plusieurs espèces.

Le *genou à coquilles* du graphomètre et de la boussole

est composé d'une courte tige *i* fixée à l'instrument, et terminée par une boule de cuivre O (fig. 13). Le cylindre de cuivre LN qui porte en bas la douille où entre le haut du pied P, est terminé à la partie supérieure par deux *coquilles* EE; ce sont deux pièces distinctes, concaves en cuillère, dont l'une fait corps avec le cylindre LN, et l'autre, opposée par sa concavité, est libre, et peut être rapprochée et serrée contre la première, à l'aide d'une vis de pression M. C'est entre ces coquilles, évidées latéralement, que la boule O est entrée et saisie comme entre deux mâchoires. En desserrant la vis de pression M, on rend à la boule sa mobilité en tout sens, ce qui permet de faire prendre au limbe toutes les positions. Quand on a dirigé le limbe à peu près comme on veut, on serre légèrement la vis M; le frottement suffit pour retenir la boule, et cependant lui permet encore de rouler un peu dans les coquilles, pour achever de mettre l'instrument en situation : après quoi on serre fortement la vis M, pour que le tout soit solidaire.

13. Le *genou de Cugnot* (fig. 19) est composé d'une *noix* N, formée de deux cylindres qui sont un peu plus élevés l'un que l'autre, et dont les axes sont à angle droit. Des boulons B'B' et B traversent dans la direction de ces axes, et ont l'une des extrémités taraudée, pour donner prise à un écrou à oreilles. Lorsque cette noix est engagée entre les *languettes* LL qui portent la table PP de l'instrument, on peut en desserrant les écrous, faire mouvoir cette table dans deux sens perpendiculaires, et par conséquent la disposer horizontalement. En serrant les écrous, on arrête le mouvement, et la table PP reste fixe dans la position qu'on lui a donnée. Les mouvemens qu'on fait prendre à la table sont précisément de même espèce que ceux de la *suspension de Cardan*, qui permet de conserver la position horizontale aux boussoles et chronomètres marins, malgré les oscillations du navire. Le genou de Cugnot est surtout en usage pour l'instrument appelé *planchette*, dont nous parlerons plus tard.

14. Le *genou des niveaux* est une simple charnière qui permet au tube d'un niveau à bulle d'air (n° 51) de prendre un mouvement de bascule, pour amener la bulle au milieu du tube : ce n'est, à proprement parler, qu'une noix ayant un seul des deux cylindres du genou qu'on vient de décrire. Comme les mouvemens sont ici très brusques, il ne serait pas facile de faire rester la bulle au milieu du tube, sans le secours d'une vis de rappel *m* (fig. 38) qui ne fait marcher que par degrés insensibles.

15. *Équerre d'arpenteur.* C'est une espèce de pomme de canne (fig. 17) coupée par deux fentes rectangulaires verticales ACDG, EFOI qui servent de pinnules ; une partie inférieure A est évidée en forme de fenêtre, et l'on applique l'œil à la fente opposée, en dirigeant vers un signal. A la base est une douille B qui reçoit à frottement le haut d'un bâton, dont l'autre bout porte une pointe de fer. On plante cette canne verticalement en terre (fig. 17 *bis*), et l'on fait pirouetter l'équerre sur sa douille jusqu'à ce qu'on puisse aligner quelque signal à distance. En plaçant l'œil à l'autre fente, sans déranger l'instrument, on a une direction perpendiculaire à la première, et l'on y peut faire planter un jalon. Dans les sols pierreux, on remplace le bâton de l'équerre par un pied à trois branches (n° 11).

L'équerre d'arpenteur sert à *mener sur le terrain des lignes à angle droit ;* on peut même s'en servir pour lever le plan de pièces de terre, et en mesurer l'étendue superficielle. Voici comment on opère.

Supposons qu'on veuille lever le plan d'un champ semblable à la fig. 20 ; on se portera successivement aux divers points de la droite AB, et l'on cherchera en quels lieux D, F, H, il faut planter l'équerre pour que, l'une des pinnules s'alignant selon AB, la direction de l'autre aille aboutir aux divers sommets ou coudes C, E, G, qui limitent le contour du champ. Bien entendu que si ce contour est terminé par une ligne courbe (fig. 21), on concevra cette ligne coupée en parties qu'on puisse regarder comme de petites droites. On fait

planter un *jalon* à chaque station D,F,H (fig. 20) et aussi à chaque sommet C, E, G, et l'on mesure les longueurs AD, DF, FH, HB, ainsi que celles des perpendiculaires CD, EF, GH. On a alors tout ce qu'il faut pour figurer le contour, et évaluer l'aire.

En effet, après avoir tracé sur le papier une droite indéfinie *ab*, on portera, avec le compas, des parties *ad*, *df*... de l'échelle, qui représentent celles qu'on a mesurées sur AB; puis en chaque point de division, on élèvera des perpendiculaires *dc*, *fe*, *hg*, qu'on prendra d'autant de parties de l'échelle que les longueurs CD, EF, GH contiennent d'unités métriques. Il ne restera qu'à joindre les extrémités de ces perpendiculaires par des droites pour former le plan demandé *cacbg*. Il est clair que ce plan est réduit à l'horizon quand les lignes mesurées sont horizontales. On en conclut ensuite si l'on veut, les longueurs des côtés et l'ouverture des angles du polygone, à l'aide de l'échelle et du rapporteur.

Cette opération très simple est à la portée des plus faibles intelligences; aussi l'équerre est-elle d'un usage continuel: et cela d'autant plus qu'on obtient, sur le champ, l'étendue superficielle, en calculant à part chacun des trapèzes et triangles dont elle est composée, et dont on connaît les bases et les hauteurs.

Lorsque la figure du champ n'est pas limitée par un côté rectiligne, on prend pour *base* de départ une ligne droite qui le traverse et qu'on jalonne (fig. 21); on lève à l'équerre les plans de chaque côté. On peut ainsi lever les sinuosités d'un sentier, d'un ruisseau, les contours d'une enceinte fermée, etc. Mais les accidens du terrein, la difficulté de mesurer les distances horizontalement, les obstacles que rencontre la vue ou que les localités présentent, enfin la lenteur des opérations, obligent souvent à recourir à un autre instrument.

On donne le plus souvent à cette pomme de canne la forme d'un octogone régulier, fendu selon quatre diamètres

respectivement inclinés à 45 degrés, parce que ces angles peuvent être employés comme ceux de 90°, et de la même manière.

Pour vérifier si les pinnules de l'équerre sont exactement fendues sous des angles de 90°, ou de 45°, on vise par ces pinnules, et l'on fait planter, à distance, deux jalons dans leurs directions; puis faisant pirouetter l'instrument sur sa douille, on amène à droite la fente qui était du côté gauche: il faut alors que la pinnule qui suit coïncide rigoureusement avec le jalon de droite, quand la première tend juste au jalon de gauche.

16. Le *pantomètre* de M. Fouquier est une équerre perfectionnée (fig. 23); il est cylindrique, coupé en deux horizontalement: la partie inférieure ABCD est fixée en haut du pied, par sa douille K et sa vis de pression P; la supérieure EFGH peut tourner sur un axe concentrique, de manière à présenter successivement sur les différens points du bord inférieur CD, une *ligne de foi* tracée sur le bord EF. La circonférence fixe CD est divisée en degrés, de sorte qu'on peut lire en *n* l'arc dont on a fait tourner le cylindre supérieur: il y a même un vernier *m* pour trouver les fractions de degré. On a ménagé sur le cylindre fixe AD une fente *a*, et à sa partie diamétralement opposée, une fenêtre *b* où une soie verticale est tendue. Le cylindre supérieur porte de même une fente *d* et une fenêtre *c* avec sa soie. On a soin que ces pinnules répondent juste l'une au trait fixe, l'autre au zéro de la graduation, condition dont il est facile de s'assurer en mettant ces deux points en coïncidence et visant à un signal.

L'usage du pantomètre est facile à comprendre. En faisant tourner la totalité de l'instrument sur sa douille, et le cylindre supérieur sur son axe, on ajuste par les pinnules deux signaux situés au loin, de manière qu'on les voie coïncider avec les fils, l'un par les pinnules fixes, l'autre par celles qui sont mobiles. On lit ensuite sur le cercle CD et

le vernier *m* la valeur angulaire des deux rayons visuels dirigés aux signaux. C'est donc un moyen de mesurer des angles, et nous verrons bientôt, en traitant du graphomètre, l'usage qu'on en fait pour lever le plan.

Le diamètre de l'instrument n'a guère plus de 4 centimètres et l'on n'y marque les degrés que de 2 en 2. Le vernier donne ensuite des quarts de degré, précision suffisante pour l'arpentage vulgaire. En faisant le diamètre double, on pourrait mesurer les angles à 3 minutes près.

Le haut GH porte ordinairement en-dessus une petite boussole, dont on se sert, comme il sera expliqué, pour lever les objets que des obstacles interposés empêchent d'apercevoir, les routes sinueuses des bois, etc. Enfin, on y fixe un petit niveau à bulle d'air pour que l'axe soit planté à peu près verticalement.

17. *Graphomètre.* Cet instrument (fig. 22) est destiné à mesurer les angles que forment des droites dirigées dans l'espace d'une station à deux signaux éloignés. C'est un *rapporteur* (n° 4) pourvu d'alidades pour pointer les objets. Il est formé d'un limbe demi circulaire et gradué, ayant depuis 4 jusqu'à 10 pouces et plus de diamètre, monté sur un genou, qui a été décrit n° 12, afin de pouvoir en diriger le plan à volonté et en tout sens.

Perpendiculairement au limbe et vers son bord sont fixées deux pinnules *p*, *p*, dont le crin qui partage en deux la fenêtre, et le trou ou la fente qui perce son plan, sont diamétralement opposés à un appareil semblable sur l'autre pinnule; le plan perpendiculaire au limbe ainsi déterminé, passe par le diamètre noté zéro et 180°. Une autre alidade L*l* est sur une règle mobile autour du centre O, et ses pinnules sont un peu moins écartées du centre que les premières. Cette règle est fixée à un axe de rotation central C, et dans toutes ses positions, rase le limbe en se dirigeant selon tous les rayons du cercle. Lorsqu'elle est amenée selon le diamètre principal, les quatre fils des pinnules doivent pa-

raître coïncider quand on applique l'œil à une extrémité. Cette alidade traîne avec elle un vernier V, dont les divisions, en rasant celles du limbe, permettent de lire les fractions ou minutes.

Il importe 1° que le centre de l'axe de rotation soit le centre de l'arc divisé; 2° que la *ligne de foi* des pinnules fixes soit dirigée sur le diamètre 0° et 180; 3°. que la ligne de foi des pinnules mobiles passe aussi par le centre. Lorsque ces conditions sont remplies, voici comment on mesurera un angle sur le terrain. On fera tourner tout l'instrument sur sa douille et sur son genou, jusqu'à ce que le rayon noté zéro se dirige à un signal; puis fixant tout dans cette position, on fera tourner l'alidade mobile, jusqu'à ce que sa ligne de foi se porte vers un autre signal : ces directions s'obtiennent en mirant les objets par la fente d'une des pinnules et faisant coïncider; en apparence, les fils de l'autre pinnule avec les signaux, et comme il est difficile de tourner l'alidade pour amener cette coïncidence, on ne la produit d'abord qu'à peu près, puis on l'achève avec une *vis de rappel* (n° 10).

Le genou est construit de sorte qu'on peut amener le limbe à être vertical, ce dont on s'assure avec un fil-à-plomb; ou horizontal, ce qu'indiquent deux niveaux rectangles à bulle d'air *n*, *n'*, logés dans le limbe même. Dans ce dernier cas, les objets visés étant élevés ou abaissés relativement au limbe, l'angle mesuré est celui que forment les deux rayons visuels qui vont aux objets, mais réduit à l'horizon (fig. 22); dans le premier cas, l'angle mesuré est vertical; c'est la hauteur angulaire d'une sommité au-dessus d'une autre : et si le diamètre principal est horizontal, ce qu'indique un niveau, l'angle est la hauteur d'un sommet au-dessus de l'horizon, et l'on n'a besoin de faire qu'un seul pointé.

On arme encore le graphomètre d'une petite boussole dont le diamètre *nord et sud*, ou la division zéro de son cercle gradué, est parallèle au diamètre du limbe. Cette pièce sert à orienter les plans, et à diriger les pinnules fixes vers des points invisibles, comme on le dira en traitant de la boussole.

Ces niveaux et cette boussole sont fixés de manière à ne pas gêner les mouvemens de l'alidade et du genou.

Il faut avoir soin, lorsqu'on a manœuvré l'alidade mobile, de viser de nouveau avec les pinnules qui sont fixes, pour s'assurer si l'on n'a pas dérangé l'instrument; parce qu'il arrive souvent qu'une légère torsion force à recommencer les pointés, pour rétablir la coïncidence des fils avec les deux signaux.

Comme les objets éloignés sont souvent difficiles à voir, on remplace les pinnules, surtout celles des grands graphomètres, par des lunettes armées d'un réticule à deux fils situé au foyer commun des verres objectifs et oculaires. L'un de ces fils est parallèle, et l'autre perpendiculaire au limbe (*voy.* n° 8).

La lunette fixe est placée sous le limbe; l'autre est en-dessus; le fil de chacune doit répondre à la ligne de foi et au zéro de la division. Pour faciliter les observations, chaque lunette est montée à charnière sur un pied perpendiculaire au plan du graphomètre, et peut basculer pour permettre de viser les objets qui sont un peu écartés de ce plan. Lorsqu'on veut vérifier si les axes des pinnules ou des lunettes sont bien établis, on vise un même objet éloigné, et l'on voit si les lignes de foi des alidades sont en coïncidence avec le zéro. Quand il n'en est pas ainsi, il y a une *erreur de collimation* dont on trouve ainsi la valeur; cette quantité est une correction constante qu'il faut faire à tous les angles observés, soit additive, soit soustractive, selon les cas. Mais on préfère alors déplacer les fils pour détruire cette erreur. Il est utile que les réticules puissent recevoir un petit mouvement à l'aide de vis latérales qui font glisser les fils ensemble, tant le long du tube pour les amener au foyer de l'objectif, que transversalement pour détruire l'erreur de collimation.

Ces lunettes renversent les objets, mais ce n'est pas un inconvénient pour l'usage auquel on les destine (*voy.* n° 103).

Pour reconnaître si l'instrument est bien centré et bien divisé, d'une station, on mesure l'angle formé par les lignes

menées à deux signaux, en les comparant à un troisième signal : car cet angle est la somme ou la différence de deux angles qu'on peut mesurer. On change ensuite le troisième signal, et l'on doit obtenir la même valeur angulaire. En mesurant les trois angles d'un triangle, la somme de ces angles doit former 180°.

18. Le graphomètre sert à beaucoup d'opérations topographiques : mais pour nous borner au levé des plans, soient ABCDE... (fig. 24) différens objets situés dans une campagne dont on veut faire le plan ; on mesurera la longueur d'une *base* horizontale AE, dont on choisira la position de sorte qu'elle soit la plus propre à l'opération : il sera bon, par exemple, que des extrémités AL, on puisse voir le plus grand nombre possible des points qu'on veut lever, qu'il n'y ait pas d'angle trop aigu, trop obtus, etc.

On stationnera en A, et l'on prendra les valeurs de tous les angles formés par la base AE, avec les lignes menées aux autres points ; ces angles seront réduits à l'horizon, quand le plan du graphomètre aura été fixé horizontalement : on connaîtra donc les angles BAE, CAE, DAE, HAE, etc. Puis transportant l'instrument en E, on en fera autant, c'est-à-dire qu'on mesurera les angles DEA, CEA, BEA, FEA, etc. On inscrira ces valeurs sur un *croquis* où seront dessinés les objets dans l'ordre où on les voit, afin d'éviter les erreurs nées de la confusion.

De retour au cabinet, on tirera sur le papier une droite *ae* d'autant de parties de l'échelle que AE contient d'unités métriques. Du point *a* on tirera, à l'aide du rapporteur ou autrement (*voy.* n° 4), des droites indéfinies *ab*, *ac*, *ad*, *af*, ..., faisant avec *ae* des angles respectivement égaux à ceux qu'on a observés en A; puis du point *e* on mènera des droites *ed*, *ec*, *eb*, *ef*, ... faisant avec *ea* les angles observés en E. Ces lignes se couperont deux à deux aux points *b*, *c*, *d*, *f*... qui seront la représentation des signaux observés.

Il faut remarquer que l'on peut, avec un compas et à l'aide de l'échelle du plan, trouver les longueurs métri-

ques AB, BC, CD, CE,..., qu'on n'a pas effectivement mesurées. De plus, si quelque objet était invisible de l'une des stations, ou de toutes deux, on pourrait en trouver la place sur le plan, en prenant pour base la distance maintenant connue entre deux stations d'où cet objet peut être aperçu; par exemple le point I, qu'on voit de G et de F, sera placé en *i* lorsqu'on aura mesuré les angles IGF, IFG, et qu'on aura reporté ces angles en *igf*, *ifg*.

Le graphomètre sert, comme on voit, à trouver la distance entre des points inaccessibles. Nous verrons bientôt qu'il peut aussi donner les hauteurs des signaux au-dessus de l'horizon. Au reste, ces longueurs se déterminent numériquement par des résolutions de triangles, problèmes qui dépendent de la Trigonométrie rectiligne, et dont nous traiterons plus tard (n° 45).

La *méthode d'intersection* dont on vient de parler ménage beaucoup le temps et la peine; mais elle a l'inconvénient d'employer souvent des angles trop aigus ou trop obtus, qui conduisent à un tracé défectueux; on préfère ordinairement faire autant de stations qu'il y a de signaux, en contournant l'ensemble, et mesurant chaque angle et chaque distance. La figure 29 donne un exemple de la *méthode de cheminement*: comme elle sera exposée en traitant de la planchette (n° 26), nous croyons inutile d'entrer ici dans des développemens plus étendus.

Le cercle répétiteur, le théodolite, dont nous parlerons bientôt, peuvent pareillement servir à mesurer les angles, comme le graphomètre; mais la complication de ces instrumens, le temps qu'on passe à les dresser en place et à faire les observations, etc., empêchent de les employer; on les réserve pour des circonstances qui demandent une précision extrême, dont la topographie n'a pas besoin. Mais on peut très bien user du sextant et du cercle de réflexion, dont nous parlerons en traitant de la navigation; ces instrumens sont très commodes pour mesurer les angles, plus même encore que le graphomètre; mais ils ne les réduisent pas à l'horizon.

19. *Boussole.* C'est une boîte (fig. 28) au centre de laquelle un pivot supporte une aiguille aimantée *ns* en acier. On sait que la propriété de cette aiguille est de prendre une direction constante dans chaque localité, direction qui n'est pas très éloignée du méridien nord et sud, et qu'on appelle *méridien magnétique.* Entrons à ce sujet dans quelques détails.

L'aiguille aimantée est une lame d'acier AB (fig. 27) longue, mince, pointue aux deux bouts, qui a reçu la faculté magnétique, en la frottant avec un aimant, d'un bout à l'autre, en allant toujours dans le même sens. On adapte au milieu C de sa longueur, et vers son centre de gravité, *une chape* en laiton, ou mieux en agate : cette pièce est creusée en cône, et le sommet de ce cône reçoit la pointe d'un pivot très fin, sur laquelle elle peut se mouvoir, presque sans aucun frottement, et présenter ses deux bouts aux divers points de l'espace.

Si avant l'aimantation l'aiguille était horizontalement équilibrée sur son pivot, après, elle prend une position très inclinée à l'horizon ; mais en lestant d'un peu de cire la partie qui va vers le haut, on ramène l'aiguille à l'horizontalité. Ainsi l'acte de l'aimantation force l'aiguille librement suspendue à prendre une direction déterminée qui est oblique à l'horizon et dans un plan voisin du méridien ; le lest lui ôte l'inclinaison, et lui laisse la faculté de se diriger horizontalement suivant une ligne qui, à Paris, va vers le nord-ouest, à 22° du point nord. Il est vrai que cette direction change avec les temps et les lieux ; mais il nous suffit ici qu'elle reste constante pendant plusieurs jours dans chaque localité, ce qui arrive en effet. Le bout de l'aiguille qui va vers le nord, prend le nom de *pôle boréal,* l'autre extrémité est le *pôle austral.* On les marque des lettres N et S, ou seulement on bleuit au feu le pôle boréal B, pour le faire reconnaître.

Les actions qui déterminent la double direction de l'aiguille aimantée paraissent être la force d'attraction qu'exercent de grandes masses de fer contenues dans l'intérieur du globe terrestre, qui, par la propriété connue de l'aimant

d'attirer le fer, forcent l'aiguille à se placer dans la direction où cette puissance s'exerce.

20. Qu'on se représente donc une boîte plate et carrée (fig. 28) contenant un cercle de cuivre argenté en forme d'anneau, et divisé en 360 degrés, et en demi-degrés. Au centre *i* est un pivot d'acier trempé, perpendiculaire, et sur la pointe duquel une aiguille aimantée *ns* tourne librement sur sa chape, de manière que les deux bouts arasent le limbe sans le toucher, et qu'on puisse lire aisément à quelles graduations les pointes répondent. La boîte est en bois ou en cuivre rouge; le fer en est soigneusement écarté, et même l'observateur ne doit porter sur soi ni clé, ni autres objets de ce métal, qui feraient dévier l'aiguille de sa direction naturelle. Les assemblages de la boîte sont à tenons et mortaises en queue d'aronde, ou avec des vis en cuivre. Un verre, retenu dans une gorge par un cercle de cuivre en fil élastique, recouvre l'aiguille et le cercle pour les abriter du vent, et en est assez rapproché, sans les toucher, lorsque la boussole est horizontale, pour qu'en la renversant l'aiguille n'échappe pas de son pivot.

Les aiguilles ont ordinairement six pouces de long; les deux pointes en sont un peu relevées, pour que les oscillations aient plus de stabilité, sans cesser d'être extrêmement libres. Le pivot est perpendiculaire au limbe et au fond de la boîte; il est exactement au centre du cercle gradué, ce qu'on reconnaît en ce qu'en changeant la position de la boîte, l'aiguille, qui se replace toujours dans la même direction absolue, répond à diverses graduations du limbe, dont la différence est de 180°.

Sur un des bords plats de la boîte (fig. 15) est une alidade AB mobile sur un axe, en son milieu; cette alidade peut basculer verticalement quand la boussole est horizontale : elle est formée d'un petit tube creux et quadrangulaire, serré contre le bord de la boîte, et fermé d'une plaque à chaque bout. Ces plaques sont percées d'un petit trou, et d'une languette ver-

ticale qui est au-dessus, et remplace le fil des alidades ordinaires. En visant un objet par ce trou, la languette opposée doit paraître coïncider avec cet objet. Il faut que l'axe de l'alidade soit exactement parallèle au diamètre du cercle qui répond aux degrés 0 et 180, et qui est la ligne nord et sud magnétique. Un axe de rotation adapté au milieu de l'alidade, lui permet de basculer, en sorte que son axe optique décrit un plan perpendiculaire à celui du cercle de la bonssole.

Sous la boîte, on attache un genou et sa douille (fig. 13); l'axe O*i* est terminé par un plateau à trois bras (fig. 13 *bis*); deux ergots *a* et *b*, et le petit verrou *c*, entrent dans des trous sous la boîte, et celle-ci y est fixée, en tournant ce verrou *c*. Ainsi la boussole est attachée au haut du genou de manière à pouvoir prendre la position horizontale *ab*C, et tourner librement sur l'axe *i*. La vis de pression D arrête cette rotation, et l'on peut même, à l'aide d'une vis de rappel, produire de petits mouvemens. On obtient l'horizontalité de la boussole, avec un petit niveau à bulle d'air qu'on pose sur le verre qui la recouvre, ou seulement en faisant tourner la boîte et voyant si, dans toutes les positions, les bouts de l'aiguille affleurent le limbe et restent dans son plan. Au reste le degré de précision des observations qu'on peut faire avec cet instrument ne rend pas nécessaire que l'horizontalité soit exacte.

Lorsque la boussole n'est pas en observation, on soulage le pivot du poids de l'aiguille en la soulevant contre le verre, à l'aide d'un petit levier *il* (fig. 28) dont un bout *l* apparaît au dehors de la boîte, et l'autre bout *i* porte un anneau sous l'aiguille.

Comme l'aiguille aimantée ne suit pas la direction nord et sud, lorsqu'on veut que la boussole indique sur le limbe cette direction, on ajoute un pignon latéral qui engrène dans une portion dentée du cercle divisé, et permet de le faire pirouetter sur son axe central d'environ 80°. On tourne la boîte de manière que l'alidade soit dans le méridien du lieu, et l'on meut le pignon pour amener le limbe à avoir son diamètre 0° et 180°, dans la direction que prend alors l'aiguille.

21. Pour concevoir comment la boussole sert à mesurer les angles, il suffit de remarquer que, dans toutes les positions que l'on fait prendre à la boîte en la tournant autour de son axe vertical, l'aiguille conserve une direction constante, après que ses oscillations sont détruites, comme si elle fût demeurée immobile dans l'espace. Si cette aiguille se trouve répondre aux graduations 20° et 60° dans deux de ses positions, la boîte et son alidade ont donc tourné horizontalement, en passant de l'une à l'autre, de 40°, différence entre 60° et 20°.

Ainsi en visant à deux signaux éloignés, et lisant chaque fois sur le limbe, après que les oscillations sont calmées, les graduations indiquées par le même bout de l'aiguille, la différence de ces arcs mesure l'angle, réduit à l'horizon, que forment les rayons visuels dirigés vers ces objets. On peut donc se servir de la boussole comme du graphomètre pour mesurer les angles et lever les plans, sauf le degré d'exactitude, qui est ici beaucoup moindre. On vise de la station A (fig. 24) les jalons B, C, D..., et on lit chaque fois l'indication du bout de l'aiguille, qui est bleui au feu. Des soustractions font connaître les angles *horizontaux* dont le sommet est en A. On se transporte en un autre lieu E, et l'on en fait autant; opérant ensuite comme il a été expliqué n° 18, on a enfin le plan *abc*... (fig. 24).

Observez que quand, dans ses excursions sur le limbe, l'aiguille passe de l'autre côté de zéro, il faut lire 370° au lieu de 10°, 380° au lieu de 20°..., ce qui revient à ajouter au contraire les arcs situés des deux côtés du zéro.

Les déterminations angulaires de la boussole sont d'ailleurs peu précises; car on ne peut guère lire sur le limbe que jusqu'aux quarts de degrés; le peu d'étendue du limbe, la distance de la pointe indicative et sa mobilité, ne permettent pas de compter sur une grande précision. La boussole est donc un instrument très imparfait, et dont on ne se sert jamais dans les levés exacts; mais l'usage en est si facile et si prompt, qu'on y recourt toutes les fois qu'une grande précision n'est pas jugée utile. Après avoir jalonné le contour, on opère par

la *méthode de cheminement*, qui consiste à faire le tour entier du polygone qu'on veut lever. On stationne donc aux points AEDGB (fig. 29) ; de A on pointe vers E, on lit l'indication de la boussole, on mesure AE, et l'on se transporte en E ; de E on pointe vers D, on lit la graduation, on mesure ED, et l'on va en D, ainsi de suite. (*Voy*. p. 32.)

Il est clair qu'on connaît tous les côtés du polygone ainsi que tous les angles, et que non-seulement il est aisé de le construire sur le papier, à une échelle donnée ; mais même que si le polygone ne se trouve pas fermé, au terme final de la construction, ainsi qu'il arrive presque toujours, on juge de l'importance des erreurs qui affectent principalement les angles, et qu'on peut leur faire subir de petites corrections ; et si dans le cheminement on remarque quelque objet intérieur ou extérieur qu'il soit utile de lever, il est facile de le faire sans s'y porter, en suivant la méthode d'intersection (n° 18).

La boussole n'exige pas qu'on puisse apercevoir tous les signaux qu'on veut lever, si ce n'est l'un après l'autre, puisqu'on ne fait le plus souvent qu'un seul pointé à chaque station ; aussi offre-t-elle le meilleur moyen de lever le cours d'un ruisseau, les sentiers des forêts, etc. Après avoir jalonné les principales courbures A, B, C, D ... figure 30, on se placera en A, et l'on alignera le jalon B ; puis en B, le jalon C ; en C, le jalon D, etc. On mesurera les espaces AB, BC, CD..., et on lira chaque fois les indications de la boussole. On pourra donc construire la portion du polygone ABCD..., comme ci-devant.

Et même il n'est pas nécessaire, dans la méthode de cheminement, de faire des soustractions propres à déterminer les angles ABC, BCD, ... (fig. 30) ; car l'aiguille aimantée prenant, à chaque station, une direction constante, des parallèles AN, BN, CN, ... tracées sur le plan, en représenteront les positions successives, et il suffira de construire, avec le rapporteur, les angles NAB, NBC, NCD, ... précisément égaux à ceux qu'on a lus sur la boussole.

Enfin, on peut éviter l'emploi du rapporteur; car après avoir fixément arrêté sur une table la feuille de papier qui doit recevoir le plan, on pose la boussole sur la table et on la tourne jusqu'à ce que l'aiguille revienne aux graduations successivement observées sur le terrain. Dans ces états, la boîte reprend des positions parallèles à celles qu'elle avait alors, et les lignes tracées au crayon le long du bord, dont on se sert comme d'une règle, sont des droites parallèles aux directions visées par l'alidade. Pour la commodité de cette construction, on enlève l'alidade, qui ne tient à la boîte que par une vis et un écrou, servant d'axe de rotation.

22. On a apporté d'utiles perfectionnemens à la boussole. Au lieu d'une alidade, on y adapte une petite lunette ayant un réticule à deux fils croisés au foyer de l'objectif, comme celle dont on a déjà parlé page 8; l'un de ces fils doit être parallèle au diamètre principal (0° et 180°), et décrire un plan vertical quand on fait basculer la lunette. En dehors du tube, on peut adapter aussi des pinnules ordinaires pour préparer le pointé. La lunette étend au loin la portée de la vue. (*Voy.* fig. 28.)

On fixe en avant un petit arc de cercle vertical en cuivre; la direction de la lunette par rapport à l'horizon est donnée par la graduation de cet arc; cet instrument, qu'on appelle *éclimètre*, donne donc, outre la direction horizontale des signaux, leur angle de hauteur, c'est-à-dire l'angle que fait avec l'horizon le rayon visuel dirigé au sommet observé, ce qui permet d'en calculer l'élévation (n° 46).

On adapte au genou des *vis à caler* qui servent à mettre promptement le limbe horizontal, et à la boîte les vis de rappel qui produisent les petits mouvemens. (*Voy.* fig. 13.)

23. *Planchette.* Cet instrument est l'un des plus usités pour le levé des plans; il n'exige presque aucune connaissance de la Géométrie, et est très facile à manœuvrer. Il consiste principalement en une petite tablette rectangulaire de 6 à 8 décimètres de côtés, qu'on établit horizontalement sur un pied. Une feuille de papier étendue à la surface est

destinée à recevoir le dessin du plan, qui s'y forme successivement et sur les lieux, à mesure qu'on fait les observations : on transporte la planchette et son pied partout où il est nécessaire. (*Voy.* fig. 19.)

L'instrument est composé d'un pied à trois branches, surmonté d'un genou de Cugnot (nº 13) qui sert à établir la planchette horizontalement, ce qu'on reconnaît avec un niveau à bulle d'air placé en divers sens, ou simplement en posant sur la tablette une bille, et donnant le mouvement convenable aux articulations pour que cette bille demeure librement en repos sur le plan.

Comme une feuille de papier de 6 à 8 décimètres de côtés n'aurait pas, le plus souvent, assez d'étendue pour recevoir le plan qu'on veut faire, et qu'il serait difficile de changer de papier, on colle bord à bord plusieurs feuilles qu'on enroule sur deux petits cylindres parallèles, mobiles sur leurs axes, et disposés sur les bords latéraux de la planchette. Chacun de ces cylindres ou rouleaux porte une petite roue dentée en *rochet* et un *cliquet* qui ne permet à leur engrenage de tourner que dans un sens. Quand il en est besoin, on dégage le cliquet de la roue, on déroule le papier de dessus l'un des cylindres, et on l'enroule sur l'autre, pour étendre l'opération plus loin. Le papier est toujours tendu sur la tablette, et on le fortifie en le collant sur une mousseline. Pour éviter la confusion, nous n'avons pas représenté dans la figure 19 ces rouleaux, que d'ailleurs on n'emploie que quand cela est nécessaire.

La tablette PP n'est que posée sur une autre moins grande *pp*, à laquelle elle est attachée par quatre vis de pression *vv*, et qui est elle-même solidement jointe au genou, et peut pirouetter sur un disque horizontal *cc* à l'aide d'un axe central E.

PP (fig. 19) est la tablette qui porte le dessin tendu à sa surface ; *pp* est la seconde tablette sur laquelle la première est fixée par quatre vis *vv* aux angles ; *cc* est le disque ou le plateau circulaire fixé au genou N. Le pivot est un gros boulon central, dont le bout inférieur V est terminé en vis : après

avoir traversé le disque, cette vis passe entre les deux armatures latérales LL du genou : on serre cette vis, lorsqu'on veut empêcher la tablette de tourner.

Au lieu du genou de Cugnot, on peut se servir du genou à coquilles (fig. 13 et 22), qui est moins lourd et moins coûteux; seulement, on a plus de difficulté pour attraper la position horizontale, et la moindre pression suffit pour déverser la planchette.

Il est souvent nécessaire de donner un petit mouvement de translation à la tablette supérieure; c'est ce qu'on fait par une vis de rappel R qui tient à la tablette de dessous *cc*. Il faut qu'un point déterminé du dessin soit verticalement au-dessus du point du sol qu'il y représente et qui a été pris pour point de mire. A l'aide de cette vis et d'un fil-à-plomb, ou d'un petit caillou qu'on laisse choir de dessous la planchette sur terre, entre les jambes du pied, on arrive bientôt à cette position. Sans cette vis, il faudrait déplacer le pied, et tenter divers essais très longs.

24. Il y a trois manières de se servir de la planchette, qui se combinent entre elles selon les cas qui se présentent. Les visées se font avec l'alidade représentée figure 10 ou 18. On fiche une aiguille au point de la tablette qui représente sur le plan le lieu qu'on occupe sur le sol; et l'on applique le bord de l'alidade contre cette aiguille, en dirigeant les pinnules vers les signaux qu'on veut rapporter sur le plan; l'aiguille sert de point d'arrêt et de pivot. On trace le long de la règle une ligne au crayon; cette ligne est la projection du rayon visuel.

Avant d'expliquer ces trois procédés, montrons comment on peut lever le plan d'un triangle RSP (fig. 25). On établira la planchette en R horizontalement, et visant l'alidade aux sommets S et P, on marquera au crayon, sur le papier, des traits indéfinis *rp*, *rs*, dans leurs directions. On transportera ensuite la planchette en S, et l'on mesurera la distance RS; puis, prenant sur le trait *rs* une longueur *rs* d'autant de par-

ties de l'échelle du plan que cette distance RS contient d'unités métriques, *s* sera, sur le plan, le point analogue de S. Arrivé à la station S, on fera en sorte de disposer la planchette de telle sorte que ce point *s* soit verticalement au-dessus de S, et que la droite *sr* déjà tracée, soit dans l'alignement SR : l'alidade placée le long de *sr*, doit avoir ses pinnules dirigées sur le signal R. On fixera la planchette dans cette situation et l'on tournera l'alidade vers le troisième sommet P, la règle pirouettant autour du point *s*. On tracera la droite indéfinie *sp*P, qui ira couper *rp* au point *p*, analogue de P. Ainsi le triangle *spr* sera le plan de SPR, puisque ces figures sont évidemment semblables, ou du moins, tout étant ici réduit à l'horizon, *spr* est semblable à la projection horizontale de SPR.

On voit que l'on peut, de cette figure *spr*, déduire la graduation des angles S, P, R, et les longueurs des côtés SP, RP, en s'aidant d'un rapporteur et d'un compas : en sorte que la planchette offre un moyen de mesurer des angles et des distances inaccessibles.

Cette explication bien comprise, exposons les trois procédés pour faire les levés à la planchette.

25. Le premier procédé est la *méthode d'intersection* exposée page 21. On mesure à la chaîne une base AE (fig. 24), et l'on établit successivement la planchette aux deux extrémités A, E. On a tracé sur la feuille une droite *ae*, sur laquelle on a porté de *a* en *e*, en parties de l'échelle du plan, une distance *ae* égale au nombre d'unités métriques de AE. Lorsqu'on stationne au point A, la planchette étant disposée horizontalement, on la fixera, le point *a* étant verticalement au-dessus de A, et la ligne *ae* dans la direction de AE, ainsi qu'il a été expliqué ci-devant.

On dirige ensuite l'alidade vers les signaux B, C, D... successivement, en faisant pirouetter le bord de la règle autour de l'aiguille qu'on a fichée au point *a*; et l'on trace, à chaque alignement, les droites correspondantes, savoir : *ab*, *ac*, *ad*... qui coïncident avec AB, AC, AD... On a ainsi une suite de

lignes divergentes indéfinies partant de *a*, et ayant les directions sur lesquelles doivent se trouver les plans des signaux B, C, D...

Transportant la planchette en E, on fera les manœuvres nécessaires pour que le point *e*, déjà reconnu analogue de E, soit juste au-dessus de E, la planchette étant horizontale, et la ligne *ea* dirigée selon EA. Après avoir fixé la planchette dans cette position, on répètera en E ce qu'on a fait en A, c'est-à-dire qu'on tirera du point E des droites divergentes *ed*, *ec*, *eb*... qui, passant toutes en *e*, coïncident avec les directions respectives ED, EC, EB.., Ces droites iront couper les premières aux points *d*, *c*, *b*... qui seront les représentations, sur le plan, des signaux D, C, B,.. Observez que pour éviter la confusion et les erreurs d'intersection, on aura eu soin, lorsqu'on stationnait en A, d'écrire le long de chaque ligne, un signe ou une désignation de l'objet pris pour point de mire, afin qu'arrivé en E, on reconnaisse celle de ces lignes dont on a besoin, pour déterminer le point d'intersection. On voit qu'après ce tracé on peut trouver sur le plan, les distances et les angles qu'on n'a pas effectivement mesurés; le plan sera facile à terminer.

26. La *méthode de cheminement* exposée page 27 est plus longue, mais plus exacte. Pour lever le polygone (fig. 20), on stationne successivement à chaque angle. Lorsqu'on est en A, on y établit la planchette, en se conformant aux règles ci-devant prescrites. On vise la station E avec l'alidade, et l'on trace sur la feuille la droite indéfinie qui se dirige en E. On mesure la distance AE, et l'on prend sur la droite tracée une longueur *ae* d'autant de parties de l'échelle que AE contient d'unités métriques, et l'on aura le point *e* qui représente E sur le plan. On se transportera en E, et l'on y orientera la planchette en plaçant *e* au-dessus de E, et la droite *ea* alignée sur EA : fixant la planchette dans cette position, et déplaçant l'alidade seule, on la tournera vers B, autour du point *e*, et l'on tracera la droite indéfinie qui coïncide avec EB. On me-

surera la distance EB, et l'on prendra *eb* d'autant de parties; et ainsi de sommet en sommet, en faisant le tour entier du polygone. Le tracé se vérifie en voyant si, revenu au signal A, le polygone se ferme exactement.

Cette opération est surtout pratiquée dans les bois fourrés, le long des sentiers, sur le bord des ruisseaux, et lorsque, d'une station, on ne peut apercevoir plusieurs des signaux environnans.

27. Enfin le troisième procédé consiste à établir la planchette à une seule station C (fig. 26), ordinairement dans l'intérieur de la figure qu'on veut lever, en choisissant ce point C tel, que de là on puisse voir tous les autres signaux. On y dirige successivement l'alidade selon CA, CB, CD... et l'on trace au crayon, sur le papier, les lignes C*a*, C*b*, C*d*... qui sont dans ces alignemens. Après quoi on mesure avec la chaîne toutes les distances CA, CB, CD,... et l'on porte avec le compas, et en parties de l'échelle, toutes ces longueurs sur leurs lignes respectives, ce qui détermine les points *a*, *b*, *d*... analogues de A, B, D... et le polygone *abd*... semblable à ABD...

28. Le secours du *déclinatoire* abrége beaucoup l'orientation de la planchette : c'est une petite boussole, dans une boîte en carré long, dont le bord extérieur sert de règle, et dont l'aiguille ne peut parcourir qu'environ 40 degrés. Lorsqu'à la première station on a orienté la planchette, ainsi que nous l'avons dit, on pose le déclinatoire sur la planchette, en faisant tourner la boîte jusqu'à ce que l'aiguille se place suivant une droite longitudinale parallèle au bord, ou *ligne de foi*. On trace une droite, sur le plan, dans cette direction, le long du bord de la boîte, lequel sert de règle. Quand la planchette aura été transportée ailleurs, on lui donnera l'orientation convenable, en posant le bord du déclinatoire le long de cette même droite, et l'on tournera la planchette jusqu'à ce que l'aiguille aimantée se place sur la ligne de foi. Dans cette position, on fixera la planchette, qui aura précisément la direction nécessaire pour procéder aux pointés suivans; en sorte

qu'elle se trouvera de suite dans la position qu'elle aurait reçue, si on l'eût disposée par un pointé sur la station précédente.

29. Ce que nous venons de dire pour expliquer la construction et l'usage de quelques instrumens de topographie, suffit pour faire comprendre comment on peut tracer le plan d'une ville, d'une campagne, d'un parc, d'une forêt, et de toute localité peu étendue. Il existe beaucoup d'autres instrumens destinés au même objet ; mais outre que ce qui vient d'être dit peut suffire pour en concevoir l'usage, la plupart de ces instrumens sont peu employés, ou le sont seulement dans des circonstances spéciales.

Si l'on rencontre dans la nature quelques particularités qui ne se prêtent pas aux méthodes précédentes, on mesure certains angles avec le graphomètre, quelques distances avec la chaîne, et l'on se trouve conduit à résoudre des triangles pour obtenir la position des signaux sur le plan. C'est de cette théorie que nous allons nous occuper.

CHAP. II. — TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Les formules trigonométriques sont d'un usage perpétuel en topographie ; il convient donc de les rappeler avant tout : mais comme ces équations sont établies sur des considérations purement géométriques, nous jugeons inutile de donner les démonstrations de ces formules, renvoyant, à cet égard, à notre *Cours de Mathématiques pures*.

On a des tables de *sinus naturels* des arcs, ou de valeurs des sinus pour un rayon divisé en parties égales : mais on préfère se servir des logarithmes de ces nombres, tels qu'on les trouve dans les tables de Callet, parce que les calculs sont plus faciles à faire.

30.
$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A \quad (1)$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \quad (2)$$
$$\sin 2A = 2\sin A \cos A \quad (3)$$
$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$
$$= 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A \quad (4)$$
$$1 + \cos A = 2\cos^2 \tfrac{1}{2} A \quad (5)$$
$$1 - \cos A = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} A \quad (6)$$
$$\tang(A \pm B) = \frac{\tang A \pm \tang B}{1 \mp \tang A \tang B} \quad (7)$$
$$\tang \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}\right)} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} \quad (8)$$
$$\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2} A) = \frac{1 + \sin A}{\cos A} \quad (9)$$

31. Les équations suivantes servent à rendre propres aux logarithmes les formules qui contiennent des sommes et des différences de sinus et de cosinus, en y introduisant des produits et des quotiens.

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\tfrac{1}{2}(A \pm B).\cos\tfrac{1}{2}(A \mp B) \quad (10)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cos\tfrac{1}{2}(A + B).\cos\tfrac{1}{2}(A - B) \quad (11)$$
$$\cos B - \cos A = 2\sin\tfrac{1}{2}(A + B).\sin\tfrac{1}{2}(A - B) \quad (12)$$
$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B).\sin(A - B) \quad (13)$$
$$\frac{\tang A - \tang B}{\tang A + \tang B} = \frac{\sin(A - B)}{\sin(A + B)} \quad (14)$$
$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tang\tfrac{1}{2}(A + B)}{\tang\tfrac{1}{2}(A - B)} \quad (15)$$

32. Le rayon étant 1, on a les séries suivantes :

$$\sin A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \frac{A^7}{2.3\ldots.7} + \text{etc.}\ldots \quad (16)$$

$$\cos A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2\ldots.6} + \text{etc.}\ldots\ldots \quad (17)$$

$$\text{arc}\, A = \sin A + \frac{\sin^3 A}{2.3} + \frac{3\sin^5 A}{2.4.5} + \frac{3.5\sin^7 A}{2.4.6.7}\ \text{etc.}.. \quad (18)$$

$$\text{tang}\, A = A + \frac{A^3}{3} + \frac{2A^5}{3.5} + \frac{17A^7}{5.7.9}\ \text{etc.}\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

$$\text{arc}\, A = \text{tang}\, A - \tfrac{1}{3}\text{tang}^3 A + \tfrac{1}{5}\text{tang}^5 A - \tfrac{1}{7}\text{tang}^7 A\ \text{etc.} \quad (20)$$

$$a^x = 1 + x\text{l}a + \frac{x^2}{2}\text{l}^2 a + \frac{x^3}{2.3}\text{l}^3 a.\ \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\log(1+z) = M\left(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 + \text{etc.}\right).\ \ldots\ldots \quad (22)$$

Dans ces séries, A désigne la longueur d'un arc pris dans le cercle dont le rayon est 1 ; M est le *module* ou le logarithme tabulaire de la base e du *système népérien ;* c'est-à-dire que M est le facteur constant qui, multipliant tous les logarithmes népériens, les change en logarithmes tabulaires : la est le logarithme de la base a pris dans le système dont la base est e ; on a $\text{l}a = \frac{1}{M}$. Pour les logarithmes de Briggs et de Callet, dont la base est 10, on a les valeurs :

$$M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765$$
$$\log. M = \bar{1}.63778\ 43113\ 00536\ 77817$$
$$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536$$
$$M = \log. e = \frac{1}{\text{l}a}.$$

33. Enfin π désignant la demi-circonférence du cercle dont le rayon est 1, ou le rapport de toute circonférence à son diamètre, on a

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 898, \quad \log. \pi = 0.49714\ 98726\ 941.$$

34. Soit α la longueur d'un arc de cercle dont le rayon est R, (α°) son nombre de degrés; (α'), (α'') le nombre de minutes et de secondes de cet arc; μ° le nombre de degrés de l'*arc égal au rayon*, μ', μ'' les nombres de minutes et de secondes de cet arc; on a la proportion $R : \mu^\circ :: \alpha : (\alpha^\circ)$; d'où l'on tire $R(\alpha^\circ) = \mu^\circ\alpha$: on aurait de même $R(\alpha') = \mu'\alpha$, $R(\alpha'') = \mu''\alpha$; ainsi dans tout cercle de rayon R,

$$R(\alpha^\circ) = \mu^\circ\alpha, \quad R(\alpha') = \mu'\alpha, \quad R(\alpha'') = \mu''\alpha,$$

et le rayon du cercle étant pris égal à l'unité linéaire, ou $R = 1$,

on a $$\mu^\circ = \frac{1}{\text{arc } 1^\circ}, \quad \mu' = \frac{1}{\text{arc } 1'}, \quad \mu'' = \frac{1}{\text{arc } 1''}.$$

On tire de là, en considérant que les arcs de $1'$ et $1''$ sont sensiblement égaux à leurs sinus, et en faisant $R = 1$ et $(\alpha^\circ) = 180^\circ$, $\alpha = \pi$,

$$\mu^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{1}{\text{arc } 1^\circ} = 57^\circ{,}29578,$$

$$\mu' = \frac{10800'}{\pi} = \frac{1}{\sin 1'} = 3437'{,}74677,$$

$$\mu'' = \frac{648000''}{\pi} = \frac{1}{\sin 1''} = 206264''{,}80625,$$

$$\log \mu^\circ = 1{,}75812\ 26324\ 09172,$$

$$\text{compl}^t \log \mu^\circ = \bar{2}{,}24187\ 73675\ 90828,$$

$$\log \mu' = 3{,}53627\ 38827\ 92816,$$

$$\text{compl}^t \log \mu' = \bar{4}{,}46372\ 61172\ 07184 = \log.\sin 1',$$

$$\log \mu'' = 5{,}31442\ 51331\ 76459,$$

$$\text{compl}^t \log \mu'' = \bar{6}{,}68557\ 48668\ 23541 = \log.\sin 1''.$$

Donc *quand une équation contient un arc déterminé par sa longueur* α, *le rayon étant* 1, *on changera* α *en* $(\alpha'')\sin 1''$, *et cet arc sera exprimé par son nombre de secondes* (α'').

35. Soit K la corde d'un arc dont (α°) est le nombre de degrés, on a

$$K = 2R \sin \tfrac{1}{2}(\alpha^\circ).$$

36. La surface S d'un triangle rectiligne dont a, b, c sont les trois côtés, R le rayon du cercle circonscrit, r celui du cercle inscrit, est telle, qu'on a

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \quad 4RS = abc, \quad S = rp,$$

en posant $$2p = a + b + c.$$

37. *Résolution des triangles rectangles.* Dans les équations suivantes, A désigne l'angle droit, a l'hypoténuse, b et c les deux autres côtés, B, C les angles aigus qui sont respectivement opposés à b et c (fig. 33) :

$$\left.\begin{array}{l} b = a \cos C = a \sin B, \\ c = b \tan C = b \cot B, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (23)$$

38. *Résolution des triangles obliquangles.* On a les équations

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A. \quad . \quad . \quad (25)$$

A, B, C représentent les trois angles du triangle ; a, b, c les côtés qui sont respectivement opposés à ces angles (fig. 32).

1er *cas.* Étant donnés deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux, l'équation (24) donne le 2e angle opposé : et comme le sinus de cet angle répond à deux arcs supplémentaires, on a, en général, deux solutions, à moins que les conditions ne rendent l'une inadmissible.

2e *cas.* Étant donnés deux angles et un côté, on connaît le 3e angle, et l'équation (24) fait connaître les deux côtés.

3e *cas.* Connaissant deux côtés b et c et l'angle compris A, on a

$$\tan \frac{1}{2}(C - B) = \frac{c-b}{c+b} \cdot \cot \frac{1}{2} A \,;$$

d'où $\frac{1}{2}(C+B) = m = 90° - \frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}(C-B) = n$,

et enfin $C = m + n$, $B = m - n$.

Autrement. On pose $\tan \varphi = \dfrac{2 \sin \frac{1}{2} A}{c-b} \sqrt{(bc)}$.

Cette équation donne l'arc auxiliaire φ; et ensuite on a

$$a = \frac{c - b}{\cos\varphi}.$$

4ᵉ *cas.* Connaissant les trois côtés a, b, c, on trouve un angle A par les équations suivantes, dans lesquelles

$$2p = a + b + c,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\left(\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\right)},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \sqrt{\left(\frac{p(p-a)}{bc}\right)}.$$

Autrement. On trouve les deux segmens x et y formés sur la base a par la perpendiculaire abaissée du sommet A (fig. 32), par les équations

$$y - x = \frac{(b+c)(b-c)}{a}, \quad y + x = a;$$

les angles B et C résultent ensuite des équations

$$c\cos\mathrm{B} = x, \quad b\cos\mathrm{C} = y.$$

5ᵉ *cas. Triangles isoscèles.* En faisant $b = c$ et $\mathrm{B} = \mathrm{C}$; la base est a, l'angle du sommet A; on a

$$b\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}a = p - b,$$
$$p = \tfrac{1}{2}a + b.$$

Comme on donne deux des quantités B, b et a, la 3ᵉ résulte évidemment de l'une de ces deux équations.

39. Comme il faut être exercé aux applications des formules de la résolution des triangles, nous donnerons ici les valeurs des côtés et des angles de triangles, auxquels on pourra appliquer ces équations. On prendra pour données les parties élémentaires qu'on voudra; les autres seront les inconnues que le calcul doit faire trouver. En variant les élémens donnés, on se proposera divers problèmes qui seront résolus par les formules qu'on a exposées, et ce seront autant d'exercices utiles de ces sortes de calculs.

Triangle rectangle d'épreuve.

$a = 56^m,925$,	$b = 45^m,540$,	$c = 34^m,154$,
log = 1.7553030........	1.6583930.........	1.5334543
$A = 90^\circ$	$B = 53^\circ 7' 48'',4$	$C = 36^\circ 52' 11'',6$
log sin B = 9.9030900,	cos B... 9.7781512,	tang B... 0,1249389

Triangle obliquangle d'épreuve.

Côtés.	Logarithmes.		log p = 2.0357459,
$a = 57^m,770$,	log = 1.7617024,		log $(p - a)$ = 1.7059406,
$b = 71,577$,	log = 1.8647735,		log $(p - b)$ = 1.5682252,
$c = 87,811$,	log = 1.9435489,		log $(p - c)$ = 1.3173947,
Angles.	Log sin.	Log cos.	Log. tang.
$A = 40^\circ 56' 00'',00$,	9.8163609,	9.8782186,	9,9381423,
$B = 54.16.8,48$,	9.9094319,	9.7663981,	0 1430338,
$C = 84.47.51,52$,	9.9982073,	8.9574805,	11.0407268.

40. ***Trouver la largeur d'une rivière, d'un étang, etc., et en général la distance à un point inaccessible.*** Supposons qu'on ne puisse atteindre le point C (fig. 34), et qu'on veuille trouver la longueur AC : on mesurera une base AB, et les angles A et B du triangle ABC ; puis en résolvant ce triangle, on obtiendra le côté AC.

Observez que si l'angle A est droit, et l'on peut souvent le construire tel à l'aide de l'équerre ou du graphomètre, etc., le triangle ABC est rectangle, et le calcul devient très facile, car on a AC = AB tang B ; et même si l'angle B est de 45°, comme AB = AC, l'opération se réduit à mesurer la base AB. Ainsi en s'éloignant de A, dans la direction AB perpendiculaire à AC, jusqu'à ce que l'on trouve, avec l'équerre, que l'angle B = 45°, on a de suite la distance demandée AC.

41. *Trouver la distance* AC (fig. 34) *entre deux points* A *et* C, *quand un obstacle interposé empêche de voir l'un lorsqu'on se trouve à l'autre.* On stationne en deux points B et D sur une direction rectiligne BAD passant en A, et l'on choisit ces points tels, que l'on puisse voir C lorsqu'on est en B et en

D : on mesure les distances AB, AD, et les angles B et D. Ensuite on résout le triangle BDC dans lequel on connaît le côté BD et les angles, et l'on calcule le côté BC : enfin on résout le triangle ABC, où l'on connaît les côtés AB, BC et l'angle B compris, et l'on obtient la distance demandée AC.

42. *Trouver la distance entre deux points* A *et* C, *l'un et l'autre inaccessibles* (fig. 35). On suppose, par exemple, qu'une rivière passe entre le champ BD où l'on se trouve, et les signaux A et C; il s'agit de connaître AC sans traverser la rivière. On mesurera une base quelconque BD et les angles que font, en B et D, les rayons visuels dirigés aux points A et C : on résoudra les triangles ABD, CDB, où l'on connaît un côté BD et les angles adjacens, ce qui donnera les distances BA, BC du point B aux deux signaux inaccessibles : enfin résolvant le triangle ABC, où l'on connaît les deux côtés BA, BC et l'angle B compris, on trouvera la distance demandée AC.

43. *Un triangle* ABC (fig. 35) *étant donné, trouver le lieu d'un point* D, *en connaissant les angles* $ADC = \beta$, $ADB = \gamma$. Ce problème trouve son application dans un cas qui se rencontre quelquefois en faisant un levé topographique. Trois points A, B, C sont marqués sur un plan où l'on voudrait fixer la place d'un quatrième point D qu'on a oublié dans l'opération. On stationne en D et l'on y mesure les deux angles β et γ; les valeurs de ces angles suffisent pour déterminer le lieu du point D.

Donnons d'abord une construction graphique qui a presque toujours l'exactitude suffisante. On décrit sur le côté AC un segment de cercle *capable* de l'angle β; puis sur AB, un segment capable de l'angle γ (*Cours de Math. pures*, n° 208, IV). Le point D demandé est à l'intersection de ces deux arcs de cercle. Il pourrait arriver que l'un de ces cercles passât à la fois par les trois points A, B, C; alors le problème serait indéterminé ou absurde, selon que l'autre cercle serait ou non dans le même cas.

Le procédé analytique que nous allons donner a plus de précision. Soient a, b, c les côtés; A, B, C les angles donnés du triangle ABC : désignons par x et y les angles inconnus ABD, ACD; il s'agit de trouver ces deux angles, et le problème sera résolu. Les triangles ABD, ACD donnent (éq. 24):

$$DA = \frac{b \sin y}{\sin 6} = \frac{c \sin x}{\sin \gamma}.$$

Soit calculé un angle φ, tel qu'on ait $\tang \varphi = \frac{c \sin 6}{b \sin \gamma}, \ldots$ (1)

on aura $\tang \varphi = \frac{\sin y}{\sin x}$, d'où l'on tire (éq. 7 et 15)

$$\frac{1 + \tang \varphi}{1 - \tang \varphi} = \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y},$$

ou

$$\tang (45^\circ + \varphi) = \frac{\tang \frac{1}{2}(x + y)}{\tang \frac{1}{2}(x - y)} \ldots\ldots \quad (2)$$

Faisons, pour abréger, $m = \frac{1}{2}(x + y)$, $n = \frac{1}{2}(x - y)$; on connaît m, puisque la somme des quatre angles du quadrilatère valant 360°, on a $2m = x + y = 360^\circ - (A + CDB)$, savoir,

$$m = 180^\circ - \frac{1}{2}(A + 6 + \gamma) \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ainsi l'équation (1) donne l'arc auxiliaire φ, (3) l'arc m, et enfin on tire de (2)

$$\tang n = \tang m . \cot (45^\circ + \varphi) \ldots\ldots \quad (4)$$

Une fois m et n connus, on a $x = m + n$, $y = m - n$, ce qui complète la solution du problème. On peut même calculer les longueurs AD, CD et BD.

44. *Trouver la longueur* BD $= x$ (fig. 36) *d'un des segmens de la droite* AH, *connaissant les deux autres segmens* AB $=$ a, DH $=$ b, *ainsi que les angles* α, 6, γ, *sous lesquels, d'une station quelconque* C, *on voit les longueurs* AB, AD, AH, *distances des points* B, D, H *à l'extrémité* A.

L'angle extérieur d'un triangle étant égal à la somme des deux intérieurs opposés, on tire des triangles ABC, ACD, ACH,

angle CBD $=A+\alpha$, angle CDH $=A+\mathcal{C}$, angle CHI $=A+\gamma$. Mais les triangles ABC, ADC donnent (éq. 24)

$$\frac{BC}{a}=\frac{\sin A}{\sin \alpha},\quad \frac{CD}{a+x}=\frac{\sin A}{\sin \mathcal{C}},$$

d'où en divisant membre à membre $\frac{BC}{CD}=\frac{a\sin \mathcal{C}}{(a+x)\sin \alpha}$.

De même les triangles BCH, DCH donnent

$$\frac{BC}{b+x}=\frac{\sin(A+\gamma)}{\sin(\gamma-\alpha)},\quad \frac{CD}{b}=\frac{\sin(A+\gamma)}{\sin(\gamma-\mathcal{C})},$$

$$\frac{BC}{CD}=\frac{(b+x)\sin(\gamma-\mathcal{C})}{b\sin(\gamma-\alpha)};$$

d'où égalant ces deux valeurs, il vient

$$\frac{a\sin \mathcal{C}}{(a+x)\sin \alpha}=\frac{(b+x)\sin(\gamma-\mathcal{C})}{b\sin(\gamma-\alpha)},$$

$$\frac{ab\sin \mathcal{C}\sin(\gamma-\alpha)}{\sin \alpha\sin(\gamma-\mathcal{C})}=(a+x)(b+x)=ab+(a+b)x+x^2.$$

Pour résoudre par rapport à x cette équation du 2ᵉ degré, on pose

$$\tang^2\varphi=\frac{4ab}{(a-b)^2}\cdot\frac{\sin \mathcal{C}\sin(\gamma-\alpha)}{\sin \alpha\sin(\gamma-\mathcal{C})}\dots\quad (1)$$

et l'on a $\quad x^2+(a+b)x=\frac{1}{4}(a-b)^2\tang^2\varphi-ab,$

$$x=-\tfrac{1}{2}(a+b)\pm\tfrac{1}{2}(a-b)\sqrt{(1+\tang^2\varphi)}.$$

L'équation (1) fait connaître l'arc auxiliaire φ, et l'on a enfin

$$x=-\frac{a+b}{2}\pm\frac{a-b}{2\cos\varphi}\dots\dots\dots\quad (2)$$

On ne prend que celle des deux racines qui est positive. Notre solution suppose que le segment inconnu x est intermédiaire entre a et b : s'il en était autrement, on prendrait soit a, soit b, pour inconnue dans l'équation ci-dessus, qui ne serait plus que du 1ᵉʳ degré.

45. *Réduire un angle, un point ou une distance à l'horizon.* Il est rare que les signaux soient dans un plan horizontal; alors ce ne sont pas les angles observés, les distances me-

surées qu'il faut porter, avec le rapporteur et le compas, sur la feuille du plan qu'on veut tracer, mais bien leurs *projections horizontales* (n° 1). Ainsi lorsqu'un signal D (fig. 31) est observé des stations B, C, qui sont dans un plan horizontal au-dessus duquel D est élevé, comme lorsque D est le sommet d'un clocher, d'un arbre ou d'une montagne, il faut substituer, sur le plan, au point D, et aux angles DCB, DBC, leurs projections horizontales A, ACB, ABC. De même lorsqu'on a mesuré une longueur CD sur un terrain en pente, il ne faut porter sur le plan que la longueur AC qui en est la projection horizontale.

Et d'abord, dans ce dernier cas, le triangle rectangle CAD donne les équations CA = CD cos DCA, ou $x = a \cos \theta$, en désignant par a la longueur mesurée, par x sa réduction à l'horizon, et par θ l'inclinaison de la pente. Pour mesurer cet angle θ, il n'est point nécessaire de voir le point A; projection de D, attendu qu'on tourne le graphomètre sur son genou pour mettre le limbe vertical, à l'aide d'un fil-à-plomb; puis on pose un petit niveau à bulle d'air (n° 51) sur le diamètre principal de l'instrument, afin de disposer ce diamètre verticalement (fig. 22). Dans cette situation, on dirige l'alidade ou la lunette au signal D, et on obtient l'inclinaison θ. (*Voy.* p. 19.)

Le plus souvent, l'angle θ n'est que d'un petit nombre de degrés, et la valeur $x = a \cos \theta$ ne se trouve pas avoir assez de précision. On préfère calculer la correction que a doit subir, c'est-à-dire l'excès de a sur x; savoir $z = a - x = a - a \cos \theta$; car on a

$$z = a\,(1 - \cos \theta) = 2a \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta,$$

à cause de l'équation (6) (p. 35): et comme l'arc $\frac{1}{2}\theta$ est très petit et ne diffère pas sensiblement de son sinus, on peut remplacer ici le sinus par l'arc, sans que la construction qu'on en déduira puisse altérer le résultat; ainsi $z = \frac{1}{2} a \theta^2$. Enfin, remplaçant la longueur de l'arc θ pris dans le cercle dont le rayon est un, par le nombre de minutes θ' de cet arc, (n° 34),

ou θ par $\theta \sin 1'$, il vient

$$z = \frac{1}{2} a\theta^2 \sin^2 1'.$$

Telle est la quantité qu'il faut retrancher de la longueur mesurée a pour la réduire à l'horizon ; mais il faut que l'angle θ de pente ne soit que de 3 à 4 degrés au plus, et exprimé en minutes : on a $\log \frac{1}{2} \sin^2 1' = \overline{8}.6264222$. On abrége les calculs en formant une table des valeurs de z, où l'on trouve à vue ces corrections pour toutes les inclinaisons de minute en minute. Nous retrouverons plus tard une occasion d'appliquer cette théorie (n° 127).

46. Supposons que des stations C et B, on ait observé un signal élevé D (fig. 31) avec un instrument impropre à réduire les angles à leur projection horizontale : comme c'est le point ordinairement invisible A qui doit être marqué sur le plan, le triangle CDB doit être remplacé par CAB. En se plaçant successivement en C et en B, on mesurera, avec un graphomètre dont le limbe est vertical, les angles DCA, DBA : on mesurera aussi la base BC ainsi que les angles DCB, DBC, en disposant le limbe dans les plans respectifs de ces angles.

On résoudra le triangle obliquangle BDC, où l'on connaît un côté CB, et les angles adjacens C et B, et l'on en déduira les longueurs CD, DB. Alors, dans les triangles rectangles verticaux ADC, ADB, on aura les longueurs AC et AB, qui détermineront le triangle BAC, et par suite la projection A. Nommant B, C, D les angles du triangle DBC, dans l'espace ; d la base BC,

on a $\quad \sin D : d :: \sin C : BD :: \sin B : CD,$

d'où
$$BD = \frac{d \sin C}{\sin D}, \quad CD = \frac{d \sin B}{\sin D},$$

et
$$AC = \frac{d \sin B \cos DCA}{\sin D},$$

$$AB = \frac{d \sin C \cos DBA}{\sin D},$$

$$AD = \frac{d \sin B \sin DCA}{\sin D} = \frac{d \sin C \sin DBA}{\sin D}.$$

Ainsi, on connaîtra 1°. la hauteur AD de la sommité D au-dessus de l'horizon des stations B et C;

2°. Les trois côtés du triangle ABC, ce qui détermine la projection A de cette sommité, ou sa place sur le plan;

3°. Les angles de ce triangle, projections des angles observés B et C, et de l'angle CDB au sommet D.

Il faudra, pour obtenir l'élévation totale du sommet D, ajouter à la hauteur AD donnée par le calcul, l'élévation du centre du graphomètre au-dessus de l'horizon de B et de C.

47. Quand le pied A d'une hauteur verticale DA est accessible, on fait une seule station en C, et l'on mesure l'angle vertical DCA et la distance AC : alors, dans le triangle rectangle DCA, on a $AD = AC \tang DCA$.

Et lorsqu'on ne peut arriver au point A, comme quand on observe le sommet D d'un clocher ou d'un édifice, d'un signal élevé sur une montagne, etc., on fait deux stations l'une en C, l'autre en F, dans la même direction ACF; de ces points C et F, on mesure les angles verticaux DCA, DFA, et la distance CF. En résolvant les triangles DCA, DFA, on a

$$AC = AD \cot C, \quad AF = AD \cot F;$$

retranchant membre à membre, il vient

$$CF = AD (\cot F - \cot C) = \frac{AD \sin (C - F)}{\sin C \sin F};$$

d'où l'on tire

$$AD = \frac{CF \times \sin C \sin F}{\sin (C - F)},$$

telle est l'élévation du sommet D.

Chap. III. — Nivellement topographique.

48. Il est rare qu'on soit obligé de calculer les différences d'élévation, et l'on doit préférer les obtenir directement par un nivellement. On se sert de trois sortes de niveaux, celui de maçon, les niveaux d'eau et à bulle d'air.

Niveau de maçon, ou à perpendicule (fig. 39). C'est une

équerre ABC, dont les branches sont réunies par une barre HK propre à les maintenir à distance. Les trois règles qui le forment sont assemblées à tenons et mortaises; et un fil-à-plomb, suspendu vers le sommet C, doit battre sur un trait I marqué sur la barre transversale. Les branches AC, BC sont égales; posées sur une règle horizontale, le fil doit couvrir le trait I, même lorsqu'on retourne le niveau bout pour bout; cette épreuve en indique la bonne construction.

49. Le *niveau d'eau* est formé d'un tube MM' (fig. 37) en fer blanc, long d'environ un mètre, coudé aux deux bouts, où sont lutées deux fioles de verre *gg'* : il est monté sur un pied à trois branches BB, à l'aide d'une douille.

On remplit le tube d'eau colorée, et l'on fait en sorte que le liquide apparaisse dans les fioles vers le milieu de leur hauteur. Le bout des fioles est ouvert; mais on les étrangle pour pouvoir les boucher, quand on transporte l'instrument. On a imaginé, pour rendre ce niveau plus portatif, de faire le tube en cuivre et de le fractionner en plusieurs parties qui se vissent hermétiquement bout à bout, ainsi que les bases des fioles. On place latéralement le long de chaque fiole une petite lame verticale peinte au vernis en noir ou en rouge; cette couleur se réfléchit sur l'eau, qui en paraît teinte, et l'on ne se sert que d'eau limpide. En visant les deux surfaces liquides, on a un plan horizontal.

50. Le pointage de ces deux espèces de niveau se fait à l'aide d'une *mire* qu'on établit à la distance voulue par les localités et les circonstances. Cette mire est composée d'un *voyant abcd* (fig. 40), petite planchette ou lame de tôle, en forme de parallélogramme, en travers de laquelle on a tracé une ligne horizontale *mn*, séparant deux rectangles peints, l'un en blanc, l'autre en noir ou en rouge. Cette planchette est soutenue par une queue ou tige, qu'on tient appliquée le long d'une règle divisée ou verticale; on hausse ou baisse la planchette, selon la direction des signaux donnés par l'observateur, jusqu'à ce que la ligne *mn* de visée du voyant soit dans

le même plan horizontal que la ligne de niveau. On lit ensuite, sur la règle, la hauteur à laquelle cette ligne se trouve au-dessus du sol.

Cette mire a peu d'exactitude, mais elle suffit aux opérations grossières qu'on peut faire avec les niveaux dont on vient de parler, et qu'on ne destine qu'au travail de pavage ou de conduite des eaux. Mais quand il faut faire des nivellemens plus précis, on y emploie le niveau à bulle d'air, que nous allons décrire, et l'on doit se servir d'une mire qui présente plus d'exactitude et une manœuvre plus facile.

La *mire* (fig. 40) est composée d'une règle verticale *ef*, divisée métriquement sur une des faces, et d'un voyant *abcd* fixé au bout d'une autre règle plus étroite qui glisse avec aisance dans une rainure longitudinale pratiquée sur la première. En faisant couler cette réglette le long de la rainure, on peut élever le voyant au-dessus de l'extrémité de la règle, et en doubler ainsi la longueur. Les règles ont 2 mètres de hauteur, et la réglette est divisée en centimètres, portant ses numéros de graduation croissante de haut en bas, à commencer par 20 décimètres. On comprend que lorsque la réglette occupe toute la rainure longitudinale, la ligne de visée du voyant se trouve juste au bout de la règle, et à 2 mètres d'élévation au-dessus du sol; que si l'on fait sortir le voyant, et que la ligne de visée se trouve, par exemple, à 4 décimètres au-dessus du bout supérieur de la règle, elle est élevée au-dessus du terrain à 24 décimètres de hauteur; on lit alors ce nombre 24 sur la réglette, à la ligne *eg*, où se termine la règle. On peut même tracer sur celle-ci un vernier (n° 10) qui permette d'estimer les fractions de centimètre. Ainsi, quand la mire sera portée à une station élevée de plus de 2 mètres au-dessus du niveau, il sera bien facile de noter le chiffre qu'indique la mire. Une vis de pression P arrête la réglette sur la règle, pour donner le temps de faire la lecture du numéro.

Mais si la station est, au contraire, plus basse que 2 mètres, il faudra renverser la mire; et, faisant glisser la réglette dans sa rainure, amener le voyant dans la ligne de visée du

niveau, comme précédemment; on lira l'élévation sur l'échelle graduée que porte la règle, dont le système de numérotage tient compte de la demi-hauteur du voyant, et donne la hauteur de la ligne de visée au-dessus du sol. Rien n'est plus facile à concevoir, sans explications plus développées.

Il est inutile d'avertir que cette visée ne peut se faire quand la station de la mire est sur un point du sol plus élevé que le niveau; alors il faut la rapprocher, ou l'éloigner, ou hausser le niveau, afin que le sol de la mire soit plus bas que la ligne horizontale de visée.

En plaçant successivement la mire à deux stations, et élevant le voyant à la hauteur du plan horizontal déterminé par le niveau d'eau, la différence des élévations FD, BE (fig. 42) des voyans au-dessus du sol, est la différence de niveau des points B et F de station de la mire.

51. Le tube du *niveau à bulle d'air* CD (fig. 38) est monté sur un plan ou *patin* AB auquel son axe est exactement parallèle, ce dont on s'assure par le renversement bout pour bout : car si la bulle revient au milieu du tube, entre les mêmes points de repère, on est assuré que cet axe et le patin sont horizontaux. En plaçant ce niveau sur une règle, et calant de manière à amener la bulle au milieu, l'alignement de la règle est une droite de niveau. L'observation est rendue plus facile en posant le patin sur un pied à genou, qui peut prendre un mouvement lent de bascule, à l'aide d'une vis de rappel, et fixant aux deux bouts du patin des pinnules I et K, dont la direction est parallèle à l'axe, condition dont on s'assure aussi par le retournement. Une vis de rappel *m* sert à mouvoir lentement l'un des bouts du patin, pour amener facilement la bulle entre ses repères, position où la ligne de visée est horizontale.

Cet instrument est plus exact que le précédent, qui n'est guère en usage que pour des nivellemens peu soignés, tels que ceux que font les paveurs, les fontainiers, etc. Les visées n'y peuvent guère dépasser 30 à 40 mètres, et l'incerti-

tude de la position de la ligne qui rase les surfaces liquides des fioles, rend cette observation assez défectueuse.

52. Chézy a perfectionné le niveau à bulle d'air, en y adaptant une lunette armée d'un réticule à fils (n° 8), qui étend beaucoup la portée de la vue, et doit être toujours employée dans les nivellemens importans. La figure 41 représente cet appareil. Le tube cylindrique de la lunette HK repose sur deux collets circulaires, en haut des supports égaux A, B. Le niveau N est suspendu au tube; la règle AB bascule autour de l'axe C, quand on agit sur la vis sans fin S, laquelle engrène avec le râteau circulaire LL'. En faisant rouler la lunette sur ses collets, on voit si le fil horizontal peut recouvrir, dans deux positions, une ligne de mire fixée au loin; et l'on hausse ou l'on baisse ce fil jusqu'à ce qu'il en soit ainsi. Le fil est alors dans l'axe du tube. Il faut en outre que les axes de la lunette et du niveau soient parallèles : à cet effet, on amène la bulle d'air au milieu, par la vis S; puis enlevant la lunette de ses collets et la retournant bout pour bout, on voit si la bulle revient au milieu, car, dans ce cas, le niveau est juste, et l'on peut procéder au nivellement, ainsi qu'il a été dit ci-dessus. Dans le cas contraire, il faut ramener la bulle au milieu, moitié par la vis S, et moitié en tournant la vis *c* qui attache la lunette au niveau. On retourne encore la lunette pour faire, s'il en est besoin, une autre correction semblable; et ainsi jusqu'à ce que la bulle reste entre ses repères dans les deux situations renversées de la lunette.

53. Il est rare que les deux points du sol dont on cherche la différence de niveau soient assez rapprochés pour qu'on puisse l'obtenir par une seule station intermédiaire, comme dans le cas de la figure 42. D'ailleurs, il y a souvent des obstacles qui forcent de niveler en les évitant par des circuits. La figure 43 montre comment on dirige alors l'opération, en faisant des stations consécutives. Soient a et a' les hauteurs des voyans A et B pour une première station; $a' - a$ sera la différence des niveaux des deux sols. Soient b et b' les élévations des voyans

B et C, c et c' celles de C et D, etc... En ajoutant toutes les différences de niveau consécutives, $a'-a$, $b'-b$, $c'-c$, etc..., on a visiblement

$$x = a' + b' + c' + \ldots - (a + b + c \ldots),$$

pour la différence de niveau des deux stations extrêmes. Ainsi, *ajoutez toutes les hauteurs des voyans au-dessus du sol, les visées étant prises du côté du point de départ; faites-en autant pour celles qui sont prises du côté opposé : la différence de ces deux sommes est celle des niveaux des deux stations terminales.* Un résultat négatif annonce que l'origine est moins haute que la dernière station.

54. Mais quand les points extrêmes sont très écartés, il faut avoir égard à la rondeur de la terre. Soit MO (fig. 47) l'axe du tube du niveau placé à la station M; on fait élever une mire en un point O de cette direction; mais si cette mire est très loin, les points O et M ne sont pas de niveau, mais sur une tangente au sphéroïde terrestre, car le niveau de M est au point N du sphéroïde; ainsi il faut abaisser la mire O en N pour la ramener au niveau de la sphère passant en M. On a

$$MO^2 = ON \times (ON + 2R) = 2R \times ON = 2Rx,$$

en négligeant ON devant le diamètre 2R de la terre; on en tire l'abaissement $ON = x$ que la mire doit éprouver,

$$x = \frac{k^2}{2R} = nk^2, \ \log n = \bar{8}.8960557;$$

k exprime ici la distance MN, ou l'arc terrestre, ou sa corde, en mètres, aussi bien que x. Nous donnerons plus tard la valeur numérique du rayon R, qui a servi à déterminer le facteur n.

55. Mais ce n'est pas tout. Comme la *réfraction atmosphérique* élève en apparence les objets, la mire O qu'on a cru placée dans la ligne horizontale MO, l'a réellement été en un point i, au-dessous du véritable alignement MO. Ce genre d'erreur ne peut être négligé, surtout quand la portée de la

4..

lunette du niveau permet de viser à une grande distance; elle n'existe pas quand le niveau est placé au milieu de deux stations, ou du moins il n'y a, dans ce cas, besoin d'aucune correction, parce qu'en faisant deux pointés en sens opposés (fig. 42), les mires sont autant sur-élevées l'une que l'autre par rapport à l'horizontale du niveau, et par conséquent sont elles-mêmes de niveau, comme s'il n'y avait aucune réfraction. C'est ce qu'on a soin de faire, quand on le peut, pour diminuer le nombre des stations et éviter les corrections.

Mais quand on n'a pu suivre cette pratique, voici comment on fait subir à x la correction de réfraction. La mire, que du point M le spectateur juge en O, est réellement un peu au-dessous en i; faisons $Oi = \iota$. Il faudrait donc la relever de ι pour l'amener en O. L'abaissement qu'on doit lui faire subir n'est donc point ON, mais $iN = ON - Oi = x - \iota$, par l'effet combiné de la courbure de la terre et de la réfraction. Or, l'angle OMN étant formé par une tangente et par une corde, est $= \frac{1}{2}C$; l'angle $OMi = r = mC = 0{,}08.C$, valeur suffisamment exacte pour l'usage qu'on en va faire, attendu qu'ici k est toujours très petit : c'est du moins ce qui sera démontré plus tard (n° 257).

Les arcs de cercle décrits du centre M, avec le rayon MN, et compris dans les angles OMi, OMN, ont sensiblement leurs longueurs proportionnelles à $Oi = \iota$, et $ON = x$; et comme ces arcs mesurent les angles, on a

$$\tfrac{1}{2}C : 0{,}08.C, \quad \text{ou} \quad 0{,}50 : 0{,}08 :: x : \iota = 0{,}16x$$

l'abaissement total de la mire est donc $x - \iota = z = 0{,}84.x$;

$$z = \frac{0{,}42}{R} \cdot k^2 = Ak^2, \quad \log A = \bar{8}.8193350\,;$$

z et k sont ici exprimés en mètres. Ainsi il faudra corriger chaque élévation de la mire au-dessus du sol, relativement à celle M du niveau à bulle d'air, en la diminuant de la quantité Ak^2, pour avoir vers N le véritable point de niveau du spectateur situé en M. On trouve dans la *Topographie de*

M. Puissant une table où on lit ces corrections à vue, pour toutes les distances k. On observe que la correction ϵ due à la réfraction n'a pas de valeur sensible quand la distance k ne dépasse pas 600 mètres.

56. Montrons, par des exemples, comment on fait les opérations de nivellement.

I. *Nivellement composé.* Supposons qu'on ait fait six stations successives du niveau, en se plaçant vers le milieu de la distance entre les points où la mire était portée de proche en proche, comme on l'a représenté figure 43. A chaque station, on a donc donné deux coups de niveau, l'un en arrière, l'autre en avant; et lisant sur la mire les hauteurs correspondantes, on a trouvé

Coups d'arrière,	$3^m,428$	Coups d'avant,	$2^m,948$
	0,360		2,445
	3,688		2,202
	3,067		0,868
	1,444		1,198
	1,352		0,485
Somme.......	13,339	Somme.........	10,146
	10,146		
	3,193 = diff. de niveau.		

Ainsi le point A est au-dessus du point E de $3^m,193$. Il est clair que le point qui a la plus grande cote est le plus bas.

Il n'y a pas lieu de faire ici les corrections de réfraction, ni de courbure de la terre, puisque les stations sont conjuguées.

II. *Nivellement simple.* Par un seul coup de niveau, sur une mire placée à 1742 mètres de distance, on a trouvé que le sol y est plus élevé de $3^m,453$; on demande de corriger ce résultat de la réfraction et de la rondeur de la terre.

Log. 1742 = 3.2410482, double. . . . 6.4820964

constante A. . $\bar{8}.8193350$

$0^m,2002$. . . $\bar{1}.3014314$

ainsi il faudrait abaisser la mire de $0^m,200$, ou 2 décimètres; la différence de niveau n'est donc que de $3^m,253$.

III. Nous supposons dans le dernier exemple, que la portée de la lunette du niveau a permis de ne faire qu'une seule visée à 1742 mètres de distance; s'il n'en était pas ainsi, et que la nature du sol ne permît pas de placer le niveau au milieu des deux stations successives d'une mire qu'on promènerait de proche en proche; alors il faudrait opérer par une seule visée répétée chaque fois qu'on transporterait le niveau au point que vient d'occuper la mire. Et, comme, dans ce cas, la correction de réfraction ne serait pas nécessaire, on ne ferait que celle de la rondeur de la terre, en se servant de la valeur de n au lieu de celle de A.

57. Le *niveau de pente*, nommé aussi *Éclimètre*, n'est autre chose que celui de maçon (fig. 39), où, après avoir divisé la hauteur CI en 100 parties égales, on a porté ces divisions le long de la barre HK, de part et d'autre du milieu I. En appliquant les branches du niveau sur une règle inclinée AB, on trouve que le fil, au lieu de battre sur ce milieu I de la règle, point où est le zéro des divisions, vient battre en un autre point; l'angle que le fil-à-plomb fait avec la droite CI est visiblement celui que la règle AB fait avec l'horizon. Ainsi la distance du point I au point où bat le fil est la tangente de cet angle. On peut donc graduer la droite AB de manière à donner les diverses pentes d'un terrain. Au reste, nous indiquerons plus tard les perfectionnemens qu'on a fait subir à cet instrument. Pour faciliter l'usage du niveau à perpendicule, on peut le monter sur un pied à trois branches, à l'aide d'un genou sur lequel il puisse tourner : on adapte alors des pinnules aux extrémités A et B, afin de pointer les signaux qu'on établit au bout des pentes.

Chézy a imaginé un *éclimètre* beaucoup mieux entendu; on le trouve décrit dans la *Topographie* de M. Puissant. Nous ne nous y arrêterons pas, parce que cet instrument est rarement employé, et qu'on y supplée, comme il a été expliqué précédemment, par des opérations trigonométriques.

CHAP. IV. — ARPENTAGE.

58. La détermination de l'étendue superficielle d'un champ est facile à faire lorsqu'il est levé par le secours de l'équerre, parce qu'on connaît les bases et les hauteurs des parties élémentaires de cette surface. Quand on a fait usage du graphomètre, il faut calculer ces élémens par des résolutions de triangles. En général, ces aires sont toujours le produit de deux longueurs qu'on exprime en mètres, et le produit est des mètres carrés; pour l'énoncer en ares, il faut diviser par cent, parce que l'are vaut cent mètres; pour avoir des hectares, il faut diviser de nouveau par cent. Ainsi en reculant la virgule vers la gauche de 2 ou de 4 rangs, l'aire est exprimée en ares ou en hectares.

Par exemple, que l'aire soit le produit de 453^m par 329^m, elle sera ou 149037 mètres carrés, ou 1490,37 ares, ou 14,9037 hectares, c'est-à-dire 14 hectares 90 ares 37 centiares.

59. Toutes les fois que la figure du champ sera géométrique, ou réductible à cette forme (cercle, parallélogramme, triangle, polygone), les théorèmes connus reçoivent leur application. Mais s'il y a des limites courbes, il faut décomposer ces lignes en parties qu'on considère comme de petites droites, ce qui ramène l'aire à des formes géométriques qu'on calcule, par portions distinctes, par les procédés ordinaires. Au reste, le théorème de Simpson donne l'aire avec une plus grande approximation; voici en quoi il consiste.

Cherchons d'abord l'aire d'un petit segment CEM (fig. 44) d'une courbe quelconque rapportée aux axes rectangulaires Ax, Ay, et nommons α l'angle MCH formé par la corde CM avec Ax. Menons l'ordonnée KE par le milieu K entre les ordonnées terminales CB, MP. On peut sensiblement regarder l'arc CM comme appartenant à une parabole dont le sommet L répond au milieu I de la corde. L'aire du segment est donc $CEMI = \frac{2}{3}\ CM.LI$. Or les triangles LEI, MCH, donnent

$$LI = EI \cos\alpha,\ CM = \frac{CH}{\cos\alpha},\ \text{d'où } CEMI = \frac{2}{3} EI \times CH.$$

Cela posé, faisons $BK = KP = h$, $CB = y'$, $KE = y''$, $PM = y'''$; l'aire CBPM se compose

du trapèze $CBPM = h(y' + y''')$, et de $CEMI = \frac{4}{3}\, h.EI$.

Or $EI = EK - KI = \frac{1}{2}(2y'' - y' - y''')$; donc le segment $CEMI = \frac{2}{3}\, h\,(2y'' - y' - y''')$, et la petite aire

$$CEMPB = \tfrac{2}{3}\, h\,(\tfrac{1}{2} y' + 2y'' + \tfrac{1}{2} y''').$$

Supposons l'aire plane BACD (fig. 45) qu'on veut arpenter, limitée par la courbe AC, la droite BD et les perpendiculaires AB, CD; on coupera la base BD en *un nombre pair* de parties égales, dont h sera la longueur, et par les points de divisions on menera des ordonnées $y', y'', y''', \ldots, y^{n}$, qui couperont l'aire en élémens dont les surfaces respectives seront exprimées deux à deux par la formule ci-dessus : la 2e, la 3e, ... seront

$$\tfrac{2}{3}\, h\,(\tfrac{1}{2} y''' + 2y^{\text{iv}} + \tfrac{1}{2} y^{\text{v}}),\ \tfrac{2}{3}\, h\,(\tfrac{1}{2} y^{\text{v}} + 2y^{\text{vi}} + \tfrac{1}{2} y^{\text{vii}}),\ \text{etc.},$$

$$\text{la somme} = \tfrac{2}{3}\, h\,(\tfrac{1}{2} y' + 2y'' + y''' + 2y^{\text{iv}} + y^{\text{v}} \ldots + \tfrac{1}{2} y^{(n)}),$$

$$BACD = \tfrac{2}{3}\, h\,[\tfrac{1}{2}(y' + y^{n}) + (y'' + y''' + \ldots y^{n-1}) + (y'' + y^{\text{iv}} + y^{\text{vi}} \ldots y^{n-1})].$$

Tel est le théorème de Simpson : *l'aire formée d'un nombre pair de trapèzes rectangles et curvilignes se trouve en prenant la moitié de la somme des ordonnées extrêmes, plus la somme de toutes les coordonnées, celles-ci exceptées, plus enfin celles de toutes les ordonnées de rangs pairs; le tout multiplié par* $\frac{2}{3}$ h.

La même règle s'applique évidemment au cas où l'aire est comme ACFE terminée par deux courbes opposées, en appelant $y'\ y''\ y'''\ldots$ la longueur totale de chaque parallèle.

Plus h est petit et plus le résultat est approché de l'aire demandée. Ce théorème s'applique à toute surface irrégulière, parce qu'on peut la décomposer en d'autres qu'on évalue séparément, et qu'on ajoute ou retranche ensuite, selon les cas. Lorsqu'il arrive que la base se trouve coupée par la courbe, la même règle reçoit son application, en faisant égale à zéro l'ordonnée du point de section.

60. Lorsqu'on veut arpenter un terrain, il est utile d'en

faire lever le plan, parce qu'il est facile de faire au crayon, sur le papier, les tracés de subdivisions qui sont propres à former des aires partielles commodes à évaluer : on obtient avec le compas des longueurs approchées qu'on peut ensuite vérifier et corriger sur le terrain.

Quand le sol est en pente, on réduit les longueurs à l'horizon, comme dans le levé du plan ; parce que c'est la projection horizontale qu'il faut arpenter. En effet, il est reconnu que l'étendue productive d'un sol n'est pas le développement des accidens de la surface : la projection a, il est vrai, une aire moindre que celle qui est inclinée ; mais l'espace de terre qu'il faut pour la croissance des racines, et la masse d'air nécessaire à la végétation des plantes, réduisent l'aire inclinée à sa projection horizontale, lorsqu'on mesure les produits. D'ailleurs, si l'on accorde un faible avantage à l'aire inclinée sur sa projection, elle est plus que compensée par les difficultés de la culture, à moins que l'inclinaison du sol ne soit une des conditions de succès, comme dans le cas des terres à vignes. La *méthode de cultellation* est celle qui consiste à réduire ainsi les aires inclinées à leur projection. L'exposition faite n°s 46 et 53 contient tout ce qui est nécessaire pour ce genre de calculs.

Le plus ordinairement les champs, les bois, les parcs, sont limités par des lignes droites, et quelquefois même leur forme est celle de rectangles, de parallélogrammes, de triangles.... Nous récapitulerons les théorèmes de Géométrie qui s'appliquent à l'arpentage de ces figures.

1°. *La surface d'un rectangle ou d'un parallélogramme est le produit de sa base par sa hauteur :* on prend pour base l'un quelconque des côtés ; la hauteur est la distance de ce côté à celui qui lui est opposé, mesurée sur une perpendiculaire aux deux.

2°. Le même théorème s'applique au triangle, mais on ne prend que la moitié du produit, parce qu'*un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base et de même hauteur.*

3°. *L'aire d'un trapèze est le produit de la somme des deux côtés parallèles par la moitié de leur distance*, ou si l'on veut, *le produit de cette distance par la parallèle menée à distances égales de ces deux côtés.*

4°. *L'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en triangles par des droites menées d'un point intérieur* (comme figure 26), *ou par des diagonales menées d'un même sommet.* On cherche les aires de ces triangles et on les ajoute.

Si le polygone est régulier, sa surface $= \frac{1}{4} na^2 \cot\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, n étant le nombre des côtés, et a la longueur d'un de ces côtés.

5°. Nous avons donné (n° 36) *l'aire d'un triangle dont on a les trois côtés :* si l'on connaît deux côtés b, c et l'angle compris A, la surface $= \frac{1}{2} bc \sin A$. Enfin, lorsqu'on a un côté c et les deux angles adjacens A et B, l'aire $= \frac{1}{2} c^2 . \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)} = \frac{1}{2} c^2 . \frac{\sin A \sin B}{\sin C}$.

6°. *L'aire d'un quadrilatère* se trouve en le divisant par une diagonale en deux triangles qu'on évalue séparément : cette aire est aussi égale à la moitié du produit des deux diagonales multiplié par le sinus de l'angle qu'elles forment entre elles.

7°. *L'aire d'un cercle* de rayon R est $= \pi R^2$, π étant 3,14159 (*voy.* n° 33).

8°. *L'aire d'un secteur de cercle* dont l'arc a n degrés est $= \frac{\pi n R^2}{360}$. *Celle d'un segment* $= \frac{1}{2} R^2 \left(\frac{n\pi}{180} - \sin n\right)$.

On trouve que $\frac{\pi}{180} = 0,01745$.

9°. *L'aire d'une ellipse* dont les demi-axes sont a et b, est $= \pi ab$.

Toutes ces propositions sont démontrées dans mon *Cours de mathématiques pures*.

Lorsqu'on doit arpenter un terrain formé de diverses *parcelles* dont on veut avoir les aires séparées, comme cela arrive pour les opérations cadastrales, on évalue d'abord l'aire to-

tale des pièces réunies, puis les aires des parcelles ; et l'on examine si la somme de celles-ci reproduit l'aire totale. On estime qu'une différence en plus ou en moins de $\frac{1}{300}$, n'est pas une erreur assez grave pour nécessiter que l'opération soit recommencée. Ces évaluations se font sur le plan, à l'aide de subdivisions qu'on fait avec le crayon.

61. L'arpentage comprend aussi le mode de division des héritages dans le rapport des droits des partageans. Ce problème n'est pas sans difficultés, surtout lorsqu'il comprend des conditions particulières d'intérêt ou de localités : comme lorsqu'il s'agit de faire aboutir les sentiers de séparation à un point déterminé, tel qu'un puits commun, une porte, une voie publique, etc. ; et aussi quand le terrain a des parties irrégulières ou *coursons*, et qu'on veut que chaque partageant ait une portion de ces désavantages.

Pour résoudre cette question, on évalue l'aire totale en nombres, et l'on divise le résultat dans les rapports assignés, afin de connaître le nombre d'ares que doit avoir chacun. Puis opérant sur le plan, et par quelques essais approchés, on trace des lignes de séparation présumées : on mesure ces aires partielles, et l'on reconnaît la quantité que chacun se trouverait avoir de trop ou de moins ; on corrige ensuite ces résultats ainsi que nous allons l'exposer.

62. Supposons qu'on ait présumé que la droite EI (fig. 48) coupe le quadrilatère ABCD par moitié, et en arpentant chaque partie M et N, l'aire M surpasse N de a mètres carrés : voyons comment on devra déplacer la droite EI pour que les deux parts deviennent égales. Il faut rendre $\frac{1}{2}a$ à N aux dépens de M. On abaissera la perpendiculaire $EH = h$ sur AB, et on la mesurera : divisant l'aire $\frac{1}{2}a$ par $\frac{1}{2}h$, on portera de I en F le quotient $q = \frac{a}{h} = IF$; la droite EF coupera la figure par moitiés, puisque le triangle $EIF = \frac{1}{2}qh = \frac{1}{2}a$.

On peut encore transporter la ligne de séparation vers AD (fig. 50), de EI en FG, parallèlement à EI, en faisant en sorte que

l'aire EFGI $= \frac{1}{2} a = \text{EI} \times mn$: donc la distance $mn = \frac{a}{2\text{EI}}$.
Et si l'on veut que le sentier de séparation passe en un point donné f, on prendra $\text{F}f = \text{G}g$, et l'on menera fg, qui sera la droite demandée.

Cette solution suppose que les côtés AB, CD sont parallèles ; mais il n'en peut résulter d'erreur sensible qu'autant que ces lignes seraient très inclinées l'une sur l'autre ; et encore, dans ce cas, on accepterait cette solution comme approchée, et on la corrigerait ensuite par le même procédé. Cette méthode n'est qu'une suite d'essais ; mais elle est très courte dans la pratique, surtout pour avoir égard aux conditions particulières du partage.

On veut partager un champ de 1,0250 hectares en trois portions qui soient comme 2, 3 et 5. Par des proportions, on trouve que les parts sont 20,5 ares, 30,75 ares, et 51,25 ares. Il s'agit donc de mener à travers le champ deux droites qui le coupent en aires respectivement égales à ces nombres. Il sera facile de tirer une droite qui sépare à peu près 20 ares d'un côté, et l'on corrigera ce résultat d'après ce qu'on vient de dire, en y ajoutant 50 mètres carrés. Ensuite il faudra séparer, dans ce qui reste, 51,25 ares, par le même moyen. La 3e part devra se trouver juste de 30,75 ares. En opérant ensuite sur le terrain, on vérifiera si, en effet, les aires sont ce qu'elles doivent être, et l'on corrigera de nouveau s'il est nécessaire. Toutes ces opérations, faites d'abord au crayon sur le plan, et transportées sur le terrain, conduisent enfin à un arpentage final exact.

Supposons qu'on veuille partager le polynome (fig. 29) en deux parties égales, on commencera par en évaluer la surface totale, qui, d'après les nombres qui y sont inscrits, est de 264244, 67 mètres carrés : la moitié 132122,33 est l'aire de chacune des deux parts. On tire la droite AD qui sépare le triangle ADE ; on en cherche la surface, et l'on trouve (n° 60, 5°) qu'elle est $\frac{1}{2}.270.416$ sin 117°, c'est-à-dire 50038,93 mètres

carrés. Retranchant du nombre ci-dessus, on voit que pour compléter l'une des parts, il faut à l'aire ADE ajouter 82083,40 mètres carrés. La perpendiculaire abaissée du sommet D sur la base AB est de 459^{m}, 2; divisant le dernier nombre par 229,6, moitié de celui-ci, le quotient est 355^{m},34, longueur qu'on prendra de A en I. La droite DI sera la ligne demandée, qui coupe en deux moitiés la surface du polygone. En effet, l'aire du triangle ADI est de $229,6 \times 355,34 = 82083,4$; celle du triangle ADE $= 50038,93$; et ces deux aires réunies valent 132122,33 mètres carrés, moitié de la surface totale du polygone.

Observez que 1° si le contour AED, au lieu d'être composé de deux droites, l'eût été par des parties courbes et irrégulières, on aurait pu employer le même procédé, seulement il eût été plus difficile de trouver l'aire ADE, et il aurait fallu recourir à la méthode de Simpson (n° 59).

2°. Si l'on exige que la ligne droite de séparation des deux parts, au lieu d'être DI, vienne aboutir en un point donné L, il restera encore à trouver, par le procédé indiqué ci-devant la direction de la ligne KL qui satisfait à cette condition.

LIVRE II.

GÉOMORPHIE.

La Géomorphie, plus communément appelée Géodésie, est la science qui traite de la mesure de la terre et de ses grandes divisions territoriales. Les moyens qu'elle emploie sont fondés sur des calculs et des observations. Il est donc nécessaire avant tout de connaître les instrumens dont on se sert et les théories qu'on applique aux résultats observés.

Nous avons dû commencer par exposer les méthodes algébriques connues sous le titre de *Trigonométrie sphérique* qui sont d'un usage perpétuel dans cette science, et une description succinte des deux instrumens qu'on emploie généralement pour les observations.

Deux espèces de procédés sont usités en Géomorphie : tantôt on mesure, on calcule des distances, et des angles tracés sur la surface terrestre; tantôt on observe les astres, pour coordonner entre elles les diverses stations. De là les deux grandes divisions que nous adopterons; l'une sera la *Géomorphie terrestre*, l'autre la *Géomorphie astronomique*.

Les opérations terrestres consistent à couvrir le sol entier qu'on explore d'un réseau de triangles, dont on mesure les angles avec un instrument, et dont on calcule les côtés, à l'aide de la longueur de l'un d'eux pris pour *base*, et mesuré directement. On en conclut ensuite l'étendue des arcs

terrestres qui traversent ces triangles, tels que la *méridienne* et sa *perpendiculaire*. Ces arcs servent ensuite à déterminer la forme ellipsoïdale du globe terrestre, ses dimensions, son aplatissement, etc.

Les opérations astronomiques servent à trouver les *longitudes* et les *latitudes* des stations, les *azimuts* des côtés des triangles, la déclinaison de l'aiguille aimantée, etc.

Plusieurs autres sujets seront encore traités, parce qu'ils se rapportent immédiatement aux théories géodésiques.

1°. Les oscillations du *pendule* fournissent des données très utiles pour obtenir l'aplatissement du globe terrestre; il convient donc d'examiner cette théorie.

2°. Les élévations des lieux où l'on établit des stations géodésiques, sont des élémens importans à connaître; nous ferons l'exposition des méthodes de *nivellement*.

3°. Le géographe ne se contente pas des évaluations numériques auxquelles le calcul le conduit dans la détermination des côtés de ses triangles; il veut encore représenter ces résultats par des figures, c'est-à-dire, en composer une *carte géographique*, qui permette à l'œil d'en embrasser l'ensemble et d'en comparer les détails. L'art de construire ces sortes de perspectives sera l'un des sujets de notre analyse.

Tel est le plan que nous nous proposons de suivre dans la composition de ce livre.

CHAP. I. — TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

Notions fondamentales.

63. Trois plans MON, NOP, MOP (fig. 51) qui se coupent dans l'espace en un point O forment un *trièdre ;* une sphère quelconque qui a son centre en ce point O, est coupée par ces plans selon trois arcs de grands cercles CA, CB, AB, qui composent un triangle sphérique ACB. Les angles plans du trièdre O sont respectivement mesurés par les côtés ou arcs

de ce triangle, savoir, l'angle NOM par AB, MOP par AC, et NOP par BC. Un angle C du triangle est mesuré par celui que forment deux tangentes en C aux arcs contigus AC, BC; ces tangentes situées dans les plans de ces arcs, mesurent l'angle dièdre de ces mêmes plans, c'est-à-dire l'angle NOPM, parce que ces tangentes étant perpendiculaires à OC, déterminent un plan perpendiculaire à ce rayon, qui est l'intersection des deux plans NOP, POM : ainsi, l'angle C, celui que font ces tangentes, mesure l'inclinaison de ces plans l'un sur l'autre.

Donc *les angles plans du trièdre* O *sont mesurés respectivement par les côtés du triangle sphérique* ABC, *et les inclinaisons des faces le sont par les angles respectifs de ce triangle.*

Étant données quelques parties d'un trièdre, si l'on se propose de trouver les autres, le problème revient à déterminer certains élémens d'un triangle sphérique, lorsqu'on connaît les autres. *Il y a six parties, trois angles* A, B, C, *et les trois côtés respectivement opposés* a, b, c, ou, si l'on veut, *trois angles dièdres* A, B, C *et les trois angles plans opposés* a, b, c. Nous verrons bientôt que quand on connaît trois de ces six élémens, on peut toujours trouver les trois autres.

D'après, cela, que, d'un point O, on dirige des rayons visuels à trois points M, N, P de l'espace, tels que des étoiles, des signaux, etc.; ces lignes sont les arètes d'un trièdre O, dont les élémens constituans sont ceux d'un triangle sphérique ABC. Ce triangle est formé par les sections des faces de ce trièdre avec la surface d'une sphère de rayon arbitraire, dont le centre est placé à l'œil du spectateur.

64. Ces principes servent à démontrer les théorèmes suivans :

1°. Tout angle plan d'un trièdre étant nécessairement moindre que deux droits, *chaque côté de tout triangle sphérique est* $< 180°$; *chaque angle du triangle est aussi plus petit que deux droits* (c'est ce qui résulte aussi du triangle polaire (*voy*. n° 65 ci-après).

Toutes les fois qu'un calcul conduira à trouver un arc $> 180°$ pour valeur de l'un des élémens de triangle sphéri-

que, cette solution devra être rejetée comme impossible, ou du moins remplacée par le supplément de cet arc : et les cosinus, sinus, tangentes, etc., ne peuvent appartenir qu'à un arc moindre que la demi-circonférence.

2°. Puisque la somme des angles plans de tout angle polyèdre est toujours moindre que quatre droits, *la somme des trois côtés de tout triangle sphérique est* $< 360°$. L'angle trièdre d'un cube étant formé de trois angles plans qui sont droits, on voit que chacun des côtés d'un triangle sphérique peut être de 90°, et évidemment il peut aussi surpasser 90°.

3°. *Deux triangles sphériques sont égaux lorsque leurs trois angles, ou leurs trois côtés, ou deux côtés et l'angle compris, ou deux angles et le côté adjacent, sont respectivement égaux chacun à chacun.* On suppose les rayons des sphères égaux, et ces théorèmes se démontrent, ainsi que les deux suivans, par les mêmes procédés que pour les triangles rectilignes.

4°. *Dans un triangle sphérique isoscèle, l'arc abaissé du sommet perpendiculairement sur la base, divise par moitiés cette base et l'angle du sommet : les angles égaux sont opposés aux côtés égaux, et réciproquement.*

5°. *Dans tout triangle sphérique, le plus grand angle est toujours opposé au plus grand côté, le moyen l'est au moyen, le moindre au plus petit.*

6°. *Un côté est toujours moindre que la somme des deux autres, et plus grand que leur différence.* En effet, la somme des deux angles plans d'un trièdre surpasse le 3e, d'où $a < b + c$, $b < a + c$; donc $a > b - c$. Donc aussi *la demi-somme des trois côtés d'un triangle sphérique, surpasse toujours un quelconque de ses côtés;* car en remplaçant $b + c$ par $a + i$, $a + b + c$ devient $= 2a + i$; ainsi le demi-périmètre est $= a + \frac{1}{2} i > a$.

65. Coupons notre trièdre O par trois plans respectivement perpendiculaires aux arêtes; ces plans détermineront un second trièdre O′ (fig. 48) opposé au premier : il s'agit de

prouver que *les angles plans de l'un de ces trièdres sont supplémens des angles dièdres de l'autre, et réciproquement.*

En effet, l'une des faces du trièdre proposé O, étant MON, menons, en des points quelconques N, M, sur les arètes OM, ON, deux plans perpendiculaires à ces droites, et par suite aux faces MON, MOP d'une part, MON, NOP de l'autre; les angles M et N du quadrilatère OMP'N sont droits; l'angle P' est donc supplément de MON. Mais ces deux plans coupans sont des faces du nouveau trièdre O', et se coupent suivant la droite O'P', arète de ce corps. L'angle dièdre formé par ces plans est visiblement mesuré par l'angle MP'N, puisque le plan de cet angle est perpendiculaire à ces deux faces. Donc l'angle plan MON du premier est supplément de l'angle dièdre P' du second. Il en faut dire antant des deux autres faces MOP, NOP, qui sont supplémens des angles MN P, NM'P. Les angles plans du trièdre O sont donc respectivement les supplémens des angles dièdres du trièdre opposé O'.

Réciproquement, les angles plans du trièdre O' sont les supplémens des angles dièdres du trièdre O, par la même raison.

On conclut de là qu'en imaginant deux sphères de même rayon, dont les centres sont aux sommets O et O', formant deux triangles sphériques ABC, A'B'C', les côtés de l'un de ces triangles sont les supplémens des angles de l'autre, et réciproquement. L'un des trièdres ou des triangles est appelé *polaire* ou *supplémentaire* de l'autre.

66. Étant donné un triangle sphérique dont A, B, C, (fig. 48) sont les angles, et a, b, c, les côtés respectivement opposés, on peut toujours en construire un autre dont A', B', C', sont les angles, a', b', c', les côtés, tel que A, B, C soient les supplémens respectifs de a', b', c', et a, b, c supplémens de A', B', C', savoir :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} a = 180^\circ - A', \\ b = 180^\circ - B', \\ c = 180^\circ - C', \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} A = 180^\circ - a', \\ B = 180^\circ - b', \\ C = 180^\circ - c'. \end{array}\right\} \quad (2)$$

On voit en outre que *la somme des trois angles de tout triangle sphérique, est toujours comprise entre deux et six droits*. En effet, d'une part chaque angle étant moindre que deux droits, $A + B + C < 6$ droits ; et d'une autre part, en ajoutant les trois équations (2) on a

$$A + B + C = 6 \text{ droits} - (a' + b' + c');$$

et comme on a vu que $a' + b' + c' < 4$ droits (n° 64, 2°), on voit que $A + B + C > 2$ droits.

Les équations (1) et (2) sont fort utiles, car elles réduisent à trois les six problèmes de la trigonométrie sphérique, qui consistent à trouver trois des six élémens d'un triangle, lorsqu'on connaît les autres. Supposons par exemple, qu'on sache trouver les trois angles A, B, C, quand on connaît les trois côtés a, b, c : réciproquement, si l'on donne les trois angles A, B, C, pour trouver un côté a, on substituera au triangle son supplémentaire A'B'C', dont on connaît les trois côtés a', b', c', par les équations (2) ; et lorsqu'on aura trouvé l'un A' des angles, l'équation (1) donnera le côté opposé $a = 180° - A'$. En sorte qu'il suffit de savoir résoudre un triangle dont on connaît les trois côtés, pour savoir aussi résoudre celui dont on a les trois angles ; et ainsi des autres cas. C'est ce qui s'éclaircira mieux par la suite.

67. Si l'on coupe le trièdre O (fig. 49) par un plan pmn perpendiculaire à une arête OA, en un point m tel que $Om = 1$, on a

$$mn = \text{tang } c, \quad On = \text{séc } c, \quad mp = \text{tang } b, \quad Op = \text{séc } b.$$

Or les triangles rectilignes mnp, npO donnent (éq. 25 p. 38)

$$np^2 = mn^2 + pm^2 - 2mn.pm.\cos A,$$
$$np^2 = nO^2 + pO^2 - 2nO.pO.\cos a;$$

retranchant la 1re de la 2e, il vient, à cause des triangles nmO, pmO, rectangles en m, et de $Om = 1$,

$$0 = 1 + 1 - 2 \text{ séc } c.\text{séc } b.\cos a + 2 \text{ tang } c.\text{tang } b.\cos A;$$

et mettant $\frac{1}{\cos}$ pour séc, et $\frac{\sin}{\cos}$ pour tang,

$$0 = 1 - \frac{\cos a}{\cos c.\cos b} + \frac{\sin c.\sin b.\cos A}{\cos c.\cos b};$$

ce qui conduit à l'*équation fondamentale*

$$\cos a = \cos b.\cos c + \sin b.\sin c.\cos A \ldots \quad (3)$$

On aurait de même

$$\left.\begin{array}{l}\cos b = \cos a.\cos c + \sin a.\sin c.\cos B,\\ \cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos C.\end{array}\right\}\ldots \quad (4)$$

68. On tire de l'équation (3)

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

d'où $1 - \cos^2 A = \sin^2 A = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b.\cos c}{\sin b.\sin c}\right)^2;$

réduisant le 2ᵉ membre au même dénominateur, et remplaçant $\sin^2$ par $1 - \cos^2$,

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a.\cos b.\cos c}{\sin^2 b.\sin^2 c}.$$

Prenons la racine carrée, et divisons les deux membres par $\sin a$, nous voyons que le 2ᵉ membre est une fonction symétrique de a,b,c, que nous nommerons M, savoir $\frac{\sin A}{\sin a} = M$. Changeant, dans cette équation A et a, en B et b, en C et c, comme M reste constant, on en tire cette équation

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.

69. Pour éliminer b de l'équation (3), mettons pour $\cos b$ sa valeur (4), et $\frac{\sin B \sin a}{\sin A}$ pour $\sin b$; il vient

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \frac{\sin a \sin c \sin B \cos A}{\sin A};$$

mais $\cos^2 c = 1 - \sin^2 c$; donc en divisant tout par $\sin a \sin c$,

$$\sin c \cot a = \cos c \cos B + \sin B \cot A \ldots . \quad (6)$$

En appliquant à l'équation (3) la propriété du triangle supplémentaire (équations 1 et 2), c'est-à-dire, changeant a en $180° - A$, A en $180° - a$, etc., nous avons

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a \ldots . \quad (7)$$

Ces théorèmes suffisent à la résolution de tous les triangles sphériques, ainsi qu'on le verra par les développemens que nous allons donner ; mais il y a encore une équation générale qu'on emploie quelquefois.

Éliminons $\cos c$ entre les équations (4) ; à cause de...... $\cos^2 a = 1 - \sin^2 a$, et en divisant tout par $\sin a$, on trouve

$$\sin a \cos b = \sin b \cos a \cos C + \sin c \cos B \ldots . \quad (8)$$

70. Nous devons encore ajouter que dans les équations générales entre certains élémens d'un triangle sphérique quelconque ABC, on peut changer a et A en b et B, ou bien en c et C, et réciproquement : en sorte que nos équations (6, 7 et 8) en représentent chacune trois, comme l'équation (3) en a donné deux autres (4). On a par exemple :

$$\sin c \cot b = \cos c \cos A + \sin A \cot B \ldots . \quad (9)$$

$$-\cos B = \cos A \cos C - \sin A \sin C \cos b. \quad (10)$$

$$\sin c \cos b = \sin b \cos c \cos A + \sin a \cos B. \quad \text{etc.}$$

Triangles sphériques rectangles.

71. Désignons l'angle droit par A, et l'hypoténuse par a (fig. 52) ; faisons donc $A = 90°$ dans les équations (3, 5, 6, 7, 9 et 10) :

$$\cos a = \cos b \cos c \ldots . \quad (m)$$

$$\sin b = \sin a \sin B \ldots . \quad (n)$$

$$\tan c = \tan a \cos B \ldots . \quad (p)$$

$$\cos a = \cot B \cot C \ldots . \quad (q)$$

$$\cot B = \cot b \sin c \ldots . \quad (r)$$

$$\cos B = \sin C \cos b \ldots . \quad (s)$$

Ces six équations sont propres au calcul logarithmique, et suffisent à la résolution de tout triangle rectangle : ***Des cinq élémens* a, b, c, B *et* C, *deux étant donnés, on peut toujours*** *trouver les trois autres.* Ainsi la question est posée entre trois élémens dont un seul est inconnu. On dénommera les angles du triangle par A, B, C, l'angle droit étant A, et l'on cherchera celle de ces six équations qui comprend les trois élémens dont il s'agit : mais pour trouver cette équation, il pourra arriver qu'on soit obligé de changer de place les lettres B et C dans la figure. Suivant les divers cas qui se présentent, on choisit les équations qui contiennent les trois élémens compris dans le problème.

L'hypoténuse a, { et deux angles B, C .... prenez l'équation (q)
{ un angle B et le côté { opposé b........................ (n)
{ adjacent c........................ (p)
{ les trois côtés a, b, c, ... (m)

Un côté b de l'angle droit et les angles B, C......... (s)

Deux côtés b, c de l'angle droit et un angle B...... (r)

72. Le fréquent usage qu'on fait de ces équations exige qu'on les ait sans cesse présentes à la mémoire, chose que le défaut de symétrie rend assez difficile. Mauduit a indiqué un moyen empirique de les retrouver, qui consiste à lire, sur la figure, les cinq élémens du triangle rectangle dans l'ordre où ils sont, en faisant le tour, et à observer que les trois élémens entre lesquels on cherche une relation, sont *contigus* ou *alternatifs;* et il est de fait qu'on a toujours

cos. arc intermédiaire = *produit* { *des sin. d'arcs* ALTERNES,
{ *des cot. d'arcs* CONTIGUS.

Seulement, en appliquant ce théorème, il faut *remplacer les deux côtés de l'angle droit par leur complément*, c'est-à-dire leurs sin. par cos., leurs tang. par cot., etc. On peut, en effet, vérifier que ces deux propositions reproduisent exactement nos six équations.

1°. De l'équation (*m*), on conclut que *le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés;* ainsi l'un des trois côtés est $<$ ou $>$ 90°, selon que

les deux autres côtés sont d'espèces semblables ou différentes, car les cosinus d'arcs $>$ 90° sont négatifs.

2°. L'équation (q) montre que si l'on compare l'hypoténuse aux deux angles adjacens B et C, l'un de ces trois arcs est $>$ ou $<$ 90°, selon que les deux autres arcs sont d'espèces semblables ou différentes.

3°. Les équations (r ou s) prouvent que chacun des angles B et C est toujours de même espèce que le côté opposé.

4°. De même, l'équation (p) montre que l'hypoténuse et un côté sont de même espèce, quand l'angle compris est $<$ 90°, et d'espèces différentes quand cet angle est $>$ 90°.

Nous entendons par arcs de même espèce ceux qui sont ensemble soit $<$, soit $>$ 90°; et d'espèces différentes, quand l'un de ces arcs est $<$ et l'autre $>$ 90°.

5°. Enfin, si le côté b de l'angle droit $=$ 90°, on aura $\cos b = 0$, et (d'après les équations m et s) $\cos a = 0$, $\cos B = 0$: les côtés CA, CB sont donc chacun de 90°, et perpendiculaires sur AB; le triangle est isoscèle birectangle; C est le *pôle* de l'arc AB (fig. 52), c'est-à-dire que C est distant de 90° de tous les points de cet arc.

73. Quoique nos équations résolvent tous les triangles sphériques rectangles, il convient de remarquer qu'elles ne donneraient pas les valeurs des inconnues avec précision, si ces arcs étaient très petits et exprimés par des cos., ou voisins de 90° et donnés par des sinus. Voici comment on doit opérer dans ces cas.

1°. On a (éq. 8, p. 35) $\quad \text{tang}^2 \frac{1}{2} x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$;

si l'on demande l'hypoténuse a, connaissant B et C, l'équation (q) devient

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2} a = \frac{1 - \cot B \cot C}{1 + \cot B \cot C} = \frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C}{\sin B \sin C + \cos B \cos C}$$

$$\text{tang}^2 \frac{1}{2} a = -\frac{\cos(B + C)}{\cos(B - C)} \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

on voit par cette équation que la somme des deux angles B et C est $> 90°$, puisque le second membre est négatif, et doit devenir positif.

2°. De même pour obtenir un côté b de l'angle droit, connaissant les angles B et C, l'équation (s) donne $\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}$;

on pose $z = 90° - B$, d'où $\cos B = \sin z$, et $\cos b = \frac{\sin z}{\sin C}$: ainsi l'on a (éq. 15, p. 35)

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} b = \frac{\sin C - \sin z}{\sin C + \sin z} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (C - z)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (C + z)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} b = \sqrt{\{\operatorname{tang}[\tfrac{1}{2}(B - C) + 45°] . \operatorname{tang}[\tfrac{1}{2}(B + C) - 45°]\}}.$$

3°. Connaissant l'hypoténuse a et un côté c, pour trouver l'angle adjacent B, l'équation (p) donne

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \operatorname{tang} c \cot a}{1 + \operatorname{tang} c \cot a} = \frac{\cos c \sin a - \sin c \cos a}{\cos c \sin a + \sin c \cos a},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} B = \sqrt{\left[\frac{\sin (a - c)}{\sin (a + c)}\right]} \ldots \ldots \quad (12)$$

On remarquera que les sinus de $a - c$ et $a + c$ doivent avoir le même signe, pour éviter les imaginaires; donc si $a + c > 180°$, l'hypoténuse a doit être $< c$. On voit donc que quand le triangle a des angles obtus, l'hypoténuse a n'est pas le plus grand côté. C'est au reste ce que la fig. 55 mettra en évidence (n° 87).

4°. L'équation (m) donne $\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}$, d'où

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} c = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a + b) . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} (a - b) . \; . \; . \quad (13)$$

5°. Enfin, si l'on cherche un côté b, connaissant l'angle opposé B et l'hypoténuse a, au lieu d'employer l'équatiou (n) quand b est voisin de 90°, posez

$$b = 90° - 2x, \quad \operatorname{tang} x = \sin a \sin B;$$

l'équation (n) revient à $\cos 2z = \tang x$, d'où

$$\tang^2 z = \frac{1 - \tang x}{1 + \tang x} = \tang(45^\circ - x);$$

ainsi $$\tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) = \sqrt{\tang(45^\circ - x)}. \quad . \quad . \quad (14)$$

L'arc x étant calculé par l'équation $\tang x = \sin a \sin B$, cette dernière donnera b.

74. Nous donnerons ici les cinq élémens constitutifs d'un triangle sphérique rectangle, afin qu'on puisse s'exercer à l'application numérique des formules, en prenant, à volonté, deux de ces élémens, et calculant les trois autres.

Triangle rectangle d'épreuve.

ÉLÉMENS.	LOG. SINUS.	LOG. COSINUS.	LOG. TANG.
$a = 71^\circ 24' 30''$	$\bar{1}.9767235$	$\bar{1}.5035475$ +	0.4731759 +
$b = 140.52.40$	$\bar{1}.8000134$	$\bar{1}.8897507$ —	$\bar{1}.9102626$ —
$c = 114.15.54$	$\bar{1}.9598303$	$\bar{1}.6137969$ —	0.3460333 —
$B = 138.15.45$	$\bar{1}.8232909$	$\bar{1}.8728568$ —	$\bar{1}.9504341$ —
$C = 105.52.39$	$\bar{1}.9831068$	$\bar{1}.4370867$ —	0.5460201 —

75. Le signe — qui suit plusieurs de ces logarithmes est destiné à indiquer que le facteur qui s'y rapporte est négatif; ce qu'il ne faut pas confondre avec les — qu'on place à gauche des logarithmes, quand on veut écrire qu'il faut les soustraire, ce qui arrive dans le cas d'une division. Selon que le nombre des facteurs négatifs d'une formule est pair ou impair, le produit a le signe + ou —, circonstance qu'il faut noter avec soin; car, par exemple, $\tang a$ donne pour a un arc $a < 90^\circ$, quand cette tangente est positive, et le supplément de cette valeur quand la tangente est négative.

Quant au $\bar{1}$ qui est l'entier de plusieurs logarithmes, cette notation indique que, le rayon étant pris $= 1$, dans nos équations, comme il faut retrancher 10 de toutes les caractéristi-

ques des tables, la caractéristique du logarithme dont il s'agit est réduite à -1, valeur négative qui accompagne une fraction décimale positive. Nous jugeons plus commode de nous servir, par la suite, de ces caractéristiques négatives, que des logarithmes totalement négatifs, lesquels appartiennent à des facteurs < 1 ; et nous laissons $R = 1$, au lieu de corriger les formules générales pour les approprier au cas où le rayon est $R = 10$. Du reste, ces parties entières négatives se comportent dans les calculs comme toutes les quantités soustractives. (*Voy.* mon *Cours de Mathématiques pures*, T. 1, p. 120.)

Triangles sphériques obliquangles.

76. Passons en revue tous les cas qui peuvent se présenter (fig. 53).

1er CAS. *Étant donnés les trois côtés* a, b, c, *trouver l'angle A?*

L'équation (3), p. 63, en substituant $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} A$ pour $\cos A$ (éq. 6, p. 35) devient

$$\cos a = \cos(b - c) - 2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A. \quad (15)$$

Cette équation est d'un fréquent usage. On en tire

$$2 \sin b \sin c \sin^2 \tfrac{1}{2} A = \cos(b - c) - \cos a;$$

et à cause de l'équation (12), p. 35 (*)

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin \frac{1}{2}(a + b - c) \cdot \sin \frac{1}{2}(a + c - b)}{\sin b \cdot \sin c},$$

Cette équation, propre au calcul des logarithmes, fait connaître l'angle A. Elle devient plus symétrique, en posant

$$2p = a + b + c;$$

d'où
$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{\sin(p - b) \cdot \sin(p - c)}{\sin b \cdot \sin c} \ldots \quad (16)$$

(*) Comme le premier membre est essentiellement positif ; ainsi que $\sin b$ et $\sin c$ (attendu que b et c sont $< 180°$), on voit qu'il faut qu'on ait à la fois $c < b + a$, et $c > b - a$, puisque les relations contraires sont visiblement absurdes ; on retrouve donc ici le théorème 6e, page 65.

De même, en mettant dans l'équation (3), $2\cos^2\frac{1}{2}A - 1$ pour $\cos A$, on a

$$\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{\sin p.\sin(p-a)}{\sin b.\sin c} \dots \quad (17)$$

Enfin, en divisant la première de ces équations par la seconde,

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}A = \frac{\sin(p-b).\sin(p-c)}{\sin p.\sin(p-a)} \dots \quad (18)$$

L'une quelconque de ces trois équations résout la question.

77. 2ᵉ CAS. *Étant donnés les trois angles* A, B, C, *trouver le côté* a?

La propriété du triangle supplémentaire (p 66), appliquée aux équations précédentes, par la substitution des valeurs, et posant

$$2P = A + B + C,$$

donne
$$\sin^2\frac{1}{2}a = -\frac{\cos P.\cos(P-A)}{\sin B.\sin C},$$

$$\cos^2\frac{1}{2}a = \frac{\cos(P-B).\cos(P-C)}{\sin B.\sin C},$$

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}a = -\frac{\cos P.\cos(P-A)}{\cos(P-B).\cos(P-C)}.$$

78. 3ᵉ CAS. *Étant donnés deux côtés* a *et* b, *et l'angle compris* C, *trouver le troisième côté?*

L'équation (4, p. 68) peut être employée sous cette forme

$$\cos c = \cos a \cos b\,(1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \cos C).$$

Cette formule se prête mal au calcul logarithmique, ainsi que la suivante; mais nous reviendrons sur ce sujet.

79. 4ᵉ CAS. *Étant donnés deux angles* C *et* B, *et le côté adjacent* a, *trouver le troisième angle* A?

L'équation (7), p. 69, donne

$$\cos A = \cos B \cos C\,(\operatorname{tang} B \operatorname{tang} C \cos a - 1).$$

80. 5ᵉ CAS. *De deux côtés et les angles opposés, connaissant trois élémens, trouver le quatrième?*

Il faut recourir à la *règle des quatre* sinus (éq. 5), p. 68.

81. Excepté lorsqu'on connaît les trois côtés ou les trois angles d'un triangle, tout problème de trigonométrie sphérique comprend au rang des données un angle et un côté adjacent, outre un troisième élément : dans ce qui suit, nous désignerons toujours cet angle par A, et ce côté par b. Abaissons de l'un des angles C (fig. 53) un arc CD perpendiculaire sur le côté c : ce côté c sera coupé en deux segmens φ et φ', et l'angle C en deux angles θ et θ', savoir :

$$c = \varphi + \varphi', \quad C = \theta + \theta'.$$

Bien entendu que *l'une de ces parties sera négative dans chaque équation, si l'arc perpendiculaire tombe hors du triangle, cas qui se présente lorsque l'un des angles A et B de la base est aigu et l'autre obtus : cet arc tombe, au contraire, au dedans du triangle quand ces deux angles sont de même espèce.* En effet, des deux triangles rectangles ACD, BCD, tirons les valeurs de l'arc perpendiculaire CD, par l'équation (r), p. 69,

$$\text{tang CD} = \text{tang A} \sin \varphi = \text{tang B} \sin \varphi'.$$

Si les angles A et B sont de même espèce, leurs tangentes ont même signe ; $\sin \varphi$ et $\sin \varphi'$ sont donc dans le même cas : mais quand A et B sont d'espèces différentes, leurs tangentes, et par suite $\sin \varphi$ et $\sin \varphi'$ doivent avoir des signes contraires ; alors l'arc perpendiculaire CD tombe hors du triangle, et l'un des segmens φ et φ' a seul le signe $-$.

82. Dans la figure 53, on voit que le triangle ABC est décomposé en deux, ACD, BCD, qu'on peut traiter séparément, et dont la résolution fait connaître les élémens non donnés, à l'aide de ceux qui le sont. Ce procédé conduit à des équations simples, auxquelles le calcul des logarithmes s'applique facilement. C'est ce que nous allons montrer.

On résout d'abord les triangles ACD, BCD, pour en tirer l'une des parties φ ou θ, du côté c ou de l'angle C, en supposant connus l'angle A et le côté adjacent b. Les équations

(p et q) p. 69, conduisent aux équations (1 et 2). Puis tirant de chacun de ces triangles les valeurs de l'arc perpendiculaire CD, et égalant ces valeurs, on obtient les équations (5, 6, 7 et 8), lesquelles viennent respectivement des équations (m, s, r et p).

$$\text{Tang}\,\varphi = \text{tang}\,b\cos A, \ldots (1) \qquad \cot\theta = \cos b\,\text{tang}\,A, \ldots (2)$$

$$c = \varphi + \varphi', \ldots\ldots\ldots (3) \qquad G = \theta + \theta', \ldots\ldots\ldots (4)$$

$$\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos\varphi'}{\cos\varphi}, \ldots\ldots\ldots (5) \qquad \frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta'}, \ldots\ldots (6)$$

$$\frac{\text{tang}\,A}{\text{tang}\,B} = \frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi}, \ldots\ldots\ldots (7) \qquad \frac{\text{tang}\,a}{\text{tang}\,b} = \frac{\cos\theta}{\cos\theta'}, \ldots\ldots (8)$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

83. Voici les divers cas qui peuvent se présenter, et la manière de les traiter par ces équations, en ayant soin d'ailleurs d'avoir égard aux signes des cos. et des tang., signes qui sont positifs ou négatifs, selon que ces lignes appartiennent à des arcs $<$ ou $> 90°$.

Outre les données A *et* b, on a encore un 3ᵉ élément.

1°. Si l'on connaît c (*deux côtés* b *et* c, *et l'angle compris* A), l'équation (1) donne φ, (3) donne (φ'), et ces arcs peuvent recevoir le signe — ; (5) donne a; (7), B; enfin (9), C, dont l'espèce est d'ailleurs connue (n° 81).

2°. Si l'on a C (*deux angles* A *et* C, *et le côté adjacent* b), l'équation (2) donne θ; (4), θ', qui peut être négatif; (6), B; (8), a; (9), c, qui est d'espèce connue.

3°. Quand on connaît a (*deux côtés* a *et* b, *et l'angle opposé* A) l'équation (1) donne φ; (5), φ'; (3), c; (7 et 9), B et C.

Ou bien, (2) donne θ; (8), θ'; (4), c; (6 et 9), B et c.

Dans ce cas, le problème a en général deux solutions; car φ' ou θ' étant calculé par un cosinus, l'arc a le double signe $\pm$; c et C ont donc deux valeurs, à moins qu'on ne soit conduit à en rejeter une comme négative, ou $> 180°$. Les équations (6 et 7) donnent φ' et θ' par leurs sinus et il en résulte deux valeurs de B; de même pour C et c.

4°. Quand on connaît B (*deux angles* A *et* B, et le côté opposé b) l'équation (2) donne θ ; (6), θ' ; (4), C ; (8 et 9), a et c.
Ou bien (1) donne φ ; (7), φ' ; (3), c ; (5 et 9), a et C.

Il existe encore ici deux solutions; car φ' ou θ' étant donné par un sinus, l'arc a deux valeurs supplémentaires; ainsi c dans l'équation (3), et a dans l'équation (8), reçoivent deux valeurs : de même pour a et c dans (5 et 4), etc.

Observez que dans chacun des quatre cas que nous venons d'analyser, on ne se sert que des équations marquées de numéros soit pairs, soit impairs; et lorsqu'on a le choix des deux systèmes, on préfère celui qui conduit à des calculs plus simples ou plus précis.

84. Voici plusieurs conséquences importantes (fig. 53).

1°. L'équation (5) donne $\dfrac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a} = \dfrac{\cos \varphi - \cos \varphi'}{\cos \varphi + \cos \varphi'}$;

et en vertu des éq. 11 et 12, p. 35, comme $c = \varphi + \varphi'$, on a

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \tang \tfrac{1}{2}(a + b) . \tang \tfrac{1}{2}(a - b) . \cot \tfrac{1}{2} c \ldots (10)$$

Connaissant les trois côtés a, b, c, d'un triangle, cette équation fait connaître la demi-différence des segmens φ et φ', et par suite ces segmens mêmes, puisque $\frac{1}{2} c$ est leur demi-somme. En résolvant les triangles rectangles ACD, BCD, on obtient les angles A et B, savoir :

$$\cos A = \tang \varphi \cot b, \quad \cos B = \tang \varphi' \cot a \ldots (11)$$

2°. L'équation (7) donne de même (*voy.* éq. 14 et 15, p. 35)

$$\frac{\tang A - \tang B}{\tang A + \tang B} = \frac{\sin \varphi' - \sin \varphi}{\sin \varphi' + \sin \varphi} = \frac{\tang \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)}{\tang \frac{1}{2}(\varphi' + \varphi)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi) = \frac{\sin (A - B)}{\sin (A + B)} . \tang \tfrac{1}{2} c \ldots\ldots (12)$$

Quand on connaît deux angles A, B *et le côté adjacent* c, cette équation donne φ et φ' (fig. 53); les équations (11) déterminent ensuite a et b.

3°. L'équation (6) donne, en opérant de la même manière,

$$\tang \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \tang \tfrac{1}{2}(A + B) . \tang \tfrac{1}{2}(A - B) . \tang \tfrac{1}{2} C \ldots (13)$$

Lorsque les trois angles A, B, C, *sont donnés*, cette équation

fait connaître θ et θ'; on a ensuite les côtés a et b, en résolvant les triangles ACD, BCD:

$$\cos b = \cot\theta \cot A,\quad \cos a = \cot\theta' \cot B \ \ldots \quad (14)$$

4°. Enfin, l'équation (8) donne de même,

$$\tang \tfrac{1}{2}(\theta' - \theta) = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}.\cot \tfrac{1}{2} C \ldots \quad (15)$$

Connaissant deux côtés a, b, *et l'angle compris* C, on obtiendra θ et θ', puis A et B par les équations (14).

85. Les équations que nous venons d'établir servent à démontrer les théorèmes connus sous le nom d'*analogies de Néper*. Égalons les valeurs (10) et (12) de $\tang \frac{1}{2}(\varphi' - \varphi)$; nous aurons, à cause de $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,

$$\tang \tfrac{1}{2}(a+b).\tang \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B).\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B).\cos\frac{1}{2}(A+B)}.\tang^2 \tfrac{1}{2}c \ldots (16)$$

Or, l'équation (9) donne $\quad \dfrac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \dfrac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$,

d'où (15, p. 35) $\quad \dfrac{\tang\frac{1}{2}(a-b)}{\tang\frac{1}{2}(a+b)} = \dfrac{\tang\frac{1}{2}(A-B)}{\tang\frac{1}{2}(A+B)}$.

Multipliant l'équation (16) membre à membre par cette dernière, tous les facteurs qui ne sont pas détruits sont au carré; prenant la racine, il vient

$$\left.\begin{aligned} \tang \tfrac{1}{2}(a-b) &= \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.\tang \tfrac{1}{2}c, \\ \text{et}\quad \tang \tfrac{1}{2}(a+b) &= \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}.\tang \tfrac{1}{2}c \ (*), \end{aligned}\right\} \ldots (17)$$

en divisant l'équation (16) par la précédente.

Égalons les valeurs (13 et 15) de $\tang \frac{1}{2}(\theta' - \theta)$, et opérons

---

(*) Comme $\tang \frac{1}{2}c \,.\, \cos \frac{1}{2}(A-B)$ est une quantité positive, il faut que $\tang \frac{1}{2}(a+b)$ et $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ aient même signe, d'où l'on conclut que *la demi-somme de deux angles quelconques est toujours de la même espèce que la demi-somme des deux côtés opposés, et réciproquement.*

de la même manière sur l'équation résultante, ce qui revient à changer A et B ci-devant en a et b, et réciproquement, puis c en C; nous avons

$$\left.\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}(A-B)&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C,\\ \tang\tfrac{1}{2}(A+B)&=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cdot\cot\tfrac{1}{2}C,\end{aligned}\right\}\ldots(18)$$

Telles sont les *analogies de Néper* : on s'en sert principalement pour trouver deux côtés a et b d'un triangle, lorsqu'on connaît le 3e côté c et les deux angles adjacens A et B (éq. 17), ou bien, pour trouver deux angles A et B, connaissant les deux côtés opposés a, b, et l'angle compris C (éq. 18).

Triangles isoscèles.

86. Soient C et B les deux angles égaux d'un triangle isoscèle (fig. 54), b et c les deux côtés égaux, A l'angle du sommet, a la base; l'arc perpendiculaire qui va du sommet au milieu de la base, forme deux triangles rectangles symétriques, dans lesquels on trouve les relations suivantes, formées des combinaisons 3 à 3 des quatre élémens A, B, a, b; ces équations font connaître l'un quelconque de ces arcs, quand on a les deux autres. Ainsi, *de ces quatre parties d'un triangle sphérique isoscèle, l'angle* A *du sommet, la base* a, *l'un* b *des côtés égaux, et l'un* B *des angles égaux, deux étant données, ou peut trouver les deux autres.*

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}a&=\sin\tfrac{1}{2}A\sin b,\ldots.(n)\\ \cos b&=\cot B\cot\tfrac{1}{2}A,\ldots.(q)\\ \tang\tfrac{1}{2}a&=\tang b\cos B,\ldots.(p)\\ \cos\tfrac{1}{2}A&=\cos\tfrac{1}{2}a\sin B,\ldots.(s)\end{aligned}$$

Des problèmes qui ont deux solutions.

87. Tout triangle sphérique résulte de la section d'une sphère par trois plans qui passent au centre. La figure 55 a pour base le cercle KMK', et représente un hémisphère produit par l'un de ces plans : les deux autres plans donnent les demi-

circonférences $AC\alpha$, BCB'' qu'on voit ici en perspective; leurs plans se coupent selon le rayon CO, et déterminent le triangle sphérique ABC. Les arcs CA, $C\alpha$, sont supplémentaires; l'angle A est l'inclinaison du plan $AC\alpha$ sur la base KK'. En menant le plan MCm, par le rayon CO, perpendiculairement à cette base KK', puis prenant $MA' = MA$, de part et d'autre de ce plan MCm, on obtient un deuxième plan $A'C\alpha'$ symétrique à $AC\alpha$, et l'on a

$$m\alpha = m\alpha', \quad AC = A'C, \quad C\alpha = C\alpha', \quad A = A' = \alpha = \alpha'.$$

Si l'on fait tourner le plan $AC\alpha$ autour du rayon CO, pour prendre toutes les positions CK, CB, Cf,... ce plan sera perpendiculaire à la base quand il coïncidera avec MCm; puis, dans l'une quelconque de ses positions, il formera avec la base deux angles supplémentaires, l'un en-dessous, l'autre en-dessus de ce plan. Les arcs CB, CA, Cf,... croissent en s'écartant de l'arc perpendiculaire $CM = \psi$, qui est le plus petit de tous, jusqu'à l'arc perpendiculaire opposé Cm, qui est le plus grand. En effet, le triangle rectangle ACM, où $CA = b$, donne $\cos ACM = \cot b \tang \psi$, et le facteur $\tang \psi$ est constant.

Quand l'angle ACM est devenu de 90°, comme pour l'arc CK', dont le plan est perpendiculaire à MCm, on a $\cot b = 0$, et l'arc $CK = 90°$. Le plan continuant ensuite de tourner vers $C\alpha'$, cos ACM devient négatif et croît ainsi que $\cot b$; en sorte que l'arc $C\alpha$ continue d'augmenter. Tout est d'ailleurs symétrique des deux côtés du plan MCm; ainsi les arcs et les inclinaisons seront deux à deux égales, pour des arcs égaux $MA = MA'$, savoir $CA = CA'$, angle $A = A'$.

En tournant ainsi, le plan coupant s'incline d'abord de plus en plus sur la base KMK', en devenant CB, CA, CK, car le triangle rectangle ACM donne encore

$$\sin \psi = \sin b \sin A, \ldots (16)$$

équation dont le premier membre est constant, et où $\sin b$ va d'abord en augmentant, comme on vient de le dire : ainsi sin A décroît en même temps. Mais dès que le côté b atteint

90° (alors CB devient $CK = 90^\circ = MK$), sin δ diminue; donc sin A augmente, et l'angle A aigu à la base, a pris sa moindre valeur au point K, et commence à croître. Ce point K est le *pôle* de la demi-circonférence MCm; l'angle K est mesuré par l'arc $CM = \psi = K$, ou de l'autre côté du plan coupant, par $Cm = 180^\circ - \psi$.

On voit donc que tous les arcs partant de C (fig. 55) pour aboutir en quelque point de la base demi-circulaire KMK', sont $< 90^\circ$; tandis que les autres qui vont en KmK' sont $> 90^\circ$, et que $CK = CK' = 90^\circ$. De plus, $CM = \psi$, et $Cm = 180^\circ - \psi$ (valeurs de ψ que donne l'équation 16) sont les limites entre lesquelles ces arcs CA sont renfermés. Plus un arc approche de CM, et plus il est petit; plus il approche de Cm, plus, au contraire, il est grand.

L'inclinaison des plans sur la base, de 90° qu'elle est en MCm, diminue en prenant les positions CB, CA,... jusqu'en CK où elle devient $K = \psi$; puis elle croît de K vers m, jusqu'à redevenir de 90° en Cm. L'angle est aigu du côté de CM, mais il est obtus du côté de Cm, ces derniers angles étant supplémens respectifs des premiers : tous ces angles obtus sont $< 180^\circ - \psi$.

Enfin, tout est symétrique de part et d'autre de MCm, en sorte que pour deux arcs égaux MA et MA', les inclinaisons de CA, CA' sont égales, et ces arcs sont égaux.

D'après cela, il est aisé de reconnaître si, pour un triangle quelconque BCA, ou B'CA, l'arc AM perpendiculaire sur la base AB, tombe au dedans ou au dehors de ce triangle, et l'on vérifie les corollaires donnés n° 72, relatifs aux grandeurs des côtés et des angles des triangles rectangles.

Les problèmes qui ont des solutions doubles, et qu'on a coutume d'appeler *cas douteux*, sont ceux où, parmi les données, il y a un côté et l'angle qui lui est opposé, ce qui arrive dans deux problèmes 3e et 4e, p. 77.

88. 1er cas. *On donne deux côtés* a *et* b, *et l'angle opposé* B. Coupez l'hémisphère KMK' (fig. 55) par un plan ACa, pas-

sant par le centre O, et qui soit incliné de l'angle A sur la base ; puis prenez $AC = b$; C sera le sommet du triangle, lequel doit être fermé par un arc $CB = a$, de grandeur connue. Analysons ces conditions.

Supposons d'abord que l'*angle* A *soit aigu*, $CA = b$ est l'un des côtés du triangle que ferme le côté a qui doit tomber dans la région $\alpha A'MA$, puisque si le côté a tombait comme Cf, $C\alpha'$,... le triangle CAf, $CA\alpha'$..., au lieu de l'angle aigu A, aurait celui qui, de l'autre côté du plan CA, en est le supplément. Ce côté terminal a, partant du sommet C, doit donc se rendre en quelque point de l'arc $AMA'\alpha$. Les arcs, tels que CB, CB' sont deux à deux égaux et autant inclinés sur la base, lorsqu'ils vont en des points B, B', à égale distance de M. Prenons $MA' = MA$, $MB' = MB$, les arcs seront $CA' = CA = b$, $CB' = CB$.

Or, si le côté a est $< b$, a tombe dans l'angle $A'CA$, comme CB, CB', et l'on a deux triangles BCA, B'CA, composés des trois élémens donnés A, b et a, c'est-à-dire *deux solutions* du problème. Alors l'un des angles B à la base est obtus, l'autre B' est aigu. Au contraire, si $a > b$, l'arc a tombe comme Cf', et le triangle ACf' est le seul qui réunisse les trois élémens donnés, attendu que l'arc Cf, symétrique à Cf', se trouve exclus, comme étant situé au-dessus du plan CA. Il n'y a donc qu'*une solution*, et l'angle B du triangle ACf' est aigu en f', ainsi que b. Enfin, quand le côté $a > C\alpha = 180° - b$, l'arc a tombe comme CB''', en-dessus du plan $AC\alpha$, et *il n'y a aucune solution possible.*

Dans tout ceci, l'arc $b < 90°$, puisqu'on a pris $CA = b$: mais si l'on avait $b = C\alpha > 90°$, et que le côté a tombât comme CB ou CB', on aurait encore *deux solutions* $BC\alpha$, $B'C\alpha$, ayant à la base, l'un l'angle B aigu, l'autre l'angle B' obtus : tandis qu'on n'en aurait qu'*une seule* $\alpha Cf'$, si ce côté a tombait en Cf' dans l'espace $A'C\alpha$, avec un angle f' obtus aussi bien que b : enfin, il n'y aurait *aucune solution*, si ce côté a tombait en CB''' au-dessus du plan $AC\alpha$.

Ainsi, quand l'angle A est aigu, b étant $>$ ou < 90, il n'y

6..

a qu'une solution, lorsque le côté b tombe dans l'espace αCA', c'est-à-dire quand la valeur de l'arc a est entre b et $180° - b$: et alors l'angle à la base est aigu ou obtus avec b : hors de ces limites, il y a deux solutions, ou il n'y en a aucune; deux, quand a tombe sur l'arc AMA', circonstance où $a < 90°$; aucune, quand a tombe sur l'arc $\alpha m \alpha'$, où $a > 90°$.

Venons-en maintenant au cas où l'*angle* A *est obtus*, cas où le côté a qui ferme le triangle, en partant de C, doit être au-dessus du plan αCA, tels que Cf, CB''... Le même raisonnement montre que si $a = C\alpha > 90°$, et si le côté terminal a tombe dans l'espace αCα', il y a *deux solutions*, telles que αCB'', αCB''', ayant à leur base, l'une un angle B''' aigu, l'autre un angle B'' obtus : qu'*il n'y en ait qu'une seule* KCα, quand ce côté a tombe, comme ci-devant, dans l'angle α'CA, l'angle K à la base étant aigu ou obtus en même temps que b; et enfin qu'il *n'y en a pas* de possible, lorsque a tombe sur l'arc A'MA.

On opérera de même pour le cas de $a = CA < 90°$.

Que l'angle A soit aigu ou obtus, on voit donc que la solution est unique, quand le côté terminal a, opposé à l'angle donné A, a sa valeur entre b et $180° - b$: hors de ces limites, la question admet deux solutions ou aucune ; deux, quand A et a sont de même espèce (ensemble $>$ ou $< 90°$), et aucune, lorsque ces arcs sont d'espèces différentes. Et s'il n'y a qu'une solution, B et b sont de même espèce. Or, on sait (n° 81) que la perpendiculaire abaissée du sommet C sur la base c, tombe au dedans ou au dehors du triangle (ce que d'ailleurs on reconnaît bien sur la figure 55), selon que les angles A et B à la base, sont d'espèces semblables ou différentes ; donc dans les équations $c = \varphi \pm \varphi'$, $C = \theta \pm \theta'$, on prendra le signe $+$ quand les arcs A et b seront de même espèce, et $-$ dans le cas contraire, condition qui détermine la solution. L'analyse du troisième cas du n° 83 est ainsi complétée, puisqu'on sait quelle est celle des deux solutions qu'on doit admettre.

Donc *lorsqu'on aura un triangle à résoudre, connaissant deux côtés* a, b *et un angle opposé* B, *on comparera* a *à* b *et à* $180° -$ b ; *si* a *est l'une de ces limites ou compris entre elles*

il n'y a qu'une seule solution; B et b sont de même espèce; C et c seront la somme ou la différence de leurs segmens, selon que les arcs A et b seront d'espèces semblables ou différentes. Hors de ces limites, on a deux solutions, quand A et a sont de même espèce, et aucun triangle n'est possible dans le cas contraire.

Observez que la moindre et la plus grande valeur que le côté terminal a puisse recevoir sont CM et Cm, l'une ψ, l'autre 180° — ψ; si a n'était pas compris entre ces limites, c'est-à-dire entre les deux valeurs supplémentaires de ψ que donne l'équation (16), p. 81, le problème proposé serait absurde, parce qu'on ne pourrait former aucun triangle avec les trois élémens donnés A, b et a. Au reste, ce cas n'exige pas de calcul spécial pour être reconnu, attendu qu'il se manifeste de lui-même par une opération impraticable.

89. 2ᵉ CAS. *On donne deux angles* A *et* B, *avec un côté opposé* b.

En raisonnant comme ci-dessus, on arriverait à une conséquence qu'on obtient plus facilement par la considération du triangle supplémentaire A'B'C' (fig. 48, n° 65). On y connaît les côtés $a' = 180° - A$, $b' = 180° - B$, et l'angle $B' = 180° - b$; et il suit de ce qu'on vient de dire que ces élémens appartiennent à deux triangles dont un seul convient à la question, quand b', côté opposé à l'angle B', est compris entre a' et $180° - a'$; ou, ce qui équivaut, quand B est entre A et 180° — A (en retranchant chaque arc de 180°). Alors A et a doivent être de même espèce; C et c seront la somme ou la différence de leurs segmens, selon que les arcs A et b seront d'espèces semblables ou différentes.

Ainsi *lorsqu'on voudra résoudre un triangle où* A, B *et* b *seront donnés, on comparera* B *à* A *et* 180° — A; *si* B *est l'un de ces arcs ou intermédiaire entre eux, il n'y aura qu'une seule solution;* A *et* a *seront de même espèce; dans les équations* $C = \theta \pm \theta'$, $c = \varphi \pm \varphi'$, *on prendra le signe* + *quand les arcs* A *et* b *seront de même espèce, et* — *dans l'autre cas,*

ce qui apprendra quelle est celle qu'on doit adopter ou rejeter des deux solutions que donne le calcul n° 83, 4°. *Hors de ces limites, il y a deux solutions, quand* B *et* b *sont de même espèce, et aucune lorsque ces arcs sont d'espèce différente.*

En outre, l'angle B doit être compris entre les deux valeurs supplémentaires de $\downarrow$ données par l'équation (16); car sans cela, on ne pourrait former aucun triangle avec les données, et le problème serait absurde.

90. *Quand le triangle est rectangle,* CM ou Cm (fig. 55) est l'un des côtés, et si l'on donne un angle et un côté opposé, il y a deux solutions qui se réduisent à une seule dans certains cas.

1°. Étant donné l'hypoténuse a et un côté b, trouver l'angle opposé B? L'équation (n), p. 69, fait connaître B par un sinus, qui répond à deux arcs supplémentaires. De même, étant donnés l'hypoténuse a et l'angle B, trouver le côté opposé b? La même équation donne deux arcs supplémentaires pour le côté opposé b. Mais dans ces deux cas, on n'admet qu'une seule solution, parce que les deux arcs CA ou CA′ qui ferment le triangle CMA, CMA′, sont symétriques : ainsi B et b sont de même espèce, et il n'y a plus d'indécision.

2°. Étant donnés un côté b de l'angle droit et l'angle opposé B, la troisième partie cherchée admet deux valeurs : car si l'on demande l'hypoténuse a, l'équation (n) donne $\sin a$; si l'on cherche le troisième côté c, l'équation (r) donne $\sin c$; enfin, pour trouver l'angle C adjacent au côté connu b, l'équation (s) donne $\sin$ C. Ainsi l'inconnue reçoit deux valeurs supplémentaires pour l'arc correspondant à chacun de ces sinus.

91. Voici quelques applications numériques.

I. Soient $a = 133° \, 19'$, $b = 57°28'$, $A = 45° \, 23'$. Le triangle est impossible, parce que a n'est pas entre $57° \, 28'$ et son supplément $122° \, 32'$, et qu'en outre A et a ne sont pas de même espèce.

II. Il en faut dire autant si l'on a $A = 120°$, $B = 51°$, $b = 101°$; car on trouve que B n'est pas entre $120°$ et $60°$, et que B et b ne sont pas de même espèce.

Les exemples suivans sont établis sur un triangle sphérique dont voici les côtés et les angles.

$a = 76°35'36$; log. sin $= \bar{1}.98800007512$; log. cos $= \bar{1}.36522278723$;

$b = 50.10.30$,	$\bar{1}.88536\ 35668$,	$\bar{1}.80648\ 17481$,
$c = 40.\ 0.10$,	$\bar{1}.80809\ 25880$,	$\bar{1}.88423\ 62983$,
$A = 121.36.19{,}86390$,	$\bar{1}.93027\ 46482$,	$1.71938\ 75818$,
$B = 42.15.13{,}46007$,	$\bar{1}.82763\ 64638$,	$\bar{1}.86933\ 39724$,
$C = 34.15.\ 2{,}77904$,	$\bar{1}.75036\ 64850$,	$\bar{1}.91728\ 60313$.

(Voy. *Connaissance des Tems de* 1819, p. 322.)

III. Soient $b = 40°\,0'\,10''$, $a = 50°\,10'\,30''$, $A = 42°15'\,14''$; il n'y a qu'une solution, attendu que a est entre b et $180° - b$; B est $< 90°$, et l'arc perpendiculaire abaissé du sommet tombant dans le triangle, φ et φ' sont positifs; c est la somme de ces arcs. Le calcul des équations (1, 5 et 3), page 77, donne

tang b....$\bar{1}.9238563$	cos a.... $\bar{1}.8064817$	$\varphi = 31°50'46''$
cos A.....$\bar{1}.8693330$	cos φ.... $\bar{1}.9291471$	$\varphi' = 44.44.50$
tang φ.....$\bar{1}.7931893$	cos b.. — $\bar{1}.8842363$	$c = 76.35.36$
	cos φ'... $\bar{1}.8513925$	

Pour trouver l'angle C du sommet, les équations (2, 8 et 4) donnent

cos b....$\bar{1}.8842363$	tang b....$\bar{1}.9238563$	$\theta = 55°\ 9'59''$
tang A...$\bar{1}.9583058$	cot a....$\bar{1}.9211182$	$\theta' = 66.26\ 21$
cot θ.....$\bar{1}.8425431$	cos θ.....$\bar{1}.7567851$	$C = 121.36.20$
	cos θ'.....$\bar{1}.6017596$	

Enfin, la règle des quatre sinus (p. 68) donne $B = 34°15'3''$.

IV. Pour $B = 42°\,15'\,14''$, $A = 121°\,36'\,20''$, $b = 50°10'30''$, on a deux solutions, parce que B n'est pas compris entre A et son supplément, et que B et b sont de même espèce. Les équa-

tions (2, 6 et 9) conduisent aux calculs suivans.

$\cos b \ldots \bar{1}.8064817$	$\cos B \ldots \bar{1}.8693340$	$\sin b \ldots \bar{1}.8853636$
$\tan A \ldots 0.2108864-$	$\sin \theta \ldots \bar{1}.8406262-$	$\sin A \ldots \bar{1}.9302745$
$\cot \theta \ldots 0.0173681-$	$\cos A \ldots - \bar{1}.7193880-$	$\sin B .- \bar{1}.8276379$

$\theta = -43°51'16''$ $\sin \theta' \ldots \bar{1}.9905712+$ $\sin a \ldots \bar{1}.9880002$

$\theta' = 78.\ 6.19$ ou $\ldots\ldots 101°53'41''$ $a = 76°35'36''$

$C = 34.15.\ 3$ ou $C = 58.2.25$ ou $= 103.24.24$

$\tan b \ldots\ldots 0.0788818$ $\cot B \ldots 0.0416956$

$\cos A \ldots\ldots \bar{1}.7193874-$ $\tan A \ldots 0.2108873-$

$\tan \varphi \ldots\ldots \bar{1}.7982692-$ $\sin \varphi \ldots \bar{1}.7259905-$

$\varphi = -\ 32°8'50''$ $\sin \varphi' \ldots \bar{1}.9785734+$

$\varphi' = 72.9.\ 0$ ou $\ldots\ldots 107°51'\ 0''$

$c = 40.0.10$ ou $c = 75.42.10$

L'une de ces deux solutions reproduit le triangle précédent; elle est fCA'' (fig. 55); l'autre est $f'\,CA'$.

V. *Connaissant les trois côtés, trouver un angle?*

$a =$	$76°35'36''$	$\sin \ldots \bar{1}.9880008$	les autres élémens du triangle sont :
$b =$	$50.10.30$	$\sin \ldots \bar{1}.8853636$	
$c =$	$40.\ 0.10$		
$2p =$	$166.46.16$	$-\bar{1}.8733644$	$A = 121°36'19''8$
$p =$	$83.23.\ 8$		$B = 42.15.13.7$
$p-a =$	$6.47.32$	$\sin \ldots \bar{1}.0728716$	$C = 34.15.\ 2.8$
$p-b =$	$33.12.38$	$\sin \ldots \bar{1}.7385565$	$\psi = 40.51.\ 3.0$
		$\sin^2 \ldots \bar{2}.9389637$	$\varphi, \varphi', \theta, \theta'$ sont donnés
$\frac{1}{2} C =$	$17.\ 7.31,4$	$\sin \ldots \bar{1}.4690318$	ci-dessus, le triangle
$C =$	$34.15.\ 2,8.$		étant ici le même.

Nous terminerons la trigonométrie sphérique, en donnant tous les élémens de deux triangles, comme exercice de calcul pour appliquer les formules, en variant les données des problèmes.

Premier triangle d'épreuve obliquangle.

ÉLÉMENS.	LOG. SINUS.	LOG. COSINUS.	LOG. TANG.
a = 63°39′57″8	$\bar{1}$.9524165	$\bar{1}$.6469937	0.3054227
b = 75. 0.51,3	$\bar{1}$.9849727	$\bar{1}$.4125929	0.5723798
c = 41. 9.46,0	$\bar{1}$.8183582	$\bar{1}$.8767042	$\bar{1}$.9416540
A = 66.57. 3,6	$\bar{1}$.9638682	$\bar{1}$.5927520	0.3711162
B = 97.20.31,6	$\bar{1}$.9964244	$\bar{1}$.1065091 —	0.8899153 —
C = 42.30.55,0	$\bar{1}$.8298097	$\bar{1}$.8675247	$\bar{1}$.9622849
φ = 55.38.21,9	$\bar{1}$.9167182	$\bar{1}$.7515864	0.1651318
φ' = — 14.28.35,9	$\bar{1}$.3979144 —	$\bar{1}$.9859874	$\bar{1}$.4119270 —
θ = 58.42.42,4	$\bar{1}$.9317454	$\bar{1}$.7154547	0.2162907
θ' = — 16.11.47,4	$\bar{1}$.4454990 —	$\bar{1}$.9824118	$\bar{1}$.4630873 —
ψ = 62.43.55,7	$\bar{1}$.9488404	$\bar{1}$.6610088	0.2878316

Deuxième triangle obliquangle d'épreuve.

ÉLÉMENS.	LOG. SINUS.	LOG. COSINUS.	LOG. TANG.
A = 121°36′19″81	$\bar{1}$.9302747	$\bar{1}$.7193874 —	0.2108873 —
B = 42.15.13,66	$\bar{1}$.8276379	$\bar{1}$.8693336	$\bar{1}$.9583043
C = 34.15. 2,76	$\bar{1}$.7503664	$\bar{1}$.9172860	$\bar{1}$.8330804
a = 76.35.36,00	$\bar{1}$.9880008	$\bar{1}$.3652279	0.6227729
b = 50.10.30,00	$\bar{1}$.8853636	$\bar{1}$.8064817	0.0788819
c = 40. 0.10,00	$\bar{1}$.8080926	$\bar{1}$.8842363	$\bar{1}$.9238563
φ = —32. 8.50,00	$\bar{1}$.7259905 —	$\bar{1}$.9277212	$\bar{1}$.7982693 —
φ' = 72. 9. 0,00	$\bar{1}$.9785741	$\bar{1}$.4864674	0.4921067
θ = —43.51.16,20	$\bar{1}$.8406263 —	$\bar{1}$.8579964	$\bar{1}$.9826249 —
θ' = 78. 6.19,00	$\bar{1}$.9905733	$\bar{1}$.3141076	0.6764657
ψ = 40.51. 3,00	$\bar{1}$.8156388	$\bar{1}$.8787602	$\bar{1}$.9368787

CHAP. II. — CERCLE ET THÉODOLITE RÉPÉTITEUR.

92. De tous les instrumens employés à la mesure des angles, le plus ingénieux est le cercle répétiteur; la précision en est admirable. Depuis que Borda en a fait la découverte, on a abandonné dans les opérations de Géodésie, l'usage de ces grands instrumens qu'on destinait aux observations terrestres et astronomiques, et dont le poids rendait le transport et la manœuvre si difficiles : l'expérience a montré qu'on obtenait des résultats au moins aussi exacts avec un cercle répétiteur de 3 décimètres environ de diamètre, et que les observations étaient plus rapides. Décrivons cet utile appareil, qui est représenté figures 58 et 59, en nous bornant aux détails essentiels; car la complication des pièces qui le composent, ne permet guère d'en faire un exposé complet sur des figures, et la vue d'un cercle répétiteur en apprend beaucoup plus qu'un dessin accompagné d'une description. Rappelons d'abord les principes sur lesquels sont fondés sa construction et son usage.

93. Imaginez que le cercle de la figure 61 soit monté sur un pied avec genou, et orienté de manière à se trouver dans le plan de deux objets éloignés L et K, dont on se propose de mesurer la distance angulaire, c'est-à-dire l'angle LCK, que forment les rayons visuels CL, CK, dirigés de C vers ces objets. Concevez en outre que le limbe de ce cercle puisse tourner autour d'un axe central C perpendiculaire à son plan; de sorte que, sans que les signaux L et K sortent de ce plan KCL, un rayon quelconque CA, tournant avec ce cercle, puisse être dirigé vers tous les points de l'espace qui sont dans ce plan : ce cercle porte des lunettes, figurées ici par leurs axes optiques AA', BB'; elles sont mobiles autour de l'axe central C, et situées, l'une AA' en-dessus du limbe, l'autre BB' en-dessous, et indépendantes l'une de l'autre dans leurs rotations : on voit ces lunettes représentées figures 58 et 59.

Il suit de cet exposé que les objets éloignés K et L étant

dans le plan du limbe, on pourra diriger la lunette CA (fig. 61) vers l'un de ces objets, et la lunette CB vers l'autre, par la seule rotation de leurs tubes autour de l'axe central C, et sans faire mouvoir le limbe. En outre, le cercle, comme on l'a dit, peut aussi tourner sur le même axe qui lui est perpendiculaire, en entraînant avec lui les deux lunettes; et aussi chaque lunette peut tourner seule sans changer la position du cercle. Des vis de pression affectées à chacun de ces trois mouvemens indépendans, servent à les empêcher à volonté; et des agrafes qui saisissent le bord du limbe et sont pourvues de *vis de rappel* (n° 10), produisent les petits mouvemens nécessaires pour pointer facilement les signaux.

Nous reviendrons plus tard sur la construction de ces lunettes; qu'il nous suffise de dire ici qu'on les emploie à fort grossissement, autant que le permet la grandeur de l'instrument; et qu'en y portant l'œil, on voit dans l'intérieur deux fils très fins, croisés à angle droit, l'un parallèle, l'autre perpendiculaire au limbe : le point de croisement est dans l'axe optique, et on le dirige juste sur le signal qu'on vise. On porte d'abord la lunette à peu près vers cet objet, de manière à l'apercevoir dans le champ optique; on achève ensuite avec la vis de rappel, le petit mouvement propre à faire coïncider en apparence le signal avec le point de section des deux fils.

94. Le limbe du cercle est divisé en degrés, ou demi-degrés, ou etc., selon le diamètre de l'instrument; ces divisions procèdent même ordinairement de 5 en 5 minutes. La lunette supérieure AA' traîne avec son tube une pièce de cuivre qui y est fixée, et qui porte un *vernier* ou *nontus*, arasant par son bord les traits de division de la circonférence graduée, pour permettre de lire, à l'aide d'une *loupe*, les fractions de division.

Nous avons expliqué n° 9 la théorie des verniers; nous avons vu que si un arc du limbe ayant $n-1$ divisions est coupé, sur le vernier, en n parties égales, chacune de ces

dernières occupe un espace plus petit de la n^e partie de la division correspondante. Que le limbe soit partagé en 360 degrés, par exemple, et chaque degré coupé en 6, chaque division vaudra 10 minutes. Un arc interceptant 59 de ces divisions, étant coupé sur le vernier en 60 parties égales, chaque division du vernier sera plus courte de $\frac{1}{60}$, ou de 10″, que celles du limbe, et le vernier fractionnera le limbe de 10 en 10 secondes.

95. Il suit de là que, quand la lunette supérieure aura reçu une position quelconque, si l'on veut lire la graduation du limbe qui répond à la ligne de foi, laquelle tombera souvent entre deux traits, on commencera par lire sur les divisions du limbe les entiers de degrés et de minutes de 10 en 10; il restera à lire sur le vernier la fraction correspondante à l'intervalle entre la ligne de foi, et le trait précédent du limbe. A cet effet, on remarquera quels sont les traits du limbe et du vernier qui sont en exacte coïncidence; puis, comptant combien il y a de traits depuis celui-ci jusqu'à la ligne de foi, la fraction cherchée sera d'autant de fois 10″ qu'il y a de ces espaces; et comme on grave sur le vernier des chiffres qui indiquent ce résultat, on y lit de suite les minutes et dixaines de secondes qu'on doit ajouter à la 1re lecture faite sur le limbe.

La lunette inférieure n'arase pas le limbe divisé et ne porte pas de vernier; on en verra bientôt l'usage. Nous supposerons que les nos de graduation du limbe vont de droite à gauche, pour un œil placé au centre.

96. Qu'on ait placé le cercle sur son pied, le limbe étant dans le plan de deux signaux K et L (fig. 61); on fixera la lunette supérieure AA′ sur le zéro de la graduation en A, et l'on tournera ce cercle sur l'axe C qui lui est perpendiculaire, jusqu'à ce que la lunette AA′ vise juste l'objet L à la croisée des fils, et sans qu'elle ait quitté le zéro. Laissant le limbe ainsi fixé, on dirigera la lunette inférieure BB′ sur l'objet K vers la gauche; et l'angle ACB formé par les axes

optiques est visiblement celui qu'on cherche. Cet angle serait mesuré par un arc de cercle AB intercepté entre ces deux rayons : mais on n'en peut lire la graduation sur le limbe, parce que la lunette BB′ est située au-dessous. Mais si l'on rend au cercle la liberté de tourner sur son axe central C, il emportera les deux lunettes dans sa rotation, et l'on continuera ce mouvement général jusqu'à ce que la lunette inférieure CB, qui tendait vers l'objet K situé à gauche, prenne la direction CA de l'objet L qui est à droite : la lunette supérieure se trouvera ainsi transportée en CD; le zéro de la graduation du limbe qui était en A, sera venu en D; et l'arc DA égal à AB sera celui dont on demande la valeur.

Dans cet état, fixez de nouveau le cercle; détachez la lunette supérieure (actuellement en CD), et portez-la en CB, vers l'objet à gauche K, et l'angle BCA = ACD sera celui dont on cherche la mesure. L'arc DAB, que maintenant on peut lire sur le limbe, en sera le double; en sorte qu'on aura fait, il est vrai, deux fois l'observation de l'angle proposé; mais qu'en divisant par 2 la graduation de l'arc DA, on aura la valeur de cet angle.

Réitérez cette double observation, en prenant le point B du limbe pour départ, c'est-à-dire faites tourner le cercle emportant ses deux lunettes, et amenez la supérieure de BB′ en AA′ pour l'aligner sur l'objet L à droite; le zéro de la graduation rétrogradera de D en E, et la lunette inférieure passera de CA en CD. Détachez celle-ci, et faites-la revenir sur le signal K à la gauche, et l'arc EB sera le triple de AB. Répétez ensuite la même manœuvre en faisant tourner le cercle en totalité pour ramener la lunette inférieure sur le signal L à droite; le zéro de la graduation passera en F. Ainsi en détachant à son tour la lunette supérieure, qui est venue en CD, pour la porter sur le signal K à gauche, l'arc FB, que vous lirez sur le limbe, sera quadruple de celui qu'on demande. Il faudra donc prendre le quart de la graduation indiquée par le vernier, après ces quatre observations : et ainsi de suite.

En répétant dix fois l'observation, l'angle serait décuplé. On n'a d'ailleurs pas besoin de lire la graduation après chaque pointé de la lunette supérieure, et il suffit de lire celle de l'arc qu'on obtient lorsque toutes les observations sont terminées.

Examinons les avantages de ce procédé.

97. Il est clair que si dix observations ramenaient la lunette supérieure sur le zéro de l'instrument, ces dix arcs réunis vaudraient en somme 360°, et que chaque arc serait de 36° : de plus, on voit que ce résultat serait exempt des erreurs de division du limbe, et de la centration des mouvemens des lunettes. Il faut ajouter qu'il n'arrive presque jamais qu'on puisse ramener la lunette supérieure juste sur le zéro de la graduation : mais si l'on trouve, par exemple, qu'après avoir fait dix observations, l'arc décuple est de 320°, et que par une erreur de l'instrument, cet arc aurait dû être de 320°5′, comme on divise par 10, on trouverait un arc de 32°, au lieu de 32° 0′ 30″, et l'erreur de division ne serait plus que de 30″, au lieu de 5′.

98. Le cercle répétiteur a donc ce grand avantage, lorsqu'on s'en sert avec soin et adresse, d'atténuer presque indéfiniment les erreurs qui tiennent aux vices de construction de l'instrument ; et en outre, la répétition des observations atténue aussi les erreurs de pointé.

Pour remédier aux vices de centration de l'axe, on est dans l'usage de faire porter à la lunette supérieure deux verniers en des points diamétralement opposés du limbe. On en lit les indications avant de commencer les observations, et après qu'elles sont terminées, afin d'en conclure l'arc parcouru par la lunette ; si ces lectures ne donnent pas des arcs rigoureusement égaux, elles diffèrent très peu, et l'on prend leur moyenne. Dans les beaux instrumens de ce genre, on emploie même quatre verniers en croix, divisés pour donner l'arc à 5″ près. (*Voy*. p. 10.)

99. D'après cet exposé, il sera facile de se faire une idée

de la construction du cercle répétiteur (fig. 59). La colonne S est percée dans sa longueur d'un canal légèrement conique, où est logé un axe central en acier : cet axe est solidement ajusté au centre d'un cercle gradué ou *plateau* O. C'est autour de cet axe d'acier que se fait le mouvement général de la colonne S, qui emporte le cercle et ses deux lunettes, rotation qu'on arrête quand on veut par la vis de pression O' qui fixe alors l'alidade sur le plateau inférieur. On peut même lire sur ce plateau la valeur angulaire de la rotation générale. La colonne doit être alésée juste sur le calibre de l'arbre central, pour que le mouvement soit doux et précis.

Un pied en bois, à trois branches très solides, porte une table NN sur laquelle le disque ou plateau, et l'axe d'acier du centre de la colonne, sont établis : en sorte que le cercle répétiteur pose sur trois vis v, v', v'', destinées à donner de petites inclinaisons à la colonne S. Au milieu du trépied est un trou prismatique moulé sur une tige de même calibre qui porte la table NN. En faisant saillir plus ou moins cette tige, on élève à volonté la table, et on l'arrête, à l'aide d'une cheville, à la hauteur qui est commode pour l'observateur. En haut de la colonne S, le cercle est porté sur un axe V autour duquel il peut basculer : on arrête ce mouvement par la vis de pression P qui serre une pièce de cuivre en quart de cercle tenant à l'axe V.

Pour amener le limbe dans le plan des deux objets, et diriger à la fois les deux lunettes vers eux, il faut incliner le cercle à l'aide des vis v, v', v'', du plateau O, qui fait lentement varier l'inclinaison de la colonne ; et ensuite en faisant basculer le limbe autour de l'axe V : en combinant ces mouvemens, on arrive bientôt à viser ensemble les deux signaux.

On construit aussi des instrumens de ce genre, où le cercle (fig. 59) peut recevoir deux mouvemens de bascule autour d'axes rectangulaires, ce qui permet d'amener facilement le limbe à se trouver dans le plan des deux objets, la colonne S restant verticale.

Au lieu de faire traîner le vernier sur le limbe, souvent

on fait porter la lunette par un cercle concentrique au limbe gradué, et tellement ajusté dans son intérieur, que tous deux semblent n'en faire qu'un seul. Ce sont deux cercles dont les faces sont dans un même plan, qui ne laissent entre eux aucun intervalle, et dont l'un tourne dans l'autre. Chacun de ces cercles est soutenu sur l'axe par 6 à 8 rais; l'extérieur est divisé du côté interne en 360° et l'intérieur porte des verniers.

Au centre de chaque cercle est un axe d'acier perpendiculaire à son plan; c'est autour de cet arbre que pirouettent les deux lunettes AB, A'B'. La figure 59 montre comment ces lunettes doivent être ajustées, pour être libres et indépendantes dans leurs mouvemens. Cet arbre entre dans un canal alésé juste sur son calibre qui perce la pièce V, et va se souder au centre d'un *tambour* T. On conçoit que lorsque ce tambour tourne de X vers T et Z autour de son axe, la vis P arrêtant d'ailleurs le mouvement de bascule, ce tambour entraîne le limbe et les deux lunettes, qui ne sortent pas du plan des objets. On travaille la surface courbe du tambour en sillons, où s'engage une *vis sans fin* pressée par une lame de ressort en acier. En tournant cette vis, on produit les petits mouvemens du limbe dans son plan; et comme on peut soulever le ressort et dégager la vis sans fin, on fait prendre au limbe de grands mouvemens dans ce même plan. L'arbre du tambour doit être exactement concentrique au limbe et aux arcs des verniers.

100. Lorsqu'on veut faire usage du cercle répétiteur, on dirige d'abord le limbe MM sous des inclinaisons telles, que les deux objets soient situés dans son plan. On met ensuite la lunette supérieure sur le zéro de la graduation; on dégage le tambour T de sa vis sans fin, et l'on imprime au cercle une rotation générale propre à diriger la luuette supérieure vers l'objet à droite. Quand on aperçoit cet objet dans le champ de la lunette, on fait engrener la vis sans fin, et l'on achève, par les petits mouvemens que preud le tambour,

d'amener la coïncidence de l'objet avec les fils. En même temps, un second observateur vise l'objet de gauche en y conduisant la lunette inférieure, et le fait coïncider avec la croisée des fils : on a ainsi une 1[re] observation. Quoiqu'une seule personne puisse remplir ces deux fonctions successivement, on abrége beaucoup le travail à deux.

De là on procède à une 2[e] observation de l'angle, en dégageant le tambour, faisant tourner le cercle entier qui emporte avec lui les deux lunettes, pour amener la lunette inférieure sur l'objet à droite, sans la détacher du limbe; tandis que le 2[e] observateur, détachant la lunette supérieure, vise l'objet à gauche. Quand le 1[er] a fini de produire la coïncidence à l'aide de la vis du tambour, le 2[e] produit la sienne par la vis de rappel de sa lunette. On passe de même à une 3[e] mesure de l'angle, à une 4[e], etc., chaque ingénieur ne visant jamais que le même objet, tantôt avec la lunette supérieure, tantôt avec l'inférieure alternativement, et manœuvrant toujours le tambour et sa vis sans fin, ou la lunette inférieure et sa vis de rappel. On lit enfin l'arc indiqué à la dernière observation, et divisant cet arc par le nombre des mesures prises, le quotient est l'arc demandé.

101. On a souvent besoin de trouver la *hauteur angulaire d'un signal,* ou l'angle de hauteur au-dessus de l'horizon; c'est l'angle que fait avec l'horizontale le rayon visuel dirigé vers une sommité. Cet angle est le complément à 90° de la *distance au zénith,* angle que fait ce même rayon visuel avec la verticale.

Pour mesurer une distance zénithale, on donne au cercle répétiteur la position représentée figure 58, en faisant basculer le tambour sur son arbre V. On a même soin de munir le tambour d'une masse de même poids que celui du limbe et des lunettes, pour qu'ainsi lesté, le centre de gravité demeure dans l'axe de la colonne S, qu'on rend alors exactement verticale. Cette dernière condition est obtenue par des *niveaux à bulle d'air,* comme on l'expliquera plus loin, et calant avec les vis v, v' et v''.

Supposons donc que la colonne et le limbe soient exactement verticaux, en sorte qu'en faisant pirouetter le cercle autour de sa colonne, son plan conserve la situation verticale, dans toutes ses révolutions. Le cercle de la figure 62 représente le limbe dans une de ses positions; la lunette supérieure A'A est dirigée vers un signal H dont on demande la distance zénithale, angle formé par le rayon visuel CA avec la verticale CD. On suppose que la lunette a d'abord été fixée sur le zéro de la graduation, en A, et que c'est par la révolution du tambour dans son plan qu'on a pointé H, la colonne restant d'ailleurs fixée au plateau inférieur par la vis H. (*V.* fig. 58.)

Imaginez maintenant qu'on détache cette vis H, et qu'on refasse pirouetter de 180° le limbe autour de la colonne : il regardera le côté opposé; la lunette A'A (fig. 62) aura pris la situation EE', et le zéro de la graduation sera porté en E. Mais la ligne DD' sera encore verticale, puisqu'on suppose que la demi-révolution s'est faite autour d'une parallèle à cette ligne. Ainsi l'angle qu'on veut mesurer est ECD. Détachez la lunette supérieure EE', et faites-la tourner sur le limbe, sans faire éprouver au cercle aucun dérangement, jusqu'à ce qu'elle pointe exactement le signal H. Il est clair que l'arc AD sera encore celui qu'on veut mesurer, et que, par conséquent, l'arc EA décrit par la lunette est double de la distance zénithale demandée. Ensuite retournant de nouveau le cercle de l'autre côté, la lunette reviendra en EE'. Détachez le cercle sans toucher à la lunette, et faites-le tourner dans son plan pour ramener la lunette vers H, sans changer la place où elle est fixée au limbe : puis retournez l'instrument du côté opposé et recommencez l'opération, etc., deux autres observations quadruplent l'angle, et ainsi de suite.

On voit qu'ici la lunette inférieure n'est plus d'aucun usage; seulement on a adapté à son canon un niveau à bulle d'air Q (fig. 58) qui sert à attester si, dans les mouvemens, la colonne est restée verticale, ou plutôt si le diamètre DD' est encore vertical après le retournement. Voici comment on opère.

102. Après avoir mis le limbe et la colonne verticaux, et fixé la lunette AB sur le zéro, on fait tourner le système autour de la colonne, et l'on amène le limbe dans le vertical de l'objet : on fixe la colonne par la vis O, et faisant tourner le cercle en totalité sur son axe horizontal, on pointe la lunette vers l'objet, en se servant de la vis du tambour, et la lunette restant fixée à zéro du limbe. Quand on a obtenu la coïncidence de l'objet et des fils, on fait tourner la lunette inférieure, qui ne sert plus comme lunette, et l'on amène la bulle d'air au milieu du tube du niveau, en s'aidant de la vis de rappel de cette lunette. On retourne alors le cercle de l'autre côté, en détachant la vis H, et faisant faire un demi-tour à la colonne S, dont on fixe la vis à 180° du point qu'indiquait l'alidade O sur le cercle du plateau. Dans cette position, l'objet se retrouve dans le vertical du limbe, lequel a passé de la droite à la gauche de la colonne.

Dans cet état, voyez si la bulle du niveau est entre ses repères; et si elle a éprouvé quelque petit dérangement, ramenez-la à sa place, mais sans toucher à la lunette inférieure, ni à sa vis de rappel : servez-vous seulement de la vis du tambour. Ensuite détachez la lunette supérieure et pointez-la sur l'objet : l'angle sera doublé. Faites faire de nouveau une demi-révolution autour de la colonne, pour passer le limbe du côté opposé; détachez le tambour, en vous gardant bien de toucher à la lunette supérieure, dont la place sur le limbe doit être considérée comme le point de départ d'une seconde observation. Par le mouvement général du cercle vertical sur son axe, en emportant avec lui ses lunettes, pointez l'objet, et recommencez la même opération que la 1re fois : et ainsi de suite.

Le cercle répétiteur est construit en cuivre, avec des vis d'acier; et afin que les divisions du limbe et des verniers soient très nettes, on les trace sur un cercle d'argent ou de platine incrusté dans l'épaisseur. Pour bien lire les indications, on dispose une loupe au devant de chaque vernier; un petit châssis encadrant un verre dépoli, ombrage les divisions

pour empêcher les reflets de lumière, afin que le jour n'y arrive que par transparence.

103. Les lunettes sont formées d'un tube cylindrique portant un verre à chaque bout. Le verre *objectif*, qu'on tourne vers les objets, doit être convexe et *achromatique*, c'est-à-dire formé de deux verres accolés ; la densité de l'un (l'intérieur) a été augmentée par de l'oxide de plomb, afin que les images ne soient pas colorées de nuances étrangères. Il faut que l'objectif soit le plus grand possible pour recueillir un grand nombre des rayons émanés de l'objet. Il sert à réunir ces rayons à son *foyer*, qui est un point de l'axe du tube proche de son autre extrémité, point où se forme une petite image très vive de l'objet. A ce dernier bout est placé le verre *oculaire*, près duquel on applique l'œil. Cet oculaire est un verre très convexe qui tient lieu de loupe pour agrandir l'image que l'objectif a transportée à son foyer. Aussi faut-il que ce foyer soit à peu près commun aux deux verres, et très près de l'oculaire qui est le plus petit et le plus convexe.

L'oculaire est adapté à un petit tube mobile qu'on enfonce plus ou moins, jusqu'à ce qu'on ait une perception nette de l'image, ce qui dépend de la force de vision de l'observateur.

On garnit l'intérieur de la lunette de diaphragmes percés au centre pour arrêter les rayons trop écartés qui ôteraient à l'image sa netteté, parce que leur direction oblique produisant l'aberration de sphéricité, les projetterait à des foyers différens. Au foyer de l'objectif est un diaphragme à jour au centre, et qui porte deux fils de soie ou d'araignée croisés à angle droit ; c'est ce qu'on appelle le *réticule*. Comme ce réticule doit être exactement au foyer de l'objectif, point où l'image se produit, et que ce foyer s'éloigne de ce verre et se rapproche de l'oculaire, à mesure que l'objet est plus voisin, le réticule doit être un peu mobile le long du tube, pour qu'on puisse amener les fils à ce foyer. Cette condition est essentielle ; car si le réticule ne se trouve pas juste au foyer de l'objectif, l'œil, placé devant l'oculaire, ne voit plus les fils

immobiles à leur place, et ils paraissent se déplacer par rapport à l'image, lorsqu'on déplace quelque peu l'œil : c'est ce qu'on appelle la *parallaxe des fils*. Il faut donc s'assurer si ce défaut existe et y porter remède, car sans cela le pointé ne serait pas sûr. Du reste, quand l'objet est très éloigné, le plus ou moins de distance ne change pas sensiblement le foyer de l'objectif, et le réticule une fois bien placé n'a plus besoin de varier, si ce n'est quand les objets deviennent trop rapprochés.

Il est inutile de dire que quand on a changé la place du réticule, il faut changer aussi celle de l'oculaire, qui doit toujours être telle que l'œil aperçoive avec netteté les fils et l'image : l'objectif reste toujours fixe. Ainsi l'on commencera par amener le réticule au foyer de l'objectif par quelques essais successifs, en examinant si les fils offrent une parallaxe, c'est-à-dire si les fils paraissent monter ou descendre relativement à l'image, quand on porte l'œil un peu plus haut ou plus bas devant l'oculaire. Quand on s'est assuré qu'il n'y a plus de parallaxe, on meut le petit tube qui porte l'oculaire, de manière que l'œil voie très nettement l'image et les fils ; le point où il faut amener ce tube dépend de la nature de la vue de l'observateur.

Ces lunettes ne faisant voir les objets qu'en-deçà du foyer où se croisent les rayons qui en émanent, renversent les images de haut en bas et de droite à gauche : mais ce n'est pas un inconvénient pour l'usage qu'on en fait ici. L'axe optique doit être exactement parallèle au limbe.

104. Quant au *niveau à bulle d'air*, il est formé d'un tube de verre contenant de l'alcool, et fermé à la lampe par ses deux bouts. La liqueur ne remplit pas exactement toute la capacité, et laisse un petit espace vide, ou plutôt rempli de vapeur, qu'on appelle une *bulle d'air*. On se sert d'alcool parce que le froid n'en peut produire la congélation, qui briserait le tube. On a soin de *roder* le verre à l'intérieur, c'est-à-dire, qu'on l'use au sable et à l'émeril, pour lui donner la forme d'arc de cercle dans sa longueur selon une de

ses faces : sans cela, la bulle serait *folle*, et la plus légère inclinaison la ferait passer d'un bout à l'autre du tube, sans qu'on puisse la faire rester au milieu. On protége la fragilité du verre, en l'entourant d'une boîte en cuivre, ouverte endessus d'une fenêtre où l'on voit les mouvemens de la bulle. Des divisions également espacées tracées sur le verre et numérotées, servent de repères pour reconnaître si la bulle est en effet au milieu du tube; car la longueur de cette bulle diminue par la chaleur, qui dilate la liqueur, et augmente par le froid qui la condense plus que le verre. Le fabricant cale le tube dans sa boîte, de manière que la bulle arrive au milieu quand l'axe ou le patin qui le porte est horizontal.

Des systèmes de niveaux convenablement ajustés servent à attester si la colonne du cercle répétiteur est verticale, si le plateau est horizontal, si l'on a réussi à rendre le limbe vertical, etc. On devra suppléer à divers détails que nous supprimons comme faciles à deviner, pour rendre le niveau propre à ses fonctions, le régler, faire en sorte que dans toutes les révolutions la bulle revienne stationnaire entre ses repères, etc. Nous ajouterons que le rodage a été tellement perfectionné, qu'on est parvenu à indiquer quelle est la pente qui répond à une marche de la bulle de 1, 2, 3... millimètres : on a ainsi des *niveaux de pente* pour des inclinaisons de quelques secondes. (*V.* p. 49.)

105. Le *théodolite* est un instrument destiné à mesurer les angles après qu'il les a *réduits à l'horizon*. Dirigeant des rayons visuels d'un point à deux signaux, lorsqu'on a mesuré l'angle de ces rayons, ce n'est pas cet angle qu'on doit porter sur le plan qu'on veut dessiner, mais sa projection sur un plan horizontal. Cette projection s'obtient par un calcul que nous indiquerons plus tard. Quoique ce calcul soit facile, et qu'on le rende plus aisé encore à l'aide de tables construites d'après les formules qui résultent de la théorie, cela exige un temps et une peine qu'on a intérêt d'éviter; d'autant plus que la réduction des angles à l'horizon revient fréquemment et nécessite la mesure d'autres angles. Ces considérations rendent

précieux les instrumens où ces réductions sont toutes faites, et la Géodésie en fait un usage fréquent.

Les procédés de la Topographie sont trop imparfaits pour rendre cet instrument bien avantageux ; mais il n'en est pas de même en Géodésie, et l'emploi du théodolite répétiteur y est très utile, parce que cet instrument a toute la précision du cercle dont nous avons parlé : une fois établi d'après les mêmes principes, il rend superflue une description minutieuse, et se manœuvre à peu près de la même manière.

106. Le théodolite répétiteur est représenté figure 60 : un trépied solide en bois, semblable à celui du cercle, lui sert de support.

Le cercle ou *plateau* horizontal GV est divisé en degrés et fractions ; il est monté sur trois pattes K, K′, K″ : chacune de ces pattes porte sur la pointe d'une vis VV′V″ qui sert à *caler* ce cercle, qu'on appelle *azimutal*, et qui est ici d'un usage beaucoup plus important que celui qui est à la base de la colonne du cercle répétiteur.

La colonne centrale sur laquelle le cercle azimutal peut pirouetter porte en-dessous une *lunette d'épreuve* A′B′, ainsi nommée parce qu'elle n'a d'autre usage que d'attester, en la pointant sur un signal fixe et éloigné, que l'instrument, dans les manœuvres de l'opération, n'a pas éprouvé de torsion, ni de vacillation ; ou du moins quand cet effet a lieu, de le faire reconnaître, et de ramener l'instrument à sa situation primitive, à l'aide des vis de rappel dont il est pourvu.

Cette même colonne, construite comme il a été dit précédemment, porte en haut un autre cercle MM′ qui est vertical : ce cercle est armé d'une seule lunette AB, montée sur un axe central et perpendiculaire au limbe. Cette lunette sert à observer les signaux dont on veut mesurer soit les distances angulaires, soit les angles de hauteur. Les divisions de son limbe, les verniers de sa lunette et ses alidades, ne sont d'aucun usage dans le premier cas, attendu que les lectures se font sur le cercle azimutal, où l'on trouve les angles

réduits à l'horizon : au contraire ce cercle n'est pas consulté pour mesurer les hauteurs angulaires, qu'on doit lire sur le cercle vertical. Comme le poids de ce dernier cercle et de sa lunette est latéral à quelque distance de la colonne, et qu'il tend à la déverser, on fait équilibre à ce poids, en armant l'autre bout de l'axe horizontal de ce cercle d'une masse opposée, qui sert de lest, ainsi qu'il a déjà été expliqué. C'est l'arbre vertical de la colonne qui porte ce double poids, et on le soulage en faisant pivoter cet arbre sur une crapaudine inférieure, et en adaptant une lame d'acier dont le ressort soulève le poids total, et soulage les collets.

On doit concevoir que, lorsqu'on pointe la lunette vers deux signaux, le mouvement qu'on est obligé d'imprimer au cercle vertical, pour l'amener dans l'azimut de chaque objet, entraîne la colonne et son alidade, et que l'arc décrit par ce plan vertical, dans ses deux situations, est mesuré par l'arc que décrit l'alidade horizontale. On peut donc lire cet arc sur le cercle azimutal GV, et il est la mesure de l'angle demandé réduit à l'horizon. Bien entendu que la sûreté de l'observation exige que le cercle azimutal GV reste rigoureusement horizontal, et que la colonne reste exactement verticale, ainsi que le cercle MM′, dans toutes les positions; c'est ce qui est attesté par des niveaux à bulle d'air, convenablement disposés. Il faut en outre que l'axe de la colonne ne se torde pas, et la lunette d'épreuve garantit que cette condition est remplie. Pour ne pas jeter de la confusion dans la figure 60, nous avons supprimé le système des niveaux, ainsi que les vis de pression, plusieurs vis de rappel, etc. : il est facile de suppléer à ces omissions.

107. Ce n'est pas une simple alidade horizontale que la colonne entraîne dans sa rotation; mais un cercle entier concentrique au cercle azimutal auquel il se joint exactement en l'affleurant. Quatre verniers en croix permettent de lire quatre fois l'arc parcouru, afin qu'en prenant la moyenne des indications, le résultat soit, comme on l'a déjà dit, exempt

des erreurs de centration. Des loupes permettent de lire les subdivisions avec facilité, quand on en a éloigné les verres à la distance qu'exige la force de la vue de l'observateur. En outre, le cercle extérieur horizontal peut aussi tourner sur l'arbre vertical, soit indépendamment de la colonne, soit avec elle, selon qu'on le laisse libre ou qu'on l'y attache par une vis de pression, et dans toutes ses positions révolutives, ce cercle ne cesse pas d'être horizontal.

Ainsi, quand on a mis l'alidade horizontale, de sorte que la ligne de foi du vernier soit sur le zéro du cercle azimutal, et fixée à ce cercle par une vis de pression, on fait tourner la colonne qui les emporte l'un et l'autre, jusqu'à ce que l'objet de droite soit dans le plan du cercle vertical; et même, en rendant libre la lunette de ce cercle, on peut la pointer sur cet objet qu'on voit dans le champ, et le faire coïncider avec les fils du réticule, en s'aidant de la vis de rappel des petits mouvemens de la colonne, vis qui ne déplace pas la ligne de foi et la laisse au zéro de départ. On arrête alors le cercle azimutal extérieur, et l'on rend la liberté à la colonne et à son alidade, sans que ce cercle se déplace. On porte la lunette sur l'objet à gauche, en faisant décrire un arc à l'alidade, c'est-à-dire au cercle intérieur horizontal qui porte les verniers : cet arc est celui qu'on veut connaître, et on l'obtient avec précision, en remarquant que ce second pointé se fait en laissant le cercle azimutal rigoureusement immobile, et donnant à l'alidade les petits mouvemens par sa vis de rappel particulière. Voilà donc l'angle mesuré.

Voyons maintenant comment le théodolite est répétiteur.

Pour répéter l'angle dont il s'agit, serrez la vis P qui fixe l'alidade sur le cercle azimutal, et lâchez la vis H qui rend à ce cercle sa liberté; les deux cercles horizontaux resteront solidaires, et pourront tourner ensemble avec la colonne; l'alidade demeurera fixée en un point du limbe, où sa ligne de foi indique la graduation qu'on veut doubler. Faites tourner le tout sur l'arbre vertical, afin de pointer de nouveau l'objet à

droite, puis arrêtez ce mouvement en serrant la vis H. Le point du cercle azimutal que marque l'alidade est pris pour départ, au lieu de zéro; et si laissant le cercle extérieur fixe, desserrant la vis P, ce qui rend le cercle intérieur libre, on pointe l'objet à gauche, l'alidade décrira un second arc égal au premier, et qui s'y ajoutera : la somme des deux arcs sera double de celui qu'on cherche. On le triple en prenant ce nouveau point d'arrivée de l'alidade pour point de départ, pointant à droite, et ainsi de suite. Nous ne nous arrêterons pas plus long-temps à cette manœuvre; qui est celle dont nous avons déjà parlé.

108. Jusqu'ici le cercle vertical MM' n'a trouvé aucune application de sa graduation, de l'alidade et des verniers dont il est aussi pourvu, puisque les mesures qu'on voulait obtenir étaient tout-à-fait indépendantes des excursions verticales de la lunette du cercle MM'. Ce cercle est absolument construit comme celui qui fait partie essentielle du cercle répétiteur, et comme le cercle azimutal dont nous venons d'indiquer l'usage. Ainsi ce cercle vertical est gradué, porte un cercle concentrique à alidade, des verniers, vis de pression et de rappel, mouvemens indépendans ou solidaires autour de l'axe horizontal, enfin lunette à réticule. Cette lunette n'était utile que pour mesurer et répéter des angles situés dans des plans inclinés, et les donner réduits à l'horizon, et ses inclinaisons n'étaient l'objet d'aucune attention.

Mais si l'on veut obtenir la distance zénithale d'un astre ou d'un signal, c'est alors aux divisions du cercle vertical à la donner, et au contraire le cercle azimutal, ni sa lunette d'épreuve n'ont plus qu'une faible utilité. Et en effet, on peut reproduire ici tout ce qui a été dit du cercle répétiteur, quand on donne à son limbe la position verticale. Ainsi le théodolite sert à deux opérations, savoir : 1°. à observer des angles obliques et à les réduire à l'horizon, et 2°. à mesurer des distances au zénith. Mais il n'est point propre à donner les valeurs angulaires absolues des lignes inclinées à l'horizon; il faudrait des calculs spéciaux pour les déduire des angles observés.

Du reste, le cercle vertical du théodolite et sa lunette sont pourvus de vis de rappel E, pour produire les petits mouvemens, et d'un système de deux niveaux qui en sont l'appareil le plus indispensable. L'un de ces niveaux fait reconnaître si le cercle azimutal GV est parallèle à l'horizon, et si la colonne lui est perpendiculaire : on amène, par les vis V, V′ et V″, le cercle GV à la position où ce niveau laisse sa bulle au milieu, entre ses repères, dans toutes les révolutions de la colonne : on produit d'abord cet effet dans deux situations rectangulaires de l'alidade, en faisant les corrections moitié par les vis à caler, moitié par une vis de rappel dont un bout du niveau est armé. Quant à l'autre niveau, dont l'axe est perpendiculaire à celui dont on vient de parler, il atteste que le cercle MM′ est vertical, et son arbre horizontal. En donnant de même à la colonne un mouvement d'une demi-révolution, qui équivaut au retournement du niveau, on corrige les écarts de la bulle, partie en changeant l'inclinaison de l'arbre, partie en changeant celle du niveau. Enfin, il faut que dans toutes les situations qu'on fait prendre à ce cercle MM′ autour de la colonne, les bulles des deux niveaux demeurent au milieu des tubes, ou du moins que le déplacement en soit si faible, qu'on puisse le négliger, ou en tenir compte par le calcul.

CHAP. III. — GÉOMORPHIE TERRESTRE.

Principes généraux, stations, signaux.

109. Lorsqu'on veut déterminer les positions relatives des points les plus remarquables d'une contrée fort étendue, telle qu'une province, un royaume, on y distingue d'abord des lieux assez élevés pour permettre, lorsqu'on y est placé, de découvrir au loin les régions environnantes : ce sont les *stations* d'où l'on fait les observations. On y construit, quand cela est nécessaire, des abris, des *signaux* qu'on puisse apercevoir des stations environnantes. On éloigne le plus qu'on

peut ces stations (8 à 10 mille mètres et plus) autant pour économiser le temps, la peine et les dépenses, que pour arriver à des résultats plus précis, ainsi qu'on le dira bientôt. Jointes, par la pensée, par des lignes droites qui traversent l'espace, ces sommités déterminent une sorte de réseau formé par un enchaînement de grands triangles, qui, par leur continuité, couvrent tout le pays qu'on veut lever. On calcule, ou l'on mesure tous les élémens de ces triangles, comme on l'expliquera par la suite.

L'ingénieur mesure avec un soin extrême tous les angles de ces triangles, ainsi qu'une longueur qu'il appelle *une base*. Cette base est l'un des côtés de nos triangles, et le calcul lui apprend à connaître les longueurs de tous les autres côtés parce que cette base fait partie de la triangulation générale. Il appelle ce réseau un *canevas trigonométrique*.

Ces divers triangles sont, il est vrai, situés dans l'espace, et forment un polyèdre à faces triangulaires qui enveloppe le sol. Mais en abaissant une verticale de chaque sommité, cette droite rencontre un point de la surface prolongée sous terre du niveau des mers. Cette surface est considérée en Géodésie comme étant celle du sphéroïde terrestre, parce qu'on y néglige les petites inégalités des montagnes, comme étant tout-à-fait insensibles comparativement aux immenses dimensions du globe. Ainsi l'on substitue, par la pensée, aux triangles rectilignes qui font, dans l'espace, le sujet des observations, d'autres triangles curvilignes tracés à la surface de ce sphéroïde, et c'est par le calcul, qu'on détermine la forme et les dimensions de ces triangles. Projeter ainsi sur le sphéroïde terrestre les triangles observés, c'est ce qu'on appelle les *réduire à l'horizon*, et comme on trouve que la figure du sphéroïde diffère extrêmement peu d'une sphère, on est en droit de supposer que chacune de ces projections est faite sur une sphère d'un certain rayon, attendu la petitesse des dimensions de chacun de ces triangles : ce rayon est d'ailleurs variable avec les lieux.

On nomme *triangle du premier ordre* ceux qui ont ainsi les

plus grandes dimensions dans le réseau. Ensuite on choisit d'autres stations dans leur intérieur, qu'on rattache aux premières par des observations, dont la précision est encore très grande, quoique moindre que pour les triangles primitifs. On forme ainsi des *triangles du* 2[e] *ordre* (qui sont moins étendus que les 1[ers], ceux-ci servent à leur tour à en former de 3[e] ordre. Dès que les côtés n'ont plus que six cents à mille mètres de longueur, leur courbure est si peu prononcée qu'on est en droit de les regarder comme rectilignes. Ces longueurs servent alors de bases pour déterminer la position des objets de détail, ce qui rentre dans les procédés de la *Topographie*. Ainsi la Géomorphie embrasse la détermination exacte des triangles de 1[er], 2[e] et 3[e] ordre, et leurs projections sur la surface du sphéroïde terrestre.

110. On s'est aussi proposé de trouver la longueur d'un arc très étendu qui traverse le réseau, par exemple, l'arc du méridien. On sent qu'il serait tout-à-fait impossible de mesurer effectivement cette longueur : ce genre d'opération est extrêmement difficile pour des bases de 10 à 12 mille mètres situées horizontalement; mais s'il s'agit d'un grand arc terrestre, les inégalités du terrain et les obstacles qu'il présente ne permettent même pas cette mesure actuelle. On fait en sorte que cet arc traverse une série des triangles du réseau, ou s'en écarte peu, et à l'aide du calcul, on obtient les longueurs des diverses parties, ainsi que nous l'expliquerons.

C'est ainsi qu'on est parvenu à connaître la longueur de l'arc du méridien terrestre qui traverse la France, de Dunkerque à Barcelone, arc qu'on a depuis prolongé au-delà de ces limites. On a trouvé aussi des arcs perpendiculaires à cette méridienne. De ces opérations, on a pu conclure la figure et les dimensions du sphéroïde terrestre, la longueur du mètre, etc.

Il faut aussi connaître la *longitude* et la *latitude* de chaque station, ainsi que l'*azimut* de chaque côté de triangle. Les observations astronomiques font connaître ces élémens, du

moins pour quelques stations ; le calcul les donne pour les autres.

Pour obtenir le relief du terrain, il est nécessaire d'en faire le *nivellement*, afin de connaître l'élévation de chaque station au-dessus du sol environnant, et par suite au-dessus de la surface du sphéroïde terrestre : c'est ce qu'on appelle l'*altitude*.

Tels sont les sujets que nous nous proposons de traiter dans la Géomorphie.

111. Voyons comment les stations doivent être coordonnées entre elles pour conduire à des opérations précises.

Soient a, b, c (fig. 32) les côtés d'un triangle rectiligne quelconque ; A, B, C les angles qui leur sont respectivement opposés. On a

$$a \sin B = b \sin A \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Cette équation donne le côté a, lorsqu'on connaît A, B et b. Or si l'on a commis une petite erreur dans la mesure de ces angles, savoir y sur A, y' sur B, b étant d'ailleurs supposé exact, on fera usage de valeurs défectueuses, et ce qu'on prend pour A et B, est réellement $A + y$, $B + y'$, qu'on emploie au lieu de A et B ; l'équation (1) donnera pour a une valeur dont x sera l'erreur ; ainsi l'on doit changer dans l'équation (1), a en $a + x$, B en $(B + y')$, et A en $(A + y)$,

$$(a + x) \sin (B + y') = b \sin (A + y).$$

Développons ces sinus, et comme y et y' sont toujours très petits, mettons ces arcs pour leurs sinus, et 1 pour leurs cosinus ; il viendra

$$(a + x) (\sin B + y' \cos B) = b (\sin A + y \cos A).$$

Réduisons, à l'aide de l'équation (1), et supprimons le produit $xy' \cos B$, qui est du 2ᵉ ordre,

$$x \sin B + ay' \cos B = by \cos A;$$

enfin mettons $\frac{a \sin B}{\sin A}$ pour b, nous aurons

$$x = a\,(y \cot A - y' \cot B).$$

Telle est l'erreur x qu'on commet sur le côté a, par l'effet des erreurs d'observation y et y' sur les angles A et B.

Mais x est visiblement d'autant plus petit que A est plus près d'être égal à B, en même temps que y à y' : et l'erreur sur a est nulle, quand il arrive que celles de A et de B sont égales et dans le même sens, en même temps que $A = B$: dans ce cas, quoique obtenu par des valeurs angulaires défectueuses, le côté a sera exactement donné par le calcul ; et si les erreurs y et y' sur A et B, sont égales et de signes contraires, l'équation devient $x = ay\,(\cot A + \cot B)$, que la condition $A = B$ rend un *minimum* : en effet, on a

$$x = ay\left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}\right) = ay\,\frac{\sin (A+B)}{\sin A \sin B}.$$

Or en retranchant l'une de l'autre les équations (2) (p. 35), on trouve

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B) = \cos (A-B) + \cos C\,;$$

donc $$x = ay.\frac{2 \sin C}{\cos (A-B) + \cos C},$$

expression que $A = B$ rend visiblement la plus petite possible.

On voit qu'il est avantageux, pour atténuer les erreurs sur les angles, soit que les erreurs soient dans le même sens ou en sens contraire, que le *triangle soit équilatéral*, et qu'alors l'erreur qui en résulte pour a peut être tout-à-fait nulle. On regarde comme certain que *lorsque les côtés cherchés sont presque égaux chacun à la longueur mesurée, l'erreur des angles est insensible*. Mais comme cette condition est souvent impossible à remplir, on se contente de ne jamais admettre d'angle de triangle qui soit $< 30^\circ$, afin de se rapprocher autant qu'on peut de l'état ci-dessus. On dit alors que *le*

triangle est bien conformé. Autant que possible, les stations doivent être choisies conformément à ce principe.

112. Supposons maintenant que la mesure du côté b soit fautive, mais que les angles A et B soient exactement connus. La vraie valeur de b sera remplacée par $b+z$, en même temps que a par $a+x$, les erreurs étant z et x,

$$(a+x)\sin B = (b+z)\sin A;$$

d'où $$x \sin B = z \sin A, \quad x = z\frac{\sin A}{\sin B}.$$

Ainsi plus l'angle B est petit, et plus l'erreur z du côté opposé influe sur la valeur qu'on trouve pour a, où elle s'agrandit, pour ainsi dire. Lorsque $B = 30°$, valeur qu'on a reconnue convenable sous d'autres rapports, on a $\sin B = \frac{1}{2}$, $x = 2z \sin A$. Mais alors $A + C = 150°$, et chacun des angles A et C doit s'approcher de $75°$; sin A est donc peu différent de 1, et x de $2z$. Ainsi l'erreur z commise sur le côté b, se porte sur le côté a, par suite du calcul qui fait connaître cette longueur, et même peut devenir double. S'accroissant ainsi de triangle en triangle, on peut en définitive arriver à des valeurs très défectueuses des côtés qui terminent la chaîne.

Concluons de là que dans un triangle bien conformé, une petite erreur commise sur la longueur d'un côté, a beaucoup plus d'inconvénient que celles qu'on fait sur les angles; parce que la 1re s'agrandit par le calcul des autres côtés du triangle, et peut même devenir double, dans des cas d'ailleurs assez favorables : tandis qu'il peut arriver que les erreurs des angles n'altèrent nullement les valeurs des côtés qu'on en déduit. Il faut donc mesurer la base avec une extrême précision, sous peine de voir les erreurs s'accumuler de proche en proche, dans les calculs successifs des triangles du réseau.

113. Il est à peu près impossible que la base mesurée ne soit pas quelque peu fautive ; et cette base est nécessairement fort courte comparée à l'étendue de la contrée qu'on veut

lever. Cette base est un côté d'un 1[er] triangle qui se lie à un 2[e], celui-ci à un 3[e], etc., en agrandissant peu à peu ces triangles. Lorsqu'ils sont tous presque équilatéraux, on a autant de garantie d'exactitude qu'on peut en désirer, et l'on évite ainsi les accumulations d'erreurs. Mais lorsque l'opération entière est terminée, il importe de s'assurer de son exactitude, et de celle des calculs qui ont fait connaître tous les côtés de proche en proche. La vérification se fait en mesurant une autre base très éloignée de la 1[re] et formant l'un des côtés de triangle. Alors cette longueur se trouve connue de deux manières, savoir, par le calcul, et par la mesure directe : ces deux résultats doivent s'accorder pour que la triangulation soit exacte.

On obtient encore d'autres moyens de vérification par les longitudes et latitudes des stations et les azimuts des côtés des triangles ; car en observant astronomiquement, ainsi que nous l'exposerons, ces valeurs angulaires à l'une des stations, on peut, par le calcul, en déduire, de proche en proche, les graduations de ces arcs pour toutes les autres stations. Cette théorie fera bientôt le sujet de nos recherches. Mais comme on peut aussi réitérer les observations astronomiques en divers lieux du réseau, on pourra juger par la coïncidence des résultats de l'observation directe et du calcul, s'il ne s'est pas produit fortuitement des erreurs, et même des compensations propres à accorder les bases mesurées, sans pourtant provenir d'opérations absolument exactes.

Laplace a démontré, par le calcul des probabilités, qu'il ne faut employer que le moins grand nombre possible de triangles de premier ordre, couvrant l'étendue entière du pays, en leur donnant les plus grandes dimensions permises par les localités, et par la puissance des lunettes des instrumens.

114. Les *signaux* doivent être établis de manière à être nettement distingués de loin : un poteau vertical, un cône renversé, sont d'excellentes mires. Les clochers, les tours, ne doivent servir, qu'autant qu'on peut s'y placer commodé-

ment pour observer, et surtout avec une grande stabilité. Les flèches, moulins en tour, et autres signaux peuvent servir aussi; en ayant soin de faire les réductions à l'axe du signal et au centre de station (n°s 117 et 120), afin de ne pas laisser d'incertitude sur le point du sol où le signal se projette. On ne peut guère employer un arbre sans branches, un moulin à cage, si ce n'est pour des triangles du troisième ordre, parce qu'il ne faut pas que les erreurs qui en résulteraient puissent se propager sur d'autres stations principales.

Le meilleur des signaux est un disqne en tôle peint en noir, et percé, au centre, d'un trou par lequel on peut voir la lumière du jour. Ce disque doit pouvoir pirouetter autour du diamètre vertical, en y adaptant une tige servant d'axe de rotation, sur laquelle on arrête le disque dans toutes les positions qu'il peut recevoir : la surface peut être ainsi présentée successivement en aspect aux stations environnantes.

On se sert aussi très souvent, pour signal, d'une petite pyramide quadrangulaire renversée, qu'on enfile sur un poinçon surmontant l'édifice.

On espérait tirer un parti utile des feux de Bengale et des réverbères à réflecteurs paraboliques, pour les observations nocturnes : c'était un moyen d'employer le temps, lorsqne le ciel est chargé de vapeurs. Mais on y a renoncé : l'horizon n'est jamais assez pur pendant la nuit, et les réfractions terrestres accroissent alors les causes d'incertitude.

115. On aperçoit mieux un signal, quand *il se projette sur le ciel*, que lorsqu'on le voit peint sur la terre ou les arbres. Or, il est facile de juger si, étant placé en A(fig. 57), le signal sera vu de B projeté sur le ciel, sans aller en B. En effet, prenez les distances zénithales de B, et de la montagne C qui se trouve opposée, dans la même direction, savoir les angles BAZ, CAZ; le point C tombe au-dessus et au-dessous de la direction ABI, selon que la somme de ces angles est $>$ ou $<$ 180°. Ainsi l'on fera en sorte d'élever le signal A de manière que $BAZ + CAZ > 180°$.

Au reste, comme on ne peut pas toujours remplir cette condition, on fera bien de peindre en blanc les signaux qui se projettent sur la terre ou les forêts, et en noir ceux qui se peignent sur le ciel.

116. On est souvent obligé de construire exprès des observatoires pour y abriter l'ingénieur, lorsque aucun édifice ne peut servir en même temps de signal et de logement. On donne à ces constructions la forme d'une pyramide quadrangulaire tronquée près du sommet (fig. 64) : le prolongement supérieur S de l'axe sert de signal, et l'observateur place son instrument au point C de projection de cet axe sur le sol. Les arêtes sont en bois de charpente, solidement plantées en terre, et liées par des traverses qu'on assemble à tenons et mortaises avec un poinçon central. On recouvre les quatre faces d'une toiture en planches, qu'on fait descendre jusqu'à 2 mètres de terre, afin de laisser voir les lieux circonvoisins. Des toiles tendues du côté du vent complètent l'abri. Quand l'opération est terminée, on détruit ce signal; mais on implante une borne carrée en C, sur laquelle on sculpte deux diagonales, dont la croisée est dans l'axe du signal.

Les vérifications qu'on peut être dans la nécessité de faire par la suite, exigent qu'on puisse retrouver exactement les points C de station, et les extrémités des bases. Des bornes ainsi fixées solidement en terre sont des témoins peu dispendieux et faciles à découvrir.

Lorsqu'on jugera nécessaire de construire un signal, on devra l'élever assez haut pour qu'on puisse le distinguer des stations environnantes. Or, l'expérience apprend qu'il faut que ce signal apparaisse de ces lieux sous un angle d'au moins $31''$: et comme $\tang 31'' = 0{,}00015$, la hauteur AB (fig. 56) du signal étant $AB = AC \tang C = AC \times 0{,}00015$, on voit qu'il faut que cette hauteur soit d'au moins quinze fois la cent millième partie de la distance d'où l'on doit l'observer. Si cette distance est, par exemple, de 5 lieues, 20000 mètres, qui est une portée assez ordinaire, il faut que le

signal soit élevé de plus de 3 mètres. Dans la triangulation française, on a donné aux signaux le sept-millième de la distance d'où l'on devait les voir. La base du signal est environ la moitié de sa hauteur.

117. Il arrive souvent que le signal A qu'on a visé des stations B et C (fig. 65), n'est pas de nature à permettre qu'on s'y place. Il faut alors établir l'instrument en un lieu voisin O, d'où l'on mesure l'angle BOC = O : mais il faut ensuite corriger cet angle O, pour le ramener à la valeur BAC = A, qu'on aurait trouvée si l'on avait stationné en A. C'est ce qu'on appelle *réduire à l'axe du signal*. Appelons a, b, c, les trois côtés (qu'on suppose connus ou à fort peu près) du triangle ABC.

Supposons d'abord qu'il s'agisse du triangle B'AC, en sorte que le point O soit situé dans la direction du côté B'A. Menons OE parallèle à AC, et faisons AO$=m$, et l'angle ACO$=\theta=$COE. Nous connaissons l'angle B'OC $=\alpha$, et il s'agit de trouver l'angle $A=\alpha+\theta$. Or, le triangle CAO donne

$$\frac{\sin C}{m}=\frac{\sin\alpha}{AC},\quad \text{d'où } \sin C=\sin\theta=\frac{m\sin\alpha}{b}.$$

Comme m est toujours très petit par rapport à b, $\sin\theta$ est très petit, et peut être remplacé par θ, ou plutôt par $\theta\sin 1''$, pour que θ désigne le nombre de secondes de cet arc (p. 37). Ainsi,

$$A=\alpha+\frac{m\sin\alpha}{b\sin 1''}.$$

Maintenant, si le triangle est ABC, et que la station O ne soit située dans la direction d'aucun côté de ce triangle, on a

encore $$B'AC=\alpha+\theta=\alpha+\frac{m\sin\alpha}{b\sin 1''},$$

$$B'AB=\alpha'+\theta'=\alpha'+\frac{m\sin\alpha'}{c\sin 1''};$$

donc $$A=O+\frac{m}{\sin 1''}\left(\frac{c\sin\alpha+b\sin\alpha'}{bc}\right)\ldots\ldots\quad(1)$$

Pour appliquer cette formule, il faut observer que si la station O est située de manière que l'un des angles θ ou θ', soit disposé de l'autre côté de la ligne AC, ou AB, cet angle devient soustractif. Ainsi les deux termes $c \sin \alpha$, $b \sin \alpha'$ ne sont ensemble positifs qu'autant que la station O est comprise dans l'angle pAq que forment les côtés prolongés du triangle; ils sont tous deux négatifs, quand O est situé dans l'angle BAC: enfin leurs signes sont contraires, quand O est situé dans l'angle CAq ou BAp, comme figure 63.

118. C'est même ce dernier cas qu'on préfère, quand on le peut, afin d'affaiblir la correction de l'angle observé O, et de se placer en un lieu d'où l'on puisse plus facilement apercevoir à la fois les trois points A, B et C. Et même il peut arriver que les deux termes s'entre-détruisent, et que la correction soit nulle. Cela a lieu quand on a $c \sin \alpha = b \sin \alpha'$, d'où

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{b}{c}\text{; or, on a } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin (A + C)}{\sin C},$$

avec $O = A = \alpha - \alpha'$; donc on trouve $\alpha = A + \alpha'$,

$$\frac{\sin (A + C)}{\sin C} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = \frac{\sin (A + \alpha')}{\sin \alpha'};$$

développant et faisant les réductions,

$$\frac{\sin A \cos C + \sin C \cos A}{\sin C} = \frac{\sin A \cos \alpha' + \sin \alpha' \cos A}{\sin \alpha'};$$

d'où $\cot C = \cot \alpha'$.

Ainsi (fig. 63) l'angle observé O n'exige aucune correction pour devenir A, toutes les fois que $C = \alpha'$ ou $= 180° + \alpha'$. Alors le quadrilatère ABCO est inscriptible au cercle, puisque les angles BCA et BOA ont même mesure dans le cercle circonscrit au triangle ABC. On peut choisir la station O, de manière à remplir cette condition.

119. Mais dans tout autre cas, et c'est ce qui arrive le plus souvent, l'angle O doit subir une correction que détermine l'équation (1). Voyons à préparer cette expression pour le calcul

des logarithmes. Le triangle ABC donne

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin(A + C)}{\sin C};$$

d'ailleurs $O = \alpha + \alpha'$ (fig. 65) est sensiblement $= A$, surtout dans la petite fraction de correction : ainsi $\alpha = A - \alpha'$; en substituant, l'équation (1) devient

$$A = O + \frac{m}{b \sin 1''}\left[\sin(A - \alpha') + \frac{\sin(A + C)\sin \alpha'}{\sin C}\right].$$

Réduisant au même dénominateur, développant, etc.,

$$A = O + \frac{m \sin A \ \sin(C + \alpha')}{b \sin C \sin 1''} \ldots\ldots \quad (2)$$

Ce dernier terme exprime, *en secondes*, la correction que doit recevoir l'angle observé $O = BOC$, pour devenir $A = BAC$. Dans tout ceci, α et α' sont les distances angulaires des points B et C au signal A, au centre duquel on devrait stationner.

120. Quand le signal A (fig. 70) est l'axe d'une tour cylindrique où l'on ne peut stationner, le centre A n'est pas visible du point voisin O où l'on se place. Alors les distances angulaires α et α' des lieux B et C (fig. 65) au point A ne peuvent être mesurées. Voici ce qu'on doit faire dans ce cas. On mène deux tangentes Ol', Ol, à la tour (fig. 70) et la ligne Ok qui coupe l'angle $l'Ol$ par moitiés, détermine le point k sur la direction OA. Ainsi l'on mesure les angles BOl', BOl, dont la moyenne ou demi-somme est l'angle $BOk = \alpha$. Voilà donc la direction OA connue.

Quant à la distance $OA = m$, si l'on ne peut obtenir directement le rayon $Ak = r$, on mesurera $Ok = i = m - r$, et l'une des tangentes $Ol = t = Ol'$: on aura

$$Ol^2 = OA^2 - Al^2, \quad \text{ou} \quad t^2 = m^2 - r^2 = (m + r)i.$$

Cette éq. donne $m + r = \frac{t^2}{i}$; et comme $m - r = i$, en ajoutant ces éq., on a $2m = i + \frac{t^2}{i}$.

On peut donc appliquer la théorie précédente. Observez que a et m n'entrant que dans des termes forts petits, il n'est pas nécessaire d'en avoir les valeurs bien exactement. Les éq. contiennent b et c, que les angles B et C ont fait connaître : d'ailleurs on est en droit de supposer $A = 0$ partout où l'on n'exige pas une grande précision, et la théorie qui nous occupe est dans ce cas.

De la mesure des bases.

121. De toutes les opérations géodésiques, celle qui paraît la plus facile, et qui cependant présente le plus de difficultés, est la mesure d'une longueur, lorsqu'on veut l'obtenir avec une grande précision, à cause des soins infinis qu'il faut prendre. Il ne suffit plus alors, comme en Topographie (*), d'évaluer la distance soit au pas, soit en portant une chaîne métrique ; car nous savons que les plus légères erreurs s'agrandissent sur les côtés du réseau qu'on obtient par le calcul (n° 112). Après avoir exploré les localités, on choisit un terrain uni et découvert, à peu près horizontal et rectiligne, de la longueur d'environ 10000 mètres. On y trace une ligne droite avec des piquets ou *jalons* verticaux et bien dressés. Ces jalons sont ferrés au bout qui entre en terre ; l'autre bout est peint en blanc, pour qu'on l'aperçoive de loin. Comme l'ingénieur est pourvu, pour son opération, d'un cercle répétiteur ou d'un théodolite, il s'en sert à la manière d'une lunette des passages : la colonne

(*) Pour mesurer l'erreur dont la chaîne d'arpenteur est susceptible, M. Moynet a fait diverses expériences à l'île d'Elbe, et il n'a trouvé que 56 centimètres d'erreur sur une base de 5165^m,82 (du fanal à Castello).

Les levés au pas, qu'on fait surtout en présence de l'ennemi, se font en comptant 3 pieds par pas, ou 1 toise pour chaque double pas. Au reste, chaque personne peut, par des épreuves, s'assurer de la longueur de ses pas, car le plus souvent le double pas n'a que 5 pieds, ou 1 toise moins $\frac{1}{6}$. Le temps que le bruit du canon met à se faire entendre est d'une seconde par 180 toises, par un temps calme; mais ces évaluations sont très défectueuses.

ainsi que le limbe de l'instrument, étant disposés verticalement, le tube de la lunette peut basculer, de manière que son axe optique décrive un plan vertical. Les fils du réticule sont susceptibles de mouvemens qui leur ôtent toute parallaxe, ainsi qu'il a été expliqué page 100. Les ingénieurs sont très exercés à régler cet instrument. On s'en sert pour aligner tous les jalons de 200^m en 200^m, dans une ligne exactement droite.

On porte ensuite le long de cette ligne des règles dont la longueur est exactement connue. On a deux de ces règles égales entre elles, ou dont la différence est fort petite, et l'on prend pour longueur de chacune leur moyenne. On dispose ces règles bout à bout et successivement selon la direction jalonnée, transportant en avant celle qui se trouvait en arrière, alignant avec un grand soin, sur les jalons, et mettant les bouts en contact immédiat.

122. Les règles de bois sont préférables, parce que la dilatation paraît agir dans le sens transversal, et que la chaleur ne les allonge pas. On les garantit des effets de l'humidité en les trempant dans l'huile de lin bouillante, et les enduisant d'un vernis. On les construit en assemblage, comme le montre la figure 68, afin qu'elles ne se déjettent pas. La longueur en est connue avec précision, par un étalonnage dont nous traiterons plus loin. Aux deux bouts sont des lames de fer, pour que le frottement ne les use pas; et l'on taille ces bouts en biseau, à tranchant mousse, afin de rendre le contact facile à opérer. Quelquefois on préfère conserver à ce bout la forme parallélépipède, et l'on implante un clou de métal à tête convexe : c'est sur cette espèce de segment sphérique qu'on établit le contact. La longueur de la règle est alors la distance entre les deux points les plus éloignés des convexités de ces surfaces. (*Voy.* les profils fig. 68.)

123. On a deux trépieds très solides, sur lesquels on pose un madrier un peu plus court que la règle ; on place ensuite la règle sur ce support. La plate-forme du trépied est percée d'un trou prismatique dans lequel entre une tige de bois moulée

sur ce tron, et l'on peut arrêter la tige par une vis de pression à différentes hauteurs. Le madrier étant porté sur une tablette fixée à cette tige, on conçoit qu'on peut le disposer horizontalement. Ainsi la règle sera amenée à être alignée, horizontale, et affleurant le bout de la règle déjà établie précédemment. On fixe la règle sur le madrier, dans sa position définitive, avec des courroies.

Lorsque le sol fait des plis, comme on ne pourrait faire affleurer les bouts contigus, on dispose l'une des règles plus bas que l'autre et l'on s'assure que les deux bouts sont exactement dans la même verticale, en les mettant en contact avec un fil-à-plomb fort délié. Le poids plonge dans un verre d'eau pour que le vent ne le balance pas. Ce procédé est même plus sûr que le contact même, parce qu'on doit éviter le *recul,* produit par quelque petit choc involontaire. Il faut, dans ce cas, ajouter à la longueur de la règle, l'épaisseur du fil-à-plomb; quantité qui, bien que minime, n'est pourtant pas négligeable, attendu qu'elle se répète autant de fois que la longueur même de la règle.

124. On adapte souvent à la règle un appareil qui rend le contact très facile à opérer. C'est une réglette logée dans l'épaisseur du bois, retenue entre deux rainures : elle est mobile à l'aide d'un pignon et d'une crémaillère, en sorte qu'on peut en faire saillir une partie au bout de la règle, par un mouvement très lent. Cette réglette porte une ligne de foi et un vernier, qui glisse le long d'une échelle divisée en parties égales et tracée sur la règle même, ce qui permet de lire la longueur dont on a fait saillir la réglette. La longueur totale de la règle se compose de sa longueur primitive d'étalonnage, plus de la longueur saillante de la règlette. Telles étaient les règles qui ont servi à mesurer les bases de Melun et de Perpignan. A l'aide d'une loupe, on lisait la longueur de la réglette jusqu'aux 100000e de toise. On donne le nom de *languette* à cette pièce mobile. (*Voy.* la description de cet appareil dans *la Base du système métrique* et la *Géodésie* de M. Puissant.)

125. On donne aux règles la position horizontale en se servant d'un *niveau à perpendicule* perfectionné (*voy*. n° 48) : il est plus facile à employer que le niveau à bulle d'air. Les règles égales AC, BC (fig. 67) forment un triangle isoscèle ACB, et sont maintenues à distance par un arc de métal *aEb*. Au centre C de cet arc, est suspendue une alidade CD qui tourne autour de C, et porte en D une ligne de foi et un vernier. L'arc est divisé en degrés, et l'on peut lire la minute à l'aide du vernier (n° 9).

Dans une direction perpendiculaire à l'alidade, est fixé un petit niveau à bulle d'air *cf*, sur lequel on voit tracées des divisions égales, afin de pouvoir juger quand les deux extrémités de la bulle répondent à des points de même numéro, les divisions étant numérotées à partir de zéro au milieu du tube, et dans les deux sens. Les graduations de l'arc *ab* ont aussi le zéro au milieu E de cet arc.

L'instrument est construit de manière que l'alidade marque zéro quand la base AB est horizontale, et que la bulle est entre ses repères ; et il faut qu'en retournant l'instrument jambe pour jambe, les mêmes conditions subsistent. Car si la ligne AB n'étant pas horizontale, on y applique l'instrument et que, la bulle étant amenée entre ses repères, on lise 3° par exemple, en retournant l'instrument on devrait encore lire 3°, sous les mêmes conditions, si le niveau est bien réglé. Mais admettons qu'on lise 1° ; on en conclura que la somme 3° + 1° est le double de l'inclinaison de AB, parce que, dans les deux situations, l'alidade a pris la même direction par rapport à la verticale. Ainsi cette inclinaison est ici 2°, du côté où la 1re graduation a été lue sur l'arc.

Il faudrait aussi parler de la vis de rappel qui donne les petits mouvemens à l'alidade, et de quelques autres détails de construction. Mais on devine aisément ces modifications, qu'on trouve décrites T. 2, p. 9, du *Système métrique*.

126. Comme on perdrait beaucoup de temps à donner aux règles des positions horizontales, on préfère leur laisser

prendre une petite inclinaison (de 2 à 3 degrés au plus), qu'on mesure ainsi qu'on vient de le dire. On lit la graduation indiquée par l'alidade, tant avant qu'après le retournement; ajoutant les deux indications, on a le double de l'inclinaison θ. Il reste ensuite à réduire la règle à l'horizon par le calcul, c'est-à-dire à en calculer la projection horizontale.

127. *Réduction des règles à l'horizon.* Soit CB (fig. 56) la règle, CA sa projection horizontale, AB la verticale, θ l'angle C d'inclinaison : on cherche CA et AB, connaissant CB et l'angle C. Le triangle ABC donne $CA = CB \cos \theta$. Or θ est un très petit angle, et cette valeur de CA, ne serait pas calculée avec assez de précision. Il est donc plus convenable de chercher l'excès x de la longueur CB sur CA $x = CB - CA$; on a $\cos \theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, au 3ᵉ ordre près, d'où $CA = CB\,(1 - \frac{1}{2}\theta^2)$ et $x = \frac{1}{2} L \theta^2$, en faisant $CB = L$, longueur de la règle, ou plutôt, en exprimant θ par son nombre de minutes (*voy.* p. 37) :

$$x = -\tfrac{1}{8} L (2\theta)^2 \sin^2 1' = - PL (2\theta)^2.$$

On trouve de même pour la différence AB de niveau

$$y = L \sin \theta = \tfrac{1}{2} L (2\theta) \sin 1'.$$

L'instrument fait connaître l'arc (2θ) par le retournement, et les calculs sont très faciles. La constante $P = \frac{1}{8} \sin^2 1'$, et l'on trouve $\log P = \bar{8}.0243622$; $\log (\frac{1}{2} \sin 1') = \bar{4}.1626961$. On exprime l'arc (2θ) par son nombre de minutes.

On abrége les calculs en construisant une table d'où l'on peut tirer les valeurs de x et de y pour toutes les inclinaisons (2θ).

128. *Correction de température.* Les variations de température du matin au soir font éprouver aux règles des changemens de longueur, quand elles sont en métal : cet effet ne doit pas être négligé. On note les températures aux époques où elles ont le plus varié, par exemple de 2 à 3 degrés, et l'on suppose que dans chaque intervalle de temps, il a régné une température constante égale à la moyenne entre les deux



extrêmes. Un thermomètre logé dans la règle même sert à connaître les changemens qu'elle éprouve, ainsi qu'on va le dire.

Dans les règles employées pour la grande triangulation française, le thermomètre était métallique. C'était une réglette de laiton, logée dans une espèce de canal pratiqué le long et dans l'épaisseur de la règle, où cette réglette était maintenue entre deux rainures. L'un des bouts de la réglette était invariablement fixé à la règle par des vis ou une soudure, l'autre était libre. Comme les métaux de la règle et de la réglette étaient différens (en platine et en cuivre), leur dilatation n'était pas la même pour la même variation de température. Deux traits qui se trouvaient en coïncidence sur l'une et l'autre à un certain degré thermométrique, cessaient d'y être à un autre degré. On conçoit qu'à l'aide d'une loupe et d'un vernier, on pouvait aisément lire sur les divisions de la règle, la quantité dont d'égales longueurs de cuivre et de fer se sont plus allongées l'une que l'autre, sous l'influence de la chaleur, et par conséquent les variations de température. Tel est le système qu'on a adopté pour mesurer les changemens de longueur des règles, à l'aide d'un thermomètre métallique que porte la règle dans son épaisseur : les degrés y sont gravés, et l'on n'a que la peine de lire. Il reste ensuite à calculer les longueurs correspondantes à ces températures, ainsi qu'on va l'expliquer.

Il importe d'abriter les règles des rayons solaires; on les recouvre d'une espèce de toit en planches posé sur le madrier : les deux bouts de ce toit sont armés de pointes verticales qui servent à aligner les règles dans la direction voulue.

Pour éviter les erreurs, chaque lecture est faite deux fois, pour la languette, le thermomètre métallique et l'inclinaison de la règle. Les mesures sont inscrites sur deux registres, qu'on a soin de collationner avant de passer outre à une nouvelle mesure.

129. *Étalonnage.* Donnons connaissance des procédés qui servent à déterminer la longueur exacte des règles. Il faut pour cela les comparer à quelque autre longueur connue. On se

sert d'un instrument appelé *comparateur,* qui mesure, en les agrandissant, les plus petites différences de longueur entre deux règles superposées l'une à l'autre, et ayant un de leurs bouts appuyé sur un arrêt fixe. Nous ne décrirons pas cet instrument (*voy. le Système métrique*, T. 3, p. 464) ; nous dirons seulement qu'un levier portant sur les extrémités libres, amplifie considérablement les plus petites différences de longueur, et en donne la mesure. Ainsi l'on saura quelle est la longueur de la règle comparée à celle de l'étalon. Mais il faut avoir égard à la nature de leurs substances et à la température.

130. On a reconnu que pour un changement de 1° centigrade l'unité de longueur varie de la quantité α, donnée par la table suivante :

Platine............ $\alpha = 0,0000085655$.
Laiton............ $\alpha = 0,0000187785$.
Fer doux forgé..... $\alpha = 0,0000122045$.
Acier non trempé... $\alpha = 0,0000107915$.

C'est ce qu'on appelle la *dilatation linéaire*. Ainsi le mètre de cuivre qui passe de 0 à 100°, s'allonge de $0^m,0018778$5, ou près de 2 millimètres. Un effet aussi considérable ne peut être négligé dans la mesure des bases ; c'est au reste ce dont on jugera bientôt.

Soit l la longueur d'une règle de métal à une température donnée, l désignant un nombre quelconque de mètres, toises, pieds, etc. Si le thermomètre monte de t degrés centigrades, on a l'allongement de l'unité par la proportion $1° : \alpha :: t : \alpha t$, α étant le nombre qui répond dans la table au métal de la règle. Ainsi la longueur l s'allonge de $\alpha t l$, et devient pour t degrés

$$L = l(1 + \alpha t)\ldots\ldots \quad (1)$$

131. 1er Cas. Si la règle est en bois et l'étalon en métal, on commence par calculer la longueur L de cet étalon, sous la température actuelle, connaissant celle l qu'il avait à zéro :



Ce nombre l est ordinairement gravé à la surface. Ainsi L est la longueur de la règle de bois, si on l'a amenée à être la même que celle de l'étalon, en usant l'extrémité ; ou bien, à l'aide du comparateur, on en counaît la différence avec l'étalon, et par suite la longueur de la règle de bois qui est invariable ainsi qu'on l'a déjà fait remarquer. C'est ce nombre qu'on inscrit à la surface de la règle.

2ᵉ Cas. Si la règle est de même métal que l'étalon, il n'y a aucun calcul à faire. Car lorsque l'un est égal à l'autre, on grave sur la règle le nombre l qui est la longueur de l'étalon à zéro : et quand les longueurs sont très peu différentes, on évalue cette différence δ avec le comparateur et $l+\delta$ est la longueur de la règle à zéro. La température actuelle est inutile à considérer ici.

3ᵉ Cas. Enfin, lorsque les métaux sont de différente nature, et qu'on a coupé la règle de même longueur que l'étalon, sous la température t, voici ce qu'on observera. Quand la température redeviendra zéro, l'étalon sera réduit à l, et la règle à la longueur inconnue x, qu'il s'agit de trouver. L'équation (1) apprend que de o à t degrés centigrades, ces règles lougues de l et x, doivent devenir

$$\text{l'étalon.........}\; l(1+\alpha t),$$
$$\text{la 2ᵉ règle.......}\; x(1+\alpha' t);$$

α et α' désignant les dilatations linéaires de l'unité des métaux respectifs : et comme alors les règles sont égales, on a

$$l(1+\alpha t) = x(1+\alpha' t),$$

d'où
$$x = l\left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha' t}\right) = l[1-(\alpha'-\alpha)t] \ldots\ldots \quad (2),$$

en développant la puissance -1 de $(1+\alpha' t)$, et négligeant les termes du 2ᵉ ordre en α et α'. Telle est la longueur x que la règle se trouvera avoir à zéro. Sa longueur à la température centigrade θ sera donc

$$\lambda = x(1+\alpha'\theta) : \ldots\ldots \quad (3)$$

et si elle n'a pas été taillée exactement sur la longueur de l'étalon, δ étant la petite différence des deux, la longueur de la règle sera $x \pm \delta$.

C'est ce nombre $x \pm \delta$ qu'on gravera sur la règle, et qui sera pris pour valeur de x dans l'équation (3). Lorsqu'on aura mesuré une ligne avec cette règle, sous une température centigrade θ, il faudra en calculer la longueur λ par le secours de l'équation (3), α' étant alors la constante propre au métal employé.

132. Observez que cette méthode a l'inconvénient de donner pour la longueur λ de la règle, un nombre embarrassé de fractions, parce que celle l de l'étalon à zéro est un nombre entier (de 4 mètres ordinairement). Si l'on tenait à réduire λ à n'avoir pas de fractions, il faudrait diminuer la règle de la quantité $(\alpha - \alpha')\,tl$, et alors elle aurait, comme l'étalon, la longueur l à zéro : mais comme cette diminution serait trop difficile à faire, qu'elle peut d'ailleurs devenir une augmentation qu'il serait impossible de produire, voici comment on peut opérer.

Admettons que notre règle ait même longueur que l'étalon à la température t, savoir $L = l(1 + \alpha t)$. Quand la température s'abaissant deviendra T, c'est-à-dire décroîtra de $t - T$, cette règle diminuera de $L\alpha'(t - T)$; ainsi sa longueur sera

$$L[1 - \alpha'(t - T)] = l(1 + \alpha t)(1 - \alpha' t + \alpha' T).$$

Or, cherchons quelle doit être cette température T, pour que la règle ait précisément la même longueur l que l'étalon avait à zéro : en égalant à l, et négligeant les termes du second ordre, on a

$$\left.\begin{aligned} \alpha' T &= (\alpha' - \alpha)t, \\ T &= \left(\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha'}\right)t = \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha'}\right)t. \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

On inscrit alors sur la règle la longueur l de l'étalon, mais avec la température T sous laquelle cette longueur existe. On a dans ce cas pour l un nombre entier.

Pour calculer ensuite la longueur λ de la règle à toute autre

température, on emploie la formule (3), θ étant l'excès de la température actuelle sur T.

133. Supposons, par exemple, que l'étalon ait 5 mètres à zéro, et soit en platine, et que la règle à étalonner soit en laiton et ait été taillée de même longueur, le thermomètre marquant 100° : on a $l = 5$, $\alpha' - \alpha = 0{,}0000010213$; ainsi la longueur de la règle à zéro serait $x = 4^m{,}99948935$. Et si l'on trouve incommode de se servir de ce nombre fractionnaire, on verra que la température sous laquelle la règle de laiton a aussi 5 mètres est $T = 5°{,}44$: alors on graverait sur la règle ces deux nombres 5 mètres et 5°,44. Les calculs seraient les mêmes en partant de l'une ou l'autre de ces deux déterminations.

D'après cela, supposons qu'on ait reconnu qu'une longueur est composée de 2000 fois la règle ci-dessus, la température étant de 18°, on pourra trouver cette distance totale de deux manières : soit en faisant dans l'équation (1), $l = 4^m{,}99948935$, $\alpha = 0{,}0000187785$, et $t = 18$; soit en prenant dans l'équation (3) $l = 5$, ce même nombre α avec $\theta = 12°56$, excès de 18° sur $T = 5°{,}44$. Ces calculs donnent également $L = 5^m{,}001179$: ainsi la base formée de 2000 fois cette longueur est.........
$= 10002^m{,}358$. Si l'on eût négligé d'avoir égard à la dilatation des métaux, on aurait réputé la règle de 5 mètres et la base de 10000 mètres ; on aurait donc commis une erreur par défaut de $2^m{,}358$, ce qui eût été une faute considérable.

134. *Réduction d'une base brisée à la ligne droite.* Il est à désirer que la base soit une ligne droite; mais les localités ne permettent pas toujours de trouver un sol rectiligne à peu près horizontal de dix mille mètres environ. On est alors obligé de faire mesurer des longueurs formant une ligne brisée. C'est ce qui est arrivé pour les bases de Melun et de Perpignan.

Soit donc la ligne brisée ACB (fig. 77), dont on connaît les longueurs AC, CB, ainsi que l'angle C que nous supposerons voisin de 180°, savoir $C = 180° - \theta$, en faisant $\theta = BCI$, très petit angle ; on fera $AC = b$, $BC = a$; il s'agira de trouver

AB $= c$, qu'on regardera ensuite comme étant la base mesurée. On a (*)

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta,$$

et $\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2$, en négligeant les quatrièmes puissances de θ. Donc

$$c^2 = (a+b)^2 - ab\theta^2,\quad c = (a+b)\left[1 - \frac{ab\theta^2}{(a+b)^2}\right]^{\frac{1}{2}},$$

enfin
$$c = a + b - \frac{ab\theta^2\sin^2 1'}{2(a+b)}, \ldots (5)$$

en développant la puissance $\frac{1}{2}$ jusqu'au second ordre, et désignant par θ le nombre de minutes de cet arc (p. 37).

Et quand on n'a pu voir le signal B de la station A, mais le signal C, pour rapporter les points circonvoisins à la base B, comme les angles ont été mesurés par rapport à AC, il faut les rapporter à AB, et par conséquent connaître l'angle A.

Or on a $\frac{\sin A}{\sin\theta} = \frac{a}{c}$, avec $\sin\theta = \theta - \frac{1}{6}\theta^3$;

d'où $\sin A = \frac{a\theta}{c}\left(1 - \frac{1}{6}\theta^2\right)$, et substituant pour c la première

valeur ci-dessus, $\sin A = \frac{a\theta}{a+b}\left[1 + \frac{ab-a^2-b^2}{6(a+b)^2}\theta^2\right]$.

Or, on a trouvé que $A = \sin A + \frac{1}{6}\sin^3 A$ (éq. 18, p. 36); substituant pour $\sin A$ sa valeur, puis changeant les petits arcs A et θ, en $A\sin 1'$ et $\theta\sin 1'$ pour les exprimer en minutes, on a

$$A = \frac{a\theta}{a+b} + \frac{ab(a-b)\theta^3\sin^2 1'}{6(a+b)^3} \ldots\ldots (6)$$

(*) Le triangle ABC est sphérique; mais on le ramène à être rectiligne, en retranchant de l'angle observé C, le tiers de l'excès sphérique (*voy.* n° 140), et prenant le reste pour valeur de C. Dans la réalité, une base est une ligne à double courbure, que nous considérons comme étant un arc de cercle dans un plan vertical, comme si la terre était une sphère; mais l'erreur est insensible. (Voy. la *Base du Système métrique*, T. II, p. 683.)

135. ***Réduction au niveau de la mer.*** **Nous connaissons,** par le calcul, la différence de niveau des deux extrémités de la base (n° 127) : abaissons par la pensée le bout élevé d'autant que nous élèverons le bout inférieur, en faisant tourner la ligne autour de son milieu ; nous pourrons regarder cette base comme un arc de cercle très peu courbe, dont le centre coïncide avec celui de la terre. Soit AA' (fig. 76) cet arc $=$ B, dont la longueur est connue ; aa' l'arc concentrique décrit au niveau de la mer ; Ca $=$ R le rayon terrestre (ou plutôt la normale du lieu, *voy.* n° 177) ; Aa $= h$ la hauteur des extrémités au-dessus de ce niveau.

Il s'agit de trouver l'arc $aa' = b$, et la base B sera réduite au niveau des mers. Il suit des procédés dont nous ferons usage par la suite, que le réseau de triangles géodésiques qu'on observe doit être projeté sur la surface de niveau dont il s'agit, et c'est pour cela qu'on doit y projeter aussi la base B. La longueur B de cette base a été mesurée sur l'arc de cercle, puisque nous avons sans cesse conservé, par le fait ou par le calcul, la direction horizontale, perpendiculaire au rayon terrestre. (Nous verrons bientôt, n° 177, que ce rayon doit en effet être remplacé par la normale.) Quant à la hauteur Aa $= h$, nous indiquerons plus tard le moyen de l'obtenir ; c'est l'élévation du point milieu de la base au-dessus de la mer.

On a la proportion CA : Ca :: AA' : $aa' = b$,

$$b = \frac{BR}{R+h} = B\left(1 - \frac{h}{R} + \frac{h^2}{R^2} - \ldots\right);$$

comme R surpasse six millions de mètres, et que h est toujours très petit, cette série est convergente ; on peut même, dans presque tous les cas, se contenter des deux premiers termes $B - \frac{Bh}{R}$. Ainsi, pour réduire la base B au niveau des mers, il faut lui faire éprouver la correction soustractive $\frac{Bh}{R}$.

136. Voici donc la série d'opérations et de calculs qu'on doit faire pour obtenir une base géodésique. Après s'être procuré deux règles exactement étalonnées et leurs supports, on jalonne la ligne droite ou brisée, et l'on y porte bout à bout les règles successivement. On enregistre chaque observation sur une feuille divisée en colonnes : chaque fois qu'on opère, on remarque la température et l'on en tient note ; on écrit chaque double inclinaison de la règle, la longueur de la languette saillante, la différence de hauteur des deux bouts. Le calcul donne ensuite la différence de niveau des extrémités de la base, sa longueur B réduite, s'il y a lieu, à la ligne droite, le tout en ayant égard à la température. On projette enfin B sur le niveau des mers, et l'on a la longueur demandée b, par le calcul du n° 135.

La mesure des bases est une des opérations les plus délicates de la Géodésie, puisque de là dépend la précision de toutes les autres déterminations. Aussi les ingénieurs apportent-ils un soin extrême dans tous les détails des observations. Pour donner un exemple du degré d'exactitude qu'on est parvenu à obtenir dans l'appréciation des bases, nous citerons les bases de Melun et de Perpignan, mesurées par Delambre et Méchain, la première, près de la grande route de Paris à Melun, la seconde, de Vernet à Salces.

La base de Melun, toutes corrections faites, et réduite au niveau de la mer, a été trouvée de 6075,90 toises.

Celle de Perpignan était de 6006,249. (*Syst. métr.*, p. 56, T. II.)

La distance de ces bases était considérable, et pour passer de l'une à l'autre, elles ont été liées par une chaîne de 63 triangles de premier ordre. A l'aide des formules dont nous donnerons bientôt la démonstration, on a pu calculer l'une de ces bases par le secours de l'autre; et voici le résultat de ce calcul :

Base de Perpignan mesurée.	$6006^T,249$
calculée.	6006 ,089
Différence. . .	0 ,160

Ainsi l'erreur n'est que de 0,16 de toise ou 11,52 pouces, quantité à peine digne d'être prise en considération. Mais il est hors de doute que cette coïncidence très approchée n'est due qu'à des compensations fortuites d'erreurs, car on a reconnu que la chaîne de triangles d'Orléans à Bourges était défectueuse, ce qui a été vérifié par la mesure de la chaîne dite *méridienne* de Fontainebleau, et confirmé par une autre ligne latérale à l'ouest de la première.

Nous ne citons donc point ces résultats pour en montrer l'exacte précision, mais plutôt comme un exemple du soin qu'on doit apporter dans la mesure des bases, et de l'attention qu'on doit avoir pour se mettre en garde contre des conséquences prématurées sur le bon ou mauvais succès des opérations.

Sept bases ont été mesurées en France, et nous donnerons plus tard les résultats des comparaisons qu'elles ont conduit à faire, en calculant chacune par les autres, à l'aide de la chaîne de triangles qui les lie entre elles. On y reconnaîtra des erreurs si petites, qu'on est plutôt induit à les attribuer à des causes dont nous parlerons, qu'à des vices de l'opération même. Ces beaux travaux font le plus grand honneur aux habiles ingénieurs qui en ont été chargés. Voy. *la Nouvelle description géométrique de la France*, p. 458, où la base mesurée dans les Landes de Bordeaux est comparée à celle que Oriani a mesurée près du Tésin.

Réduction à l'horizon, excès sphérique.

137. Les triangles géodésiques sont situés dans l'espace; l'observation a fait connaître leurs angles : il s'agit de les projeter sur la surface de niveau des mers, où notre base a déjà été évaluée. Soit O (fig. 69) une station d'où l'on découvre les signaux M et N, et l'on a mesuré l'angle MON=O, qu'on veut projeter sur l'horizon selon mOn. Abaissons de M et N les verticales Mm, Nn sur la surface de niveau Omn; il s'agit de calculer l'angle $mOn = O'$, projection de l'angle O.

Les plans verticaux MOm, NOn, se coupent suivant la ligne OZ qui va au zénith Z, et déterminent avec le plan MON un trièdre, et par conséquent un triangle sphérique ABC, dont les trois côtés sont connus. En effet, l'arc $AB = O =$ l'angle MON; et l'on a pu, du point O, mesurer les distances zénithales $MOZ = z'$, $NOZ = z$. Ces plans verticaux font ensemble l'angle dièdre MOZN, mesuré par l'angle mOn qui est la projection O' qu'on cherche. La résolution de ce triangle sphérique (n° 76) donne

$$\sin^2 \frac{1}{2} O' = \frac{\sin(p - z) \cdot \sin(p - z')}{\sin z \cdot \sin z'}, \quad 2p = z + z' + O.$$

Ainsi l'on saura projeter chaque angle des triangles, et ramener ceux-ci à des triangles sphériques très peu courbes, tracés sur le sphéroïde terrestre.

138. Mais il arrive presque toujours que les stations sont si éloignées et si peu élevées, que les différ. de niveau sont très petites, et les valeurs angulaires z et z' très voisines de $90°$. Le dénominateur de notre formule est donc très près de 1, et le calcul manque de précision.

Faisons $z = 90° - h$, $z' = 90° - h'$, h et h' seront les *hauteurs* des stations M et N (fig. 69) vues de O, savoir, $NOn = h$, $MOm = h'$.

L'éq. fondamentale (3), p. 68, devient ici

$$\cos O = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos O'.$$

Mais h et h' étant très petits, on en peut négliger les 4mes puissances, et poser

$$\sin h = h - \tfrac{1}{6}h^3, \quad \cos h = 1 - \tfrac{1}{2}h^2,$$

d'où $\sin h' \sin h = hh'$, $\cos h \cos h' = 1 - \frac{1}{2}(h^2 + h'^2)$,

et $[1 - \frac{1}{2}(h^2 + h'^2)] \cos O' = \cos O - hh'$.

Pour dégager cos O′ de son coeff., il faut multiplier le se-

cond membre par la puissance -1 de $1 - \frac{1}{4}(h^2 + h'^2)$, ou par $1 + \frac{1}{2}(h^2 + h'^2)$,

$$\cos O' = \cos O - hh' + \tfrac{1}{2}(h^2 + h'^2)\cos O.$$

Au lieu de chercher O′, il est plus commode de chercher le petit arc δ dont O′ surpasse O, savoir,

$$O' = O + \delta, \quad \cos O' = \cos O - \delta \sin O:$$

nous négligeons ici les puissances de δ, parce qu'on va voir que δ est du second ordre. En comparant ces valeurs de cos O′, il vient

$$\delta \sin O = hh' - \tfrac{1}{2}(h^2 + h'^2)\cos O.$$

Or, faisons $\sin O = 2\sin\frac{1}{2}O\cos\frac{1}{2}O$, $\cos O = \cos^2\frac{1}{2}O - \sin^2\frac{1}{2}O$; puis multiplions le terme hh' par $\cos^2\frac{1}{2}O + \sin^2\frac{1}{2}O$, qui est $=1$; il viendra, toutes réductions faites, en exprimant en secondes les petits arcs δ, h et h' (c'est-à-dire en les multipliant par sin 1″, page 37) :

$$\delta = \left(\frac{h+h'}{2}\right)^2 \sin 1'' \tang \frac{1}{2}O - \left(\frac{h-h'}{2}\right)^2 \sin 1'' \cot\tfrac{1}{2}O \ldots \text{(A)}$$

avec $$O' = O + \delta.$$

Le calcul donnera le nombre de secondes de l'arc δ et son signe : ce sera la correction que doit subir l'angle observé O dans l'espace, pour être réduit à sa projection sur l'horizon.

Lorsque l'angle O est mesuré avec un théodolite, aucun calcul n'est nécessaire, et l'instrument donne cet angle tout réduit, ou O′.

Prenons pour ex. les signaux *Aubassin* et *La Bastide*, vus de

Puy-Violan, à 10 lieues de Rhodez (*Syst. Métr.*, I, p. 268). On a observé l'angle $O = 51° 9' 29'',744$, et les arcs de hauteur

Aubassin, $h = -1° 32' 45''$, $\frac{1}{2}(h + h') = -1° 19' 57''5 = 4797''5$,

Bastide, $h' = -1.\ 7.10$, $\frac{1}{2}(h - h') = -0.12.47,5 = 767,5$,

2 log 4797,5......	7.3620300......	2 log 767",5.....	5.7701568 —
sin 1"............	$\bar{6}$.6855749.......	....	$\bar{6}$.6855749
tang $\frac{1}{2}$O.........	$\bar{1}$.6800380......	compl..........	0.3199620
	1.7276429		0.7756937 —
	+ 53",412		— 5",966
	— 5,966		

O = 51° 9' 29,744 angle observé,

O' = 51.10.17,190 angle réduit à l'horizon.

Comme ces calculs doivent être répetés sur tous les angles du réseau, on les abrége en construisant une table des log. de $\frac{1}{4}a^2 \sin 1''$ (coefficient de tang et cot$\frac{1}{2}$O) pour toutes les valeurs de a, arc exprimé par son nombre de secondes. *Voy.* table I.

On y entrera deux fois, l'une avec le nombre $a = h + h'$, l'autre avec $a = h - h'$. L'interpolation sera souvent nécessaire pour donner les valeurs de ce facteur; il ne restera qu'à y ajouter les log. tang. et cot$\frac{1}{2}$O, et l'on aura ainsi les nombres de secondes représentant les deux termes de notre formule : on prendra le dernier en —. Dans l'exemple ci-dessus, on a

$h + h' = 9595''$......	2.047603,	$h - h' = 1535''$....	0.455729
tang $\frac{1}{2}$O..........	$\bar{1}$.680038.......	compl.......	0.319962 —
	1.727641		0.775691 —
	+ 53"412		— 5"966

Delambre et M. Puissant se servent de deux tables pour calculer la formule (A), et n'emploient pas les log. tabulaires. Nous croyons notre procédé plus simple.

139. Démontrons une propriété remarquable des triangles très peu courbes tracés à la surface du sphéroïde terrestre. Concevons que des angles A, B, C (fig. 66) d'un tel triangle, on ait mené des rayons au centre O de la sphère, rayons que nous représenterons par R; les côtés seront a, b, c. Ces rayons OA, OB, OC déterminent un trièdre, et un autre triangle sphérique $A_1B_1C_1$ sur la sphère concentrique dont le rayon est $1 = OA_1$; les côtés sont a', b', c', et les angles A_1, B_1, C_1 res-

pectivement égaux à A, B, C. Or on a (éq. 3, p. 68)

$$\sin a' \sin b' \cos C = \cos c' - \cos a' \cos b',$$

$$\sin a' = \frac{a}{R}\left(1 - \frac{a^2}{6R^2}\right), \quad \cos a' = 1 - \frac{a^2}{2R^2} + \frac{a^4}{24R^4}.$$

En effet, on doit substituer dans les développemens, p. 36, des sin. et cos., pour a', b', c' leurs valeurs $\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R}$: de plus, on est en droit de négliger les 5es puissances de ces fractions, puisque les arcs sont fort petits par rapport à R. En substituant, développant les produits, on trouve, au 5e ordre près,

$$ab\left(1 - \frac{a^2+b^2}{6R^2}\right)\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2} + \frac{c^4 - a^4 - b^4 - 6a^2b^2}{24R^2}.$$

Divisant tout par le coefficient de cos C, ou multipliant par sa puissance -1, qui est $(ab)^{-1}\left(1 + \frac{a^2+b^2}{6R^2}\right)$, on a, en négligeant le 5e ordre,

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{(a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2}{24abR^2}.$$

Cela posé, concevons un triangle rectiligne A′B′C′ formé de côtés a, b, c ayant mêmes longueurs que ceux de notre triangle courbe ABC. Pour déterminer l'un des angles C′ de ce nouveau triangle, nous avons (éq. 25, p. 5)

$$\cos C' = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},$$

$$\cos^2 C' = 1 - \sin^2 C' = \frac{(a^2+b^2-c^2)^2}{4a^2b^2},$$

puis $\quad -4a^2b^2\sin^2 C' = (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2.$

Or, ce 2e membre est précisément le numérateur de la 2e fraction ci-dessus : donc S désignant la surface du triangle rectiligne, savoir $S = \frac{1}{2}ab\sin C'$, on a

$$\cos C = \cos C' - \frac{ab\sin^2 C'}{6R^2} = \cos C' - \frac{S}{3R^2}\sin C'.$$

Comme le triangle proposé ABC, et le triangle rectiligne A'B'C' ont à fort peu près même surface, on peut indifféremment prendre S pour l'aire de l'un ou de l'autre de ces triangles.

Désignons par δ la petite différence entre les angles correspondans C et C', ou $C = C' + \delta$, d'où $\cos C = \cos C' - \delta \sin C'$. On en tire, en comparant cette équation à la précédente, $\delta = \frac{S}{3R^2}$. Ce dernier terme étant une fonction symétrique des côtés a, b, c, il est évident qu'on a pareillement $B = B' + \frac{S}{3R^2}$, $A = A' + \frac{S}{3R^2}$; et faisant la somme de ces trois éq., à cause de $A' + B' + C' = 180°$, on a

$$A + B + C = 180° + \frac{S}{R^2}.$$

Donc *la somme des trois angles de tout triangle sphérique très peu courbe, surpasse* 180° *d'une petite quantité qui est* $\varepsilon = \frac{S}{R^2}$; cette quantité ε est ce qu'on appelle l'*excès sphérique*. En l'exprimant en secondes (p. 37), on a

$$\varepsilon = \frac{S}{R^2 \sin 1''} = \frac{ab \sin C}{2R^2 \sin 1''} = kab \sin C \ldots, \quad (B)$$

en posant le coeff. constant $k = \frac{1}{2R^2 \sin 1''}$, $\log k = \bar{9}.40545$.

Nous montrerons bientôt l'usage de cet excès sphérique, et nous enseignerons à en calculer la valeur. On prend ici... $R = 6\,367\,524$ mètres. Nous donnerons (n° 147) les moyens de calculer la valeur de R qui convient à différens lieux de la terre, et l'on en déduira facilement la valeur correspondante de la constante k. Au reste, la recherche de la grandeur de R sera l'un des principaux sujets que nous nous proposons de traiter.

140. Donc aussi *il existe toujours un triangle rectiligne qui a les mêmes côtés* a, b, c, *qu'un triangle sphérique très peu courbe, et les angles de ce dernier sont chacun plus grands*

que son correspondant dans l'autre, d'une petite quantité égale au tiers de l'excès sphérique ε. Par conséquent, si l'on retranche $\frac{1}{3}\varepsilon$ de chaque angle sphérique, le triangle ABC sera changé en un autre rectiligne A'B'C' formé des mêmes côtés : et dans le calcul de ces côtés, on pourra substituer celui-ci à l'autre. On y connaît toujours un côté et les angles, et les formules de la Trigonométrie rectiligne feront connaître les deux autres côtés, qui sont aussi ceux du triangle sphérique.

Ce théorème est dû à Legendre.

141. D'après cela, les angles observés dans l'espace étant réduits au centre de station (n° 119), puis à l'horizon (n° 138), si l'on fait la somme des trois angles, on trouvera qu'elle excède 180° : cette différence est due à deux causes, les erreurs d'observation et l'excès sphérique. Ce qu'on peut supposer de plus vraisemblable, c'est de regarder les erreurs comme égales sur chaque angle : et comme il faut aussi répartir l'excès sphérique par tiers, il est évident qu'on devra réduire à 180° la somme des trois angles, en retranchant de chacun le tiers de la quantité qui excède 180° dans la somme des trois angles sphériques. On pourra alors supposer que le triangle est rectiligne, et en chercher les deux côtés inconnus, parce que ceux-ci ont même longueur que ceux du triangle sphérique proposé. La résolution se fait par l'éq. (24), p. 38,

$$b \sin A = a \sin B, \text{ etc.}$$

Le 1er triangle, dont on a un côté, qui est la base mesurée et réduite au niveau des mers, aura ainsi ses deux autres côtés connus : les triangles voisins, qui s'appuient sur ces côtés, auront aussi tous les côtés connus par un calcul semblable; et ainsi des autres de proche en proche : en sorte qu'on connaîtra les angles et les côtés de tous les triangles du réseau réduits au niveau des mers.

142. Voici un ex. tiré du *Syst. mét.*, t. I, p. 477 et II, p. 836, 113e triangle.

STATIONS.	ANGLES observés et corrigés.	ARCS de hauteur.	RÉDUCT. A L'HORIZON. $\delta =$	angles.	
Rodos	A=61°32′80″59	h = .1° 0′ 10″92 h′= -0. 7.49,54	-26″78	53″81	A
Matas.....	B=56.38.33,34	h = -0.41.50,68 h′= -0.57.31,91	+21,44	54,78	B =
Mt Serrat.	C=61.48.10,61	h = 0.25.11,90 h′= 1.15.42,97	+ 7,77	18,38	C′
				6,97	
			Tiers = 2,32 à re		

STA
Buga
La M
Pic d

La 1re colonne contient les noms des stations, gles qu'on y a observés dans l'espace, mais rédui signal (n° 117); la 3e donne les arcs de hauteurs tés, afin d'en déduire les corrections pour réduir (n° 138); la 4e donne ces corrections, la 5e les a (leurs nombres de secondes seulement, les degr étant les mêmes que dans la 2e colonne). Au re par l'ex. suivant que cette colonne 5e est inut nous ne l'avons écrite que pour donner tous l calcul. On trouve que la somme des trois angle passe 180° de 6″,97, dont le tiers est 2″,32. E ce nombre de chacun des angles réduits, on ramè à être rectiligne, tel qu'on en voit les angles La 7e contient les trois côtés, dont le 1er a dont les autres résultent du calcul suivant :

a....	4.5972705........		4.597
sin B′.....	$\bar{1}$.9218465	sin C′...	$\bar{1}$.945
sin A′:......	$\bar{1}$.9440944........	—	$\bar{1}$.944
b.....	4.5750226	c.....	4.59
b = 37585m,70		c = 3963	

143. Voici encore un ex. tiré des opération bœuf, dans les Pyrénées, pour le Dépôt de la

TIONS.	ANGLES observés.	HAUTEUR des signaux.	R. A L'HOR. δ =	TRIANGLE rectiligne.	COTÉS.
rach...	A=51°27′ 3″47	h=−1° 5′25″61 h′=−2.25.28,21	+ 35″45	A′=51°27′38″96	a=39186,76 m
ladrès.	B=94.26.41,83	h=+2.37.58,15 h′=+0.19.49,73	+ 72,08	B′=94.27.53,93	b=49947,24
'Appi.	C=34. 6.12,63	h=−0. 1.49,21 h′=+1.28.18,70	−105,08	C′=34. 4.27,91	c=28069,91
	179.59.57,93		+ 1,94	180.0. 0,00	
	+ 1,94	Réductions à l'horizon.			
	179.59.59,87	Somme des angles réduits.			
	+ 0,13	Différence à 180°.			
	+ 0,04	Tiers à ajouter à chaque angle réduit.			

La 1re colonne contient les noms des stations, la 2e les angles observés, mais réduits à l'axe du signal (n° 117); la 3e les hauteurs des signaux pour opérer les réductions à l'horizon ou corrections δ qui sont dans la 4e colonne (n° 138), c'est-à-dire qu'il faut ajouter ces corrections δ aux angles observés (2e colonne) pour avoir les angles réduits à l'horizon, ou les angles du triangle sphérique très peu courbe. La somme des angles réduits devrait surpasser 180°; mais en ajoutant toutes les trois réductions, ou leur somme + 1,93, à celle des trois angles observés, on a la somme des angles réduits : et comme cette somme est < 180°, on reconnaît une légère erreur dans les observations qui a absorbé l'excès sphérique et un peu plus, savoir 0″,13 : le tiers 0,04 doit donc être ajouté à chaque réduction à l'horizon. Telles sont les corrections qu'il faut faire subir aux angles observés, et l'on obtient les angles du triangle rectiligne de la 5e colonne. Enfin, connaissant un côté, le calcul donne les deux autres côtés, comme ci-devant, et le triangle sphérique est connu en totalité.

144. Dans ces opérations, il n'est pas nécessaire, comme on voit, de calculer l'excès sphérique ε, parce qu'il est compris dans le calcul même avec les erreurs d'observation. Mais lorsqu'il s'agit d'obtenir les azimuts des côtés, les longitudes et latitudes des stations, et la longueur d'un arc de méridien terrestre, on ne peut plus se dispenser de connaître ε, et de faire la part des erreurs séparément. Faisons donc voir comment on peut calculer ε. D'ailleurs dans les méthodes qui seront exposées, cette opération est indispensable.

On commence par chercher approximativement les côtés du triangle, en considérant les angles A, B, C, réduits à l'horizon, comme ceux d'un triangle rectiligne, et la surface de celui-ci comme égale à celle du triangle sphérique $S = \frac{1}{2}\, ab \sin C$. Tout sera donc connu dans l'éq. (B), sauf le rayon terrestre R, dont nous assignerons bientôt la valeur. En adoptant celle du n° 147 qui convient à la France, on a

$$\varepsilon = k\, ab \sin C \qquad \log k = \begin{cases} \bar{9}.40545\ldots\ldots & \text{en mètres.} \\ \bar{9}.98509\ldots\ldots & \text{en toises.} \end{cases}$$

Comme le coeff. k est fort petit, il n'est pas nécessaire de faire le calcul avec beaucoup de précision, parce que les erreurs sont rejetées sur des décimales plus éloignées que celles qu'on conserve au nombre ε (trois au plus). Nous donnons ici le calcul pour le 1er des deux exemples qui précèdent. Nous trouvons $\varepsilon = 3''34$.

$$\begin{array}{ll} a \ldots & 4.59727 \\ b \ldots & 4.57502 \\ \sin C. & \bar{1}.94514 \\ k \ldots & \bar{9}.40545 \\ \hline & 0.52288 \ldots\ldots \varepsilon = 3''\,34. \end{array}$$

Ce devrait être l'excès sur 180° de la somme des trois angles réduits; mais comme on trouve 6",97 pour cet excès, on reconnaît qu'il y a 3",63 d'erreur dans les observations, sa-

voir 1",21 sur chaque angle, outre 1",11 provenant de l'excès sphérique.

Ce triangle, l'un des plus grands qu'on ait formés, a ses côtés d'environ 40 mille mètres; c'est à peu près tout ce que permet la portée des lunettes; et cependant l'excès sphérique y est bien faible. On prendra donc confiance aux calculs qu'on fera sur des triangles moindres. Au reste, il y un triangle, *Desierto*, *Mongo* et *Campvey* qui joint les îles Baléares à la côte d'Espagne et qui est plus grand encore; son excès sphérique est de 39".

145. Il convient de réduire la formule (B) en table, pour abréger les calculs de l'excès sphérique qui se répètent souvent. Voici comment on s'y prend : soit ABC (fig. 32) le triangle rectiligne dont on demande la surface S. La perpendiculaire AD sur la base BC décompose cette aire en. . . . $ABD + ACD$: or on a $DC = b \cos C$, $AD = b \sin C$, $ACD = \frac{1}{2} b^2 \sin C \cos C = \frac{1}{4} b^2 \sin 2C$.

De même on trouve $ABD = \frac{1}{4} c^2 \sin 2B$, et par conséquent

$$\varepsilon = 2kS = \tfrac{1}{2} k (b^2 \sin 2C + c^2 \sin 2B).$$

Or, imaginons qu'on ait construit une table à double entrée, donnant toutes les valeurs de $\frac{1}{2} kb^2 \sin 2C$, pour tous les angles C de degré en degré, et toutes celles de b de 1000 en 1000 mètres; on en tirera de suite les deux termes de ε, en entrant tour à tour dans cette table avec les nombres b et c, et les angles respectifs C et B (toujours un côté et l'angle adjacent). La somme des deux résultats est ε. C'est ainsi qu'est construite la table IV de la *Géodésie* de M. Puissant. On a soin de prendre pour B et C les deux plus petits angles du triangle, afin d'éviter le cas où la perpendiculaire AD tombe hors du triangle.

On peut encore faire une table des valeurs de $\varepsilon = 2kS$, en prenant pour argumens la base B et la hauteur H du triangle, savoir $S = \frac{1}{2} BH$, $\varepsilon = kBH$. On mesure avec un compas sur la carte la base et la hauteur du triangle, et ces données ont une exactitude suffisante pour ce genre de calcul, parce

que ι varie très lentement pour de grands changemens de B et de H, attendu que k est extrêmement petit. C'est la table V de M. Puissant. Dans le *Système métrique*, ce sont les tables V et VI du tome 1er. Nous avons jugé inutile de les reproduire ici.

146. On a souvent besoin de *réduire en secondes un arc de la surface terrestre*, horizontal, donné soit en toises, soit en mètres, ou réciproquement : voici comment on opère.

Nous verrons bientôt comment on est parvenu à déterminer, par expérience, la longueur de l'arc de 1° terrestre. En prenant l'arc de méridien qui traverse la France, par exemple, on trouve

degré du méridien en France = 57020 toises = 111 134 mètres. Or, si 3600″ ont cette longueur, quelle est celle de 1″? d'où

longueur de l'arc de 1″ $= i = 15^{T},83889 = 30^{m},87057$,

$$\log i = \begin{cases} 1.1997247 \text{ en toises} & \text{compl}^t = \bar{2}.8002753 \\ 1.4895447 \text{ en mètres} & \text{compl}^t = \bar{2}.5104553 \end{cases}$$

longueur de l'arc de n secondes,... $S = in$,.. (C)

équation qui fait connaître l'un des nombres S ou n, l'autre étant donné.

Mais comme la longueur de l'arc de 1° de méridien varie avec les lieux, parce que la terre n'est pas sphérique, on ne peut appliquer cette valeur de i qu'à la France. En d'autres contrées, le degré terrestre sera représenté par $57020^{T} + x$, et quand on connaîtra x, on aura pour la longueur de l'arc de 1″, $i' = i + \frac{x}{3600}$; l'arc de n secondes sera donc

$$S' = i'n = in + \frac{nx}{3600}.$$

Si l'on veut opérer par log. on a $\log i' = \log i + \log\left(1 + \frac{x}{3600 i}\right)$ et développant, M étant le module (p. 36),

$$\log i' = \log i + \frac{Mx}{3600 i} = \log i + \frac{Mx}{57020},$$

donc $\log i' = \log i + Qx$,

$\log S' = \log S + Qx$,

En toises, ... $Q = \frac{M}{57020} = 0{,}00000762$,

En mètres, ... $Q = 0{,}00000391$.

Ainsi l'on calculera l'arc s comme s'il était en France, et l'on ajoutera à log S la correction Qx, produit du facteur constant Q, par l'excès x (positif ou négatif) du degré dans le pays dont il s'agit, sur le degré de France.

147. Il est facile de déduire de ces calculs la longueur du rayon terrestre R qui convient à une sphère sensiblement coïncidente avec la surface de niveau de la contrée dont il s'agit. Car la circonférence R est $2\pi R = 57020^T \times 360°$, ou bien $= 111134^m \times 360°$, quand c'est celle d'un méridien de France. On en tire

$$R = \begin{cases} 3\,267012 \text{ toises}, & \log = 6.5141507, \\ 6\,367524 \text{ mètres}, & \log = 6.8039707. \end{cases}$$

Mais en d'autres pays, le degré étant différent, le rayon n'est pas le même. On trouve $2\pi R' = (57020 + x)\ 360°$, $R' = R + \mu x$, en conservant à $\mu°$ la valeur donnée p. 37, ou $\mu = \frac{1}{\text{arc } 1°} = \frac{180°}{\pi}$.

$$R' = R + \mu x.$$

Et si l'on veut log R', on prendra les log. des deux membres,

$$\log R' = \log R + \log\left(1 + \frac{\mu x}{R}\right) = \log R + \frac{M\mu x}{R},$$

$$\log R' = \log R + \frac{M.180° x}{\pi R} = \log R + \frac{Mx}{57020} = \log R + Qx.$$

La correction Qx que doit éprouver log R pour devenir log R' est la même que pour l'arc du méridien.

Nous reviendrons plus tard sur la détermination des valeurs

de S,S', R et R', quand nous aurons trouvé la forme et les dimensions du globe terrestre, et nous exprimerons l'arc de méridien et son rayon, en fonction de l'aplatissement et de la latitude du lieu.

Autres procédés pour calculer les côtés des triangles.

148. Nous avons dit qu'on ramenait tous les triangles observés à leur projection sur la surface du niveau des mers : on a ainsi une chaîne de triangles assez petits pour qu'on puisse regarder chacun comme sphérique, où l'on connaît un côté et les trois angles. Au lieu de réduire ces triangles à d'autres rectilignes, comme on vient de le faire, on peut les résoudre en les supposant tracés à la surface d'une sphère de rayon connu R. C'est le 2ᵉ procédé que nous exposerons.

Après avoir calculé l'excès sphérique, pour évaluer les erreurs d'observation, on corrigera celles-ci en les apportant par tiers aux trois angles du triangle, qui ne seront alors affectés que de l'excès sphérique : puis on résoudra le triangle par la règle des quatre sinus (éq. 5, p. 68).

Mais le calcul est plus simple et plus exact, en développant en séries les sinus des petits arcs a, b, c. On a, au 4ᵉ ordre près,

$$\sin a = a\left(1 - \frac{a^2}{6R^2}\right),$$

$$\log \sin a = \log a - ka^2, \ \ldots . \quad \text{(D)}$$

en faisant $$k = \text{constante} = \frac{M}{6R^2}.$$

On trouve, en prenant la valeur de R du nº 147, qu'en France, on a

en toises $\log k = \overline{15}.8313316$

en mètres $\log k = \overline{15}.2516916.$

L'équation (D) donne sin a lorsque le côté a est connu par sa longueur métrique ; on a ensuite

$$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A} \sin a \ldots\ldots\ldots \quad \text{(E)}$$

10

éq. qui donne sin b : enfin le côté b se trouve en mètres ou en toises, par l'éq. suivante qu'on tire de (D),

$$\log b = \log \sin b + k \sin^2 b \ldots\ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

Par exemple, pour le 1[er] triangle résolu ci-devant p. 139, où l'on a reconnu 3",63 d'erreur d'observation, et $a = 39561^m,29$, on retranchera 1",21 de chaque angle réduit à l'horizon :

Rodos .....A =	61° 32′ 52″,60	a^2....	9.19454
Matas .....B =	56.38.53 ,57	k.....	$\overline{15}.25169$—
Mont-Serrat C =	61.48.17 ,17	— 28...	$\bar{6}.44623$—
		correction de log a = —	0.0000028
a......	4.5972676........	a.............	4.5972676
sin C......	$\bar{1}.9451448$	sin B.............	$\bar{1}.9218480$
sin A.... —	$\bar{1}.9440956$	sin A .... —	$\bar{1}.9440956$
sin c.......	4.5983168	sin b	4.5750200.

Il reste à exprimer en mètres les arcs b et c :

k.............	$\overline{15}.25169$	....	$\overline{15}.25169$
$\sin^2 b$............	9.15004	$\sin^2 c$...	9.19663
	$\bar{6}.40173$		$\bar{6}.44832$
Corrections	0.0000025		0.0000028
sin b	4.5750200	sin.....	4.5983168
log b.............	4.5750225	log c....	4.5983196.

Ce sont précisément les log. obtenus p. 139.

149. On peut encore modifier l'éq. (F); car on a

$$\cos b = 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \text{ d'où}$$

$$(\cos b)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{b^2}{6R^2}, \quad \frac{1}{3}\log \cos b = -\frac{Mb^2}{6R^2} = -kb^2;$$

partant l'éq. (D) devient

$$\log b = \log \sin b - \tfrac{1}{3} \log \cos b \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(G)}$$

Au reste, on peut remarquer que tous les calculs qu'on fait pour appliquer la théorie de l'excès sphérique, due à Legendre, se retrouvent ici, et qu'on en fait quelques-uns de plus. Le procédé qui vient d'être exposé est donc moins

simple que le premier : il a plus de précision; mais on n'y doit recourir que pour les triangles très étendus, et encore il est douteux que les résultats soient différens de ceux de la 1re méthode.

150. Il convient d'examiner maintenant le procédé de Delambre, parce que ce procédé a été suivi dans *la base du système métrique*. Il consiste à ramener, par le calcul, les triangles déjà rendus sphériques par leur réduction à l'horizon, à des triangles rectilignes formés par les cordes des arcs, ou côtés de ces triangles très peu courbes. On a de la sorte un polyèdre à faces triangulaires inscrit au globe terrestre, et dont les sommets sont situés à la surface du niveau des mers. Comme il y a très peu de différence entre chaque arc terrestre et sa corde, de petites corrections, faciles à faire, donnent les arcs par les cordes et réciproquement.

151. Cherchons d'abord (fig. 80) la corde $GkH = k$ d'un arc $G\varphi H = \varphi$ dont la longueur est connue; et réciproquement cette longueur φ, quand celle k de la corde est donnée, le rayon du cercle étant $IG = R$. Prenons le rayon $IL = 1$, la corde $LO = \alpha$ de l'arc a, est (p. 37, n° 35) $\alpha = 2 \sin \frac{1}{2} a$. Mais on a

$$\sin \frac{1}{2} a = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{2^3.2.3} + \frac{a^5}{2^5.2.3.4.5} - ,\ldots$$

d'où $$\alpha = a - \frac{a^3}{24} + \frac{a^5}{1920} - \ldots$$

Mais on a aussi $IL : LO :: IG : GH$, savoir, $1 : \alpha :: R : k$, et $1 : a :: R : \varphi$; ainsi il faut changer a en $\frac{\varphi}{R}$, et α en $\frac{k}{R}$;

donc $$k = \varphi - \frac{\varphi^3}{24R^2} + \frac{\varphi^5}{1920R^4} - ,\ldots \quad \text{(H)}$$

et lorsque le rayon est très grand,

excès d'un arc sur sa corde, $\varphi - k = \frac{\varphi^3}{24R^2} = q.\varphi^3$.

En mètres $\log q = \overline{15}.0118474$, en toises $\log q = \overline{15}.5914874$,

en adoptant la valeur de R qui convient à la France (n° 147).

On a aussi $\varphi = k + \frac{\varphi^3}{24R^2} - \ldots$, et substituant pour φ sa valeur approchée k,

$$\varphi = k + \frac{k^3}{24R^2} \cdot \ \ldots\ldots\ (\mathrm{I})$$

Ainsi quand on connaîtra l'une de ces deux quantités, un arc terrestre φ ou sa corde k, on pourra calculer l'autre.

Soit par exemple	$\varphi = 39561^m,29$...	φ^3...	13.79181
	$-0,064$..	q....	$\overline{15}.01185$
Corde de l'arc a	$k = 39561,23$	$0^m,064$.	$\overline{2}.80366$
		$\varphi - k = 0,064$.	

152. Dans le triangle sphérique très peu courbe ABC (fig. 72), on connaît le côté a en mètres, ainsi que les trois angles : on demande quels sont les angles A', B', C' et les côtés a', b', c' du triangle rectiligne formé par les trois cordes?

CZ est une verticale à angle droit (sur les arcs CA, CB, ou plutôt sur leurs tangentes en C, ZCI est de 90°. L'angle ZCn est donc $= 90° - \frac{1}{2}a$, puisque l'angle ICn, formé par une tangente et par une corde, a pour mesure $\frac{1}{2}$ CaB, ou $\frac{1}{2}a$. De même Z$Cp = 90° - \frac{1}{2}b$.

Imaginons une sphère dont le centre soit en C ; sa surface coupera les arètes du trièdre ZCAB en m, p et n, ce qui détermine un triangle sphérique mpn. On connaît dans ce triangle, outre l'angle $m = C$ que forment les plans ZCA, ZCB, les côtés qui comprennent cet angle, savoir, $mn = 90° - \frac{1}{2}a$, $mp = 90° - \frac{1}{2}b$. Pour en tirer le côté $pn = C'$, qui est l'angle des cordes CA. CB, il faut résoudre ce triangle, et comme les arcs a et b ne sont au plus que de quelques minutes, nous imiterons ici ce qui a été fait p. 133 pour réduire un angle à l'horizon.

Cherchons l'excès ε de C' sur C $\qquad C' = C + \varepsilon$.

le triangle sphérique mnp donne

$$\cos C' = \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b + \cos \tfrac{1}{2} a \cos \tfrac{1}{2} b \cos C$$

or, on a $\cos C' = \cos C - \varepsilon \sin C$; substituant et développant les sin. et cos. de $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$, il vient

$$\cos C - \varepsilon \sin C = \tfrac{1}{4}ab - \tfrac{1}{8}(a^2 + b^2)\cos C + \cos C,$$

$$\varepsilon \sin C = -\tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{8}(a^2 + b^2)\cos C;$$

le reste du calcul est le même p. 134, et l'on a enfin

$$\varepsilon = -\left(\frac{a+b}{4}\right) \sin 1'' \operatorname{tang} \frac{1}{2} C + \left(\frac{a-b}{4}\right)^2 \sin 1'' \cot \frac{1}{2} C .. (L)$$

153. Cette valeur de ε, est aussi appelée *excès sphérique*, quoiqu'elle soit tout autre que la quantité à laquelle Legendre a donné ce nom. La formule ci-dessus exprime en *secondes* la correction que doit subir, *avec son signe*, l'angle C des arcs, pour devenir celui des cordes.

On applique cette formule à chacun des angles A, B, C du triangle sphérique, et l'on obtient les angles A′, B′, C′ du triangle rectiligne formé par les cordes des arcs. On connaît d'ailleurs l'une k de ces cordes par le calcul de l'éq. H, n° 151, qui enseigne à la déduire de l'arc ϕ, ou côté de triangle sphérique; ainsi l'on pourra calculer les deux autres côtés du triangle rectiligne. Ensuite on ramenera ces cordes k aux arcs φ par le même procédé, éq. I, n° 151, et les côtés du triangle sphérique seront connus.

Tel est le procédé que Delambre a suivi dans *la base du système métrique*. Nous allons bientôt en montrer l'application à un exemple.

Mais avant, enseignons à réduire cette formule L en table, car on est obligé d'en faire le calcul pour tous les triangles du réseau. Or, en comparant cette éq. à celle A de la p. 134, on voit qu'elle est la même en signe contraire, en remplaçant h et h' par $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$. Ainsi l'on entrera dans la table I, qui donne les valeurs des quantités comprises sous la forme.... $\frac{1}{4}m^2 \sin 1''$, avec la somme et avec la différence des arcs $\frac{1}{2}a$ et $\frac{1}{2}b$ exprimés en secondes, ou avec a et b, sauf à prendre ensuite le quart des résultats. On aura ainsi les log. des coefficiens de

tang $\frac{1}{2}$ C et cot $\frac{1}{2}$ C, la 1re négative et la 2e positive. Ainsi on obtiendra les deux termes de la formule (L).

154. Il faut réduire en secondes les côtés a et b de l'angle B qui fait le sujet du calcul ; c'est ce qu'on fera ainsi qu'il suit.

On considérera, par approximation, le triangle sphérique proposé ABC, comme rectiligne, et l'on trouvera par le calcul les côtés a, b, c, qui seront à peu près exacts; mais l'usage auquel on destine ces nombres n'exige pas qu'on les connaisse avec plus de précision, car l'erreur extrêmement petite qui affecte les longueurs de ces côtés, ne peut influer sur la valeur qu'on en tirera pour ε, qui est très petit. Au reste, on pourrait convertir en table la formule (C) n° 146, pour en tirer à vue les valeurs des côtés a et b en secondes.

155. L'exemple suivant est destiné à montrer comment on doit gouverner les calculs.

STATIONS.	ANGLES RÉDUITS à l'horizon.	EX. SPH. $\varepsilon =$	ANGLE des cordes.	CORDES.	ARCS en mètres.
				m	m
Rodos.....	A= 61°32'53",81	− 1",12	51",47	39561,23	a= 39561,29
Matas.....	B= 56.38.54,78	− 1,07	52,50	37585,64	b= 37585,70
Mt Serrat.	C= 61.48.18,38	− 1,13	16,03	39656,92	c= 39656,98
Sommes...	180. 0. 6,97	−3,32	0,00		
	− 3,32				
	+ 3,65 dont le tiers est −1"22				
	Otez 1" 22 de chaque angle, outre l'excès sphérique.				

La 1re colonne contient les noms des stations ;

La 2e les angles observés et réduits à l'horizon, comme p. 139. On remarque que la somme excède ici 180° de 6",97, ce qui est dû aux erreurs d'observation, et à la sphéricité du triangle.

La 3[e] colonne contient les excès sphériques ε pour chaque angle, en prenant cette dénomination dans la nouvelle acception (n° 153); la somme de ces excès est — 3″,32. Si l'on se bornait à retrancher chaque excès de son angle correspondant, pour avoir les angles du triangle rectiligne formé par les cordes, la somme excéderait donc encore 180° de 3″,65; c'est l'erreur des observations. Ainsi, il faut en outre retrancher de chaque angle 1″,22, tiers de cette somme d'erreurs. On fait ces deux soustractions ensemble de chaque angle de la 2[e] colonne, et l'on en déduit la 4[e], où nous avons jugé inutile de reproduire les degrés et minutes.

La 4[e] colonne est donc formée des angles du triangle rectiligne des cordes, et la somme est de 180°.

Enfin, les dernières colonnes contiennent les cordes et les côtés sphériques exprimés en mètres, tels que les donne le calcul suivant, conformément à ce qu'on a dit n° 153. On part de la corde a' déduite du côté sphérique a, obtenue par le calcnl du n° 151.

a'...	4.5972698	....	4.5972698				
sin B'...	$\bar{1}.9218466$	sin C'..	$\bar{1}.9451435$	q...	$\overline{15}.0118$.....		$\overline{15}.0118$
sin A'..	$-\bar{1}.9440944$	....	$-\bar{1}.9440944$	b'^3.	13.7251	c'^3	13,7950
b'....	4.5750220	c'....	4.5983189		$\bar{2}.7369$		$\bar{2}.8068$
b' =	37585,64	c' =	39656,92		0,055		0,064
	+ 0,06		+ 0,06	corrections de b' et c',			
b =	37585,70	c =	39656,98,	précisément comme p. 139.			

Rectification des calculs, mesure de la méridienne.

156. Les trois méthodes qu'on vient d'exposer conduisent absolument aux mêmes résultats; Delambre les a employées concuremment comme moyens de vérification; mais la première est aujourd'hui seule en usage, parce qu'elle est la plus courte.

Lorsqu'on est parti d'un premier triangle qui a pour côté une base mesurée, on arrive enfin, par la suite des opérations, à un dernier triangle qui s'appuie sur une autre base

connue. On devrait, en toute rigueur, retrouver celle-ci par le calcul ; or, c'est ce qui n'arrive jamais exactement. Au bout de 63 triangles, Delambre a trouvé, pour la base de Perpignan, une longueur plus courte de 11,52 pouces (v. p. 131), que celle qu'on avait obtenue par la mesure directe : on a depuis reconnu l'existence de quelque triangle défectueux, près de Bourges.

Une partie de cette erreur pouvait être imputée aux mesures des bases ; mais le soin extrême apporté dans ces opérations rend vraisemblable que les erreurs de ces bases sont fort petites. On a donc dû rejeter la pensée de partager en deux également la différ. entre le résultat direct et celui du calcul, et d'altérer chaque base de la moitié de cette différ., l'une par excès, l'autre par défaut : car il est bien plus croyable que les petites erreurs qu'on a reconnues proviennent des angles, et de l'accumulation des légères inexactitudes des résultats calculés.

157. Pour corriger les défauts de l'opération,

1°. On a calculé tous les triangles au nord de Paris avec la base de Melun.

2°. Celle-ci n'a servi à obtenir les côtés des triangles qui s'enchaînent vers le sud, qu'après avoir fait une très légère correction aux angles observés; on ajoutait 0",1 aux angles opposés à chacun des côtés sur lequel le triangle s'appuie du côté du sud, et on retranchait 0",05 à chacun des deux autres angles. Par là, le numérateur de la fraction $\frac{\sin B}{\sin A} \sin a$, se trouve augmenté, et le dénominateur est diminué. Ce petit changement, accroissant peu à peu les côtés dont il s'agit, conduisait à un résultat qui accordait le calcul du dernier côté avec sa mesure directe, attendu que la base calculée de Perpignan, qu'on trouvait trop courte, était légèrement accrue.

3°. Dès le 53ᵉ triangle, on n'a fait que des corrections plus petites encore ; et au 58ᵉ, on n'en a plus fait aucune, et l'accord s'est trouvé rétabli.

158. Ce procédé est empirique : la commission des poids et mesures a demandé qu'on calculât, avec la base de Melun, tous les triangles sans altération, depuis Dunkerque jusqu'à Évaux, et les autres avec la base de Perpignan. Mais ce procédé a l'inconvénient de troubler un peu les azimuts du milieu de l'arc. (Voyez le 3e supplément de M. Laplace à sa *Théorie des probabilités*, où ce sujet est traité.) M. Puissant propose de répartir l'erreur sur les angles observés, mais proportionnellement à leurs grandeurs respectives, et non par portions égales, ainsi qu'on l'a fait ci-devant. (V. *Bulletin philom.*, 1824, p. 17, et 1825, p. 145.)

Au reste, nous avons dit (p. 132) que l'on a reconnu une erreur notable dans les triangles de la méridienne de Delambre, d'Orléans à Bourges. La chaîne du parallèle de Paris qui s'étend vers Brest, où l'on a mesuré une base de vérification, s'accorde très bien avec la base de Melun; cette chaîne qui va à Strasbourg, s'accorde aussi avec la base mesurée à Ensishem ; et pourtant cette multitude de triangles, conduisant à des résultats toujours trop faibles pour la chaîne du parallèle de Bourges, M. Corabœuf en a conclu qu'il existait quelque erreur dans la mesure de la méridienne, ce qui a déterminé le dépôt de la guerre à faire mesurer une chaîne de vérification (celle de Fontainebleau). Cette opération, confiée à M. Delcros, a mis hors de doute cette erreur.

159. La mesure d'un arc de méridien est une des opérations les plus importantes en Géodésie. On ne peut nulle part mesurer directement un arc terrestre d'une grande étendue; et, vraisemblablement, s'il existait quelque désert assez vaste et assez horizontal pour qu'il fût possible de tracer et mesurer cet arc, sans obstacle, ce ne serait pas le moyen le plus exact d'en obtenir la longueur.

Comme les deux extrémités d'un grand arc terrestre sont fort éloignées, et que de l'une on ne peut apercevoir l'autre, on est obligé de tracer cet arc sur le sol par stations successives. Les erreurs inséparables de cette opération diffi-

cile jettent de l'incertitude sur les résultats. On préfère former un réseau de triangles dont on trouve tous les élémens; le calcul détermine la longueur de l'arc qui traverse la chaîne d'un bout à l'autre. Des observations astronomiques font ensuite connaître les latitudes des points extrêmes, et par conséquent le nombre de degrés de l'arc terrestre mesuré. Voilà l'idée qu'il faut se faire de cette opération, qui va faire le sujet des développemens que nous allons donner.

160. En un lieu quelconque, le plan vertical passant par le pôle de la terre, coupe la voûte céleste suivant un grand cercle qu'on appelle le *méridien astronomique*, parce qu'on le détermine par l'observation des astres, ainsi que nous le dirons plus tard. Ce plan coupe la surface terrestre selon une ligne qu'on nomme *la méridienne du lieu*. Le plan vertical indéfini dont nous parlons coupe la surface du globe selon une courbe, prolongement de cette méridienne : et comme les irrégularités encore inconnues de cette surface ne permettent pas d'affirmer que la verticale en l'un des points de cette courbe est dans ce même plan, on a dû s'assurer par expérience qu'il n'y avait aucune déviation, et que le globe terrestre est en effet coupé par le plan vertical d'un lieu, plan passant au pôle céleste, selon une courbe dont tous les points ont ce même plan pour méridien.

Pour tracer une méridienne sur le sol, on dispose une lunette dans ce plan, de manière à lui pouvoir donner un mouvement de bascule qui laisse l'axe optique dans le plan vertical du méridien. On remarque au loin un signal dans cet axe, et l'on s'y transporte ; en dirigeant la lunette sur le point de départ, et la réglant dans cette 2ᵉ position, on pourra marquer un 2ᵉ signal dans la direction opposée. On s'y placera de même pour répéter la même manœuvre, et ainsi de suite. Comme l'axe optique est sans cesse dans le méridien de départ, la série des lignes ainsi tracées sera la méridienne primitive pliée, à chaque station, dans le plan vertical, et rabattue sur le sol. Cette courbe est la méridienne du lieu de départ.

161. On conçoit que si la forme du globe était tellement irrégulière que la verticale de chaque point de cette courbe ainsi tracée ne fût pas dans le plan vertical primitif, et qu'il fallût se porter à droite ou à gauche, pour que la verticale du lieu fût parallèle à ce plan, comme ces verticales coïncident à l'infini avec le plan primitif, ces divers points de la terre auraient même méridien astronomique, et la courbe qui unirait ces points sur la terre serait la méridienne prolongée, *courbe à double courbure*. L'expérience apprend qu'en effet la terre a sa surface irrégulière, et que si cette double courbure existe réellement, du moins elle est si faible qu'on peut supposer, sans erreur sensible, que *les méridiennes sont des courbes planes*. Nous adopterons donc ce résultat comme un fait.

162. La figure 73 représente une chaîne de triangles qu'on a choisis dans la disposition propre à offrir tous les genres d'incidence sur l'arc AV de la méridienne du point A. Cet arc est censé déterminé par des observations astronomiques qui en ont donné la direction. A et L sont les deux stations extrêmes de la chaîne. De L, on abaisse l'arc LX perpendiculaire sur la méridienne AV, et il s'agit de trouver la longueur et la graduation de AX, pour avoir l'arc du méridien terrestre, compris entre des points A et L dont les latitudes sont connues. On a donc ainsi la longueur et le nombre de degrés de cet arc AX, ce qui donne celle du degré de méridien terrestre en cette contrée, etc.

Tous les triangles sont sphériques et très peu courbes, tracés à la surface du niveau des mers, et l'arc AX est sur cette même surface. On connaît dans ces triangles les angles et les côtés, et nous verrons bientôt qu'on peut calculer les longitudes et les latitudes de tous les sommets, ainsi que les azimuts des côtés, c'est-à-dire les angles qu'ils font avec la méridienne AV, savoir les angles CAM, FMO, etc.

Prolongeons le côté CD jusqu'à sa rencontre en M avec la méridienne. Nous calculerons d'abord AM; dans le triangle

sphérique très peu courbe ACM, nous connaissons le côté AC, l'angle $ACM = \gamma$, mesurés et réduits à l'horizon, enfin l'azimut $CAM = \alpha$, du 1[er] côté CA, déterminé astronomiquement (n° 449). D'après la méthode de Legendre (n° 141), on trouvera l'excès sphérique ε de ce triangle ; la somme des trois angles sera $180° + \varepsilon = \alpha + 6 + \gamma$, ce qui fera connaître l'angle $M = 6$. On réduira ce triangle à un autre rectiligne $\alpha' 6' \gamma'$, en retranchant $\frac{1}{3}\varepsilon$, de chacun des angles α et γ ; le supplément de leur somme à 180° est l'angle $M = 6'$. On posera la proportion

$$\sin 6' : \sin \gamma' :: AC : AM = \frac{\sin \gamma'}{\sin 6'} \times AC.$$

Le calcul fera connaître en outre CM, puis $MD = CM - CD$.

On cherchera de même MO, dans le quadrilatère MDFO ; car la diagonale FM partage cette figure en deux triangles DMF, MFO. On connaît dans le 1[er], DF, DM et l'angle D, supplément de CDF ; ainsi l'on en trouvera les autres parties. Dans MFO, on connaît le côté FM et les deux angles adjacens : ainsi l'on calculera MO. Bien entendu que, dans chaque triangle, on aura égard à son excès sphérique, pour le réduire à être rectiligne.

Dans le triangle OHP, on a $OH = FH - FO$, et les angles adjacens. On calculera les autres parties.

Enfin, résolvant les triangles PHK, PKT, XLT, on obtiendra PZ, ZT, TX. Réunissant toutes les parties de l'arc, on aura la longueur totale AX du méridien. Il faudra que les triangles s'écartent peu de cet arc, et que surtout la dernière station L en soit très voisine, parce l'arc LX perpendiculaire à AV ne serait plus sensiblement parallèle à l'équateur, et les longitudes des points L et X ne seraient plus les mêmes. Au reste, nous reviendrons sur ce sujet (n° 233).

163. Ces calculs supposent que, connaissant les sinus de CM et CD, on en tire la différ. DM entre ces arcs, circonstance qui revient souvent dans la suite des opérations. Il convient donc

de résoudre ce problème : *Trouver le log. sinus de la somme ou de la différence de deux arcs, connaissant les log. sin. de ces arcs.* Soient m et n deux arcs donnés. On a (éq. 10, p. 35)

$$\sin m - \sin n = 2 \sin \tfrac{1}{2}(m-n) \cos \tfrac{1}{2}(m+n),$$

et comme $\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$,

$$\sin m - \sin n = \sin (m-n) \,.\, \frac{\cos \frac{1}{2}(m+n)}{\cos \frac{1}{2}(m-n)};$$

donc à cause de l'éq. 6, p. 35,

$$\sin (m-n) = (\sin m - \sin n) \,.\, \frac{\cos \frac{1}{2}(m-n)}{\cos \frac{1}{2}(m+n)}$$

$$= \sin m \left(1 - \frac{\sin n}{\sin m}\right) \times \frac{1 - 2\sin^2 \frac{1}{4}(m-n)}{1 - 2\sin^2 \frac{1}{4}(m+n)}.$$

Prenant les log. et développant (éq. 22, p. 36), se bornant aux 2es puissances des petits arcs m et n, il vient pour le log. de cette dernière fraction, à cause de l'éq. 13, p. 35,

$$2M \left\{ \sin^2 \tfrac{1}{4}(m-n) - \sin^2 \tfrac{1}{4}(m+n) \right\} = 2M \sin \tfrac{1}{2} m \,.\, \sin \tfrac{1}{2} n,$$
$$= \tfrac{1}{2} M \sin m \,.\, \sin n.$$

Donc enfin

$$\log \sin (m \pm n) = \log \sin m + \log \left(1 \pm \frac{\sin n}{\sin m}\right) \mp \frac{M}{2R^2} \sin m \sin n.$$

M désigne le module (p. 4), R le rayon de la terre, pour que les arcs m et n soient pris dans le cercle de rayon R.

164. Cette manière de trouver l'arc AX en mètres est due à Legendre, et comme les observations astronomiques ont fait connaître les latitudes des points extrêmes A et L, le nombre de degrés de l'arc AL est connu. Ainsi l'on saura avec précision quelle est la longueur de l'arc de méridien dont la graduation est donnée.

Le seul défaut de ce procédé est qu'il n'est pas analytique; il faut avoir sous les yeux une figure pour gouverner les calculs. On peut d'ailleurs varier les opérations, en employant divers angles et côtés des triangles, ce qui donne

une vérification des calculs, puisqu'en définitive on doit retrouver la même longueur pour l'arc AL. La précision est la même des deux parts, puisqu'on n'y introduit aucune donnée nouvelle tirée de l'observation ; en sorte que si l'on commettait quelque petite erreur de calcul, on trouverait des compensations. En déplaçant quelque peu le point M, sur AL, on allongerait AM, mais on accourcirait MO.

Au reste, nous reviendrons sur ce sujet, et exposerons un autre procédé purement analytique, qui n'exige le secours d'aucune figure, et porte avec lui sa vérification.

165. Voici l'application de cette méthode aux premiers triangles de la méridienne de France. A est Dunkerque (fig. 74), où l'on a mesuré l'azimut CAM $= \alpha$. Les données sont

Dunkerque A $\alpha = 16^\circ\, 46'\, 27'',59$ }
Cassel C ACM $= \gamma = 143.13.41,52$ } le côté AC $= 27458^m,60$.

Le 3ᵉ angle sphérique $M = \beta$ du triangle ACM considéré comme rectiligne est à fort peu près connu, et il est facile d'en tirer l'excès sphérique $\varepsilon = 0'',96$; donc

$$M = \beta \doteq 180^\circ\, 0'0'',96 - (\alpha + \gamma) = 19^\circ\, 59'51'',85.$$

Pour rendre le triangle ACM rectiligne, il faut retrancher de chaque angle $\frac{1}{3}\,\varepsilon = 0'',32$; donc ces angles deviennent

$\alpha' =$	$16^\circ 46' 27'' 27$	AC.............	4.4386784
$\gamma' =$	$143.13.41,20$	$\sin\gamma'$............	$\bar{1}.7771589$
$\beta' =$	$19.59.51,53$	$\sin\beta'$...........	$-\bar{1}.5340026$
AM $=$	48065^m63............	AM.............	4.6818347

On trouve de même CM $= 23170^m,97$, d'où...... DM $=$ CD $-$ CM $= 11993^m,11$.

Le triangle DMR, où l'on connaît DM, l'angle DMR $= \beta$, (ou $19^\circ 59'51'',85$) et MDR $= 134^\circ 11' 14'',78$ qu'on a mesuré, donne de même MR $= 19745^m,90$.

Et ainsi de proche en proche. On obtiendra donc enfin la longueur de tous les arcs partiels, et par suite de la méridienne entière. Il faut observer que les angles opposés au

sommet, tels que M, bien qu'étant égaux, ont des excès sphériques différens, comme étant parties de triangles différens. Ainsi quand on réduit aux triangles rectilignes, ces angles cessent d'être égaux.

166. C'est ainsi qu'on a trouvé l'arc de méridienne qui traverse la France, depuis Dunkerque jusqu'au parallèle de Montjouy, près Barcelonne : cet arc est de 551 584,7 toises. Le mètre était alors inconnu, et c'est la toise qu'on a employée à cette mesure. Cette distance équivaut à 1 075 059 mètres.

L'arc est de 9°40'24",24.

En outre, on a calculé des arcs compris entre les parallèles de quelques stations dont on avait trouvé les latitudes; ce qui a permis de comparer entre elles les longueurs des degrés à ces latitudes. Nous reviendrons sur ce sujet, lorsque nous aurons développé la théorie de la figure de la terre, (n° 187).

167. Depuis les premières opérations, on en a entrepris de nouvelles pour prolonger l'arc du méridien.

1°. Le général Roy l'a étendu jusqu'à Greenwich près Londres. Le travail de ce savant, exécuté avec un soin extrême, et des instrumens différens des nôtres, s'accorde à donner aux triangles du nord de la France exactement les mêmes élémens qu'on tire de la base de Melun, quoique ce général soit parti d'une autre base mesurée à Honslow-Heath, en Angleterre, avec la toise anglaise.

2°. Mrs Biot et Arago ont prolongé du côté du sud l'arc du méridien, et l'ont étendu au-delà de Barcelonne, jusqu'à l'île Formentera, la plus australe des Pithiuses; et M. Arago seul l'a prolongé jusqu'à Mayorque. Nous avons déjà fait observer (p. 142) qu'il existe un triangle, le plus grand de tous ceux qu'on ait employés jusqu'ici, dont l'un des côtés a environ 160900 mètres (40 lieues et demie). L'excès sphérique est de 39", et l'erreur des observations seulement de 1",594. Cette opération est une des plus belles et des plus précises qui aient été exécutées.

On a latitude de Greenwich $= 51°28'39'',5$
de Formentera $= 38.39.56,0$
arc de méridien de $12°48'43'',5$

C'est le septième du quart de méridien de Paris, mesuré dans une région que coupe par moitié le parallèle moyen, ou de 45°.

Au reste, nous exposerons plus tard un procédé analytique qui n'exige pas qu'on ait sous les yeux une figure représentant les positions relatives des stations, et qui fera connaître la longueur de tous les arcs partiels, ainsi que l'arc total du méridien. Ce procédé a aussi un moyen de vérification ; il consiste à projeter tous les côtés, soit orientaux, soit occidentaux des triangles, par des arcs perpendiculaires à la méridienne principale. La somme de ces projections respectives donne l'arc total.

Le procédé que nous avons décrit peut également s'appliquer à la détermination d'un arc de parallèle à l'équateur. Nous donnerons les formules relatives aux usages qu'on fait de ces arcs pour connaître l'aplatissement de la terre et la forme de ce sphéroïde.

Sur la figure de la terre.

168. La terre est un globe à peu près sphérique, dont nous voulons connaître la forme avec précision. Lorsque du rivage de la mer, on commence à apercevoir un navire au loin, avec une lunette, ce sont les voiles, c'est la mâture qu'on découvre d'abord ; on ne voit le corps du vaisseau, que quand il est assez près de la côte; et comme les dimensions de cette masse auraient dû la faire apercevoir avant les mâts, il faut en conclure que le corps du navire était caché par la rondeur de la surface de la mer. Les voyages de long cours conduisent souvent les navigateurs aux régions les plus éloignées ; ils font le tour entier de la terre, et reviennent au point de départ, en marchant toujours dans le même sens, ou du

moins en suivant une route sinueuse dont on peut conserver la trace sur une carte, et qui équivaut à celle-ci. Enfin, quand on s'avance vers le nord, la hauteur du pôle sur l'horizon augmente de plus en plus, et au contraire on cesse d'apercevoir du côté du sud certaines constellations qui sont visibles pour nous : des étoiles que nous voyons se coucher du côté septentrional, ne peuvent plus atteindre l'horizon de ces contrées. Des apparences opposées se font remarquer lorsqu'on procède vers le sud ; le pôle nord finit par se cacher sous l'horizon, à mesure qu'on découvre d'autres constellations australes qu'ici nous ne pouvons jamais voir.

169. Ces remarques prouvent que *la terre est un globe isolé dans l'espace et à peu près sphérique*, et ce fait est confirmé par la forme de l'ombre qu'elle projette dans les éclipses de lune.

Comme les hautes montagnes ne sont que des accidens rares sur la terre; que les plus élevées ne vont guère à plus de deux lieues dans la direction verticale, quantité à peine sensible quand on la compare au diamètre de la terre; on doit aplanir, par la pensée, ces petites inégalités. Il est donc certain qu'un spectateur placé au loin dans les espaces célestes, ne pourrait distinguer ces montagnes, et qu'il verrait la terre sous la forme d'un disque presque circulaire, tels que nous paraissent être le soleil, la lune et les planètes.

Mais si, dans la plupart des cas, on est autorisé à regarder la terre comme sphérique, il en est d'autres où cette approximation ne suffit plus. Des preuves physiques et géologiques conspirent à faire penser qu'autrefois la terre a été dans un état complet de fluidité, et qu'elle est même encore liquide dans son intérieur, sous l'influence d'une énorme chaleur, ainsi que nous le ferons bientôt voir. La surface s'est refroidie, et en se solidifiant, elle a à peu près conservé la forme qu'elle avait reçue sous l'influence des causes qui avaient déterminé cette forme.

Les planètes nous offrent des conséquences analogues, et il

est bien vraisemblable que ce n'est pas par un simple effet du hasard que ces corps sont à peu près sphériques. L'observation montre que les diamètres de Jupiter ne sont pas égaux, et que cette planète, qui tourne, comme la terre, sur un axe, est aplatie de $\frac{1}{13}$ sur ses pôles. Le globe terrestre est pareillement aplati, ainsi que nous le prouverons, et il est naturel de rapporter cette circonstance à la même cause.

170. On a cherché, par la théorie, quelle forme prendrait un globe de matière liquide, dont les molécules seraient soumises à leur attraction mutuelle, à un mouvement de rotation autour d'un axe central, et à une puissance attractive extérieure. S'il n'existait que la première de ces forces, la terre formant une masse liquide et immobile devrait prendre la figure sphérique.

Mais la rotation diurne de la terre sur un axe constant, cause de la révolution apparente du ciel étoilé et de la succession des jours et des nuits, agissant sur cette masse sphérique, on reconnaît que cette forme n'a pu être durable; et que le globe a dû se renfler sous l'équateur et s'aplatir aux pôles, par un effet de la *force centrifuge*. Un liquide quelconque homogène, contenu dans un siphon ouvert, doit s'élever à la même hauteur dans les deux branches, parce que l'équilibre exige que les pressions produites par la pesanteur soient les mêmes des deux parts. Mais concevons un siphon dont le coude serait au centre de la terre, et dont les branches à angle droit iraient l'une au pôle, l'autre à l'équateur. Entraînée par la rotation de la terre, cette seconde branche décrirait chaque jour le cercle équatorial, et le liquide y deviendrait moins pesant : car la force centrifuge étant opposée à la gravité, diminue le poids du liquide qui est dans cette branche; sans agir sur celui qui est dans l'autre; et puisque la première colonne est moins pesante, elle ne fait plus équilibre à la seconde. Pour que les deux poids soient égaux, il faut donc que le liquide s'élève à une plus grande hauteur, dans la branche où le poids est moin-

dre, jusqu'à ce que les deux colonnes aient des poids égaux de liquide.

171. Newton a exprimé par l'analyse les conditions de ce problème, et a trouvé que si le globe terrestre était homogène, l'aplatissement serait $\frac{1}{230}$ (voy. *Fig. de la Terre*, par Clairaut, 2e partie n° 20); mais cette hypothèse n'est point admissible. Les densités variables des couches intérieures changent la valeur de cette fraction.

Ce qui tend à prouver que l'aplatissement de la terre est dû à sa fluidité primitive et à son mouvement de rotation, c'est que l'aplatissement de Jupiter, qui est beaucoup plus considérable que celui de la terre, est aussi produit par une rotation plus rapide. Les taches qu'on voit à la surface de cette planète ont permis de mesurer la vitesse de ce mouvement et de reconnaître qu'elle est presque triple de celle de la révolution diurne de notre globe, et comme en outre le volume de Jupiter est 1281 fois celui de la terre, la force centrifuge y est beaucoup plus grande, et produit un aplatissement que, par le calcul, on prouve être 24 fois plus fort. Il est, comme on voit, très vraisemblable que la terre et les planètes ont été autrefois fluides.

Quoique nous ne sachions pas comment la densité varie dans l'intérieur de la terre, sa fluidité doit rendre la masse croissante vers le centre. Clairaut a démontré (*Fig. de la Terre*, 2e partie, n° 38) que l'aplatissement est moindre que dans le cas de l'homogénéité, ce que nous trouverons conforme à l'observation; ainsi l'hypothèse de la fluidité se trouve justifiée. Mais pour trouver *à priori*, et théoriquement, la forme que prend un sphéroïde liquide de densité variable, soumis à l'attraction mutuelle de ses molécules et à une vitesse de rotation, il faut connaître la loi des densités, savoir s'il existe un noyau central, et quelle est sa figure, sa densité, etc. (*Voy.* l'ouvrage cité et le 3e livre de la *Mécan. céleste*.)

172. Soit PMA (fig. 71) une section du sphéroïde par l'axe

de rotation PC, qui est celui des pôles. On sait, par l'hydrostatique, que les éq. de la surface du corps (*voy.* ma *Mécanique*, n° 322), et des couches de niveau sont

$$\int (Xdx + Ydy + Zdz) = \text{constante};$$

x, y, z sont les coordonnées d'une molécule quelconque, sollicitée par les forces accélératrices dont X, Y et Z sont les composantes parallèles aux axes rectangulaires. La masse est supposée fluide et incompressible; or on sait que

1°. $Xdx + Ydy + Zdz$ doit être une différentielle exacte, ou du moins rendue intégrable par quelque facteur.

2°. L'éq. exprime cette propriété importante de la surface libre, que la direction de la normale en un point quelconque coïncide toujours avec la direction de la force qui agit sur la molécule.

Appliquons cette théorie au cas où les molécules sont soumises à une force attractive vers le centre C, en raison inverse du carré des distances, et à la force centrifuge due à la rotation autour de l'arc CP des y. En désignant par k la force d'attraction à la distance 1 du centre C, elle est $\frac{k}{r^2}$ à la distance r, sur la molécule M, en faisant $CM = r$; les cosinus des angles que fait la direction de cette force (selon CM) avec les axes, sont $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$; ainsi les composantes dans le sens des axes sont $-\frac{kx}{r^3}$ et $-\frac{ky}{r^3}$.

En outre, soit f la force centrifuge à la distance 1 de l'axe CP de rotation, elle est $= fx$ pour la molécule M, puisque cette force croît proportionnellement à la distance $MO = x$. Elle se confond avec sa composante dans le sens des x; celle suivant les y est nulle.

Nous n'avons pas égard à l'axe des z, et nous faisons $Z = 0$, puisque, dans l'état des choses, la surface étant de révolution, les molécules de tous les méridiens se comportent de même,

et que nous avons pu raisonner sur l'un d'eux PMA; ainsi l'on a

$$X = -\frac{kx}{r^3} + fx, \quad Y = -\frac{ky}{r^3};$$

ce qui change notre éq. fondamentale en

$$-k\int\frac{xdx + ydy}{r^3} + \int fxdx = \text{const.}$$

Et comme $r^2 = x^2 + y^2$, $rdr = xdx + ydy$; on trouve

$$-k\int\frac{dr}{r^2} + \int fxdx, \text{ ou } \frac{k}{r} + \frac{fx^2}{2} = \text{const.}$$

En faisant le rayon polaire $CP = 1$, on a pour le point P, $r = 1$ et $x = 0$: ainsi la constante $= k$. Faisons l'angle MCA $= \theta$, d'où $x = r\cos\theta$, et

$$\frac{k}{r} + \frac{fr^2\cos^2\theta}{2} = k.$$

Pour faire intervenir dans le calcul la condition que le sphéroïde est peu différent d'une sphère, faisons $r = 1 + u$, u sera une petite quantité variable avec les divers points M de la surface. Or notre équation donne

$$\tfrac{1}{2}f\cos^2\theta = \frac{k - \frac{k}{r}}{r^2} = \frac{k(r-1)}{r^3} = \frac{ku}{(1+u)^3};$$

développant $(1+u)^{-3} = 1 - 3u$, et nous bornant aux termes du 1er ordre, on a

$$\tfrac{1}{2}f\cos^2\theta = k(u - 3u^2). \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Pour une 1re approximation, négligeons le terme $3u^2$,

$$ku = \tfrac{1}{2}f\cos^2\theta, \quad r = 1 + \frac{f}{2k}\cos^2\theta;$$

la surface est donc celle d'un ellipsoïde de révolution, puisque l'éq. de tous les méridiens est celle d'une ellipse dont l'excentricité est $\frac{f}{2k}$. Tirant la valeur du terme ku dans l'éq. (1)

et substituant pour u sa valeur dans $r = 1 + u$,

$$r = 1 + \frac{f}{2k}\cos^2\theta + 3u^2 = 1 + \frac{f}{2k}\cos^2\theta + \frac{3f^2\cos^4\theta}{4k^2},$$

en mettant pour ku sa valeur approchée $\frac{1}{2}f\cos^2\theta$. Or on a $\cos^4\theta = \cos^2\theta\,(1-\sin^2\theta)$, ce qui change notre dernier terme en

$$\frac{3f^2}{4k^2}\cos^2\theta - \frac{3f^2}{4k^2}\cos^2\theta\sin^2\theta = \frac{3f^2}{4k^2}\cos^2\theta - \frac{3f^2}{16k^2}(2\sin\theta\cos\theta)^2;$$

donc

$$r = 1 + \left(\frac{f}{2k} + \frac{3f^2}{4k^2}\right)\cos^2\theta - \frac{3f^2}{16k^2}\sin^2 2\theta.$$

Telle est l'éq. polaire du méridien, en se bornant au 1er ordre de u. En prenant $\theta = 90°$, on a $r = 1 = \text{CP}$, ce qu'on savait déjà ; faisant $\theta = 0$, il vient $r = 1 + \frac{f}{2k} + \frac{3f^2}{4k^2} = \text{CA}$: ainsi le sphéroïde est aplati aux pôles, et le rayon équatorial CA excède celui CP du pôle. Le rapport de l'excentricité de l'ellipsoïde de la 1re approximation, à l'excès dont il s'agit est celui de $\frac{f}{2k}$ à $\frac{f}{2k} + \frac{3f^2}{4k^2}$, ou de 1 à $1 + \frac{3f}{2k}$. Or, f est la force centrifuge sous l'équateur (à fort peu près, puisque CA diffère peu de CP), force qu'on sait être le 289e de la gravité k. Ainsi l'excentricité a augmenté du 200e de ce qu'elle était d'abord, et comme les observations ne peuvent saisir une aussi petite différ., on n'a aucun intérêt à supposer au sphéroïde une figure autre que celle de l'ellipsoïde de révolution.

(*Voy.* n° 591, T. II de la *Mécanique* de M. Poisson.)

173. Les physiciens attribuent la forme aplatie du sphéroïde terrestre à un état primitif de fluidité. Comme cette hypothèse surprend au premier abord, et que l'étonnement est augmenté surtout lorsqu'on apprend que cet état existe encore sous la croûte mince et solide qui recouvre notre globe, et est produit par une prodigieuse élévation de température qui ne se dissipe pas avec le temps, il importe, avant d'aller plus loin, de mettre ces faits en évidence. Nous ne pouvons mieux

faire, à cet égard, que de citer les argumens mêmes que M. Arago a exposés dans l'*Annuaire de* 1834. Cet illustre astronome, qui ne dédaigne pas de mettre la science à la portée de tous, est parvenu à traiter la question qui nous occupe de manière à ne laisser aucun doute sur la solution qu'il donne; nous reproduirons ici ses propres expressions.

« *A l'origine des choses, la terre était probablement incandescente. Aujourd'hui elle conserve encore une partie notable de sa chaleur primitive.*

» Nous aurons fait un premier pas vers la démonstration de ces deux propositions capitales, si nous parvenons à découvrir dans quel état, soit fluide, soit solide, se trouvait la terre à l'origine des choses.

» Si la terre était déjà solide quand elle commença à tourner sur son centre, la forme qu'elle avait accidentellement alors, a dû se conserver à peu près intacte, malgré le mouvement de rotation. Il n'en serait pas de même dans la supposition contraire. Une masse fluide prend nécessairement, à la longue, la figure d'équilibre correspondante à toutes les forces qui la sollicitent; or, la théorie montre qu'une telle masse, supposée d'abord homogène, doit s'aplatir dans le sens de l'axe de rotation, et se renfler à l'équateur : elle donne la différence de longueur des deux diamètres; elle fait connaître que, dans l'état final d'équilibre, la figure générale de la masse est celle d'un ellipsoïde; elle signale les modifications qui peuvent résulter, dans les hypothèses physiques les plus vraisemblables, d'un défaut d'homogénéité des couches liquides. Tous ces résultats du calcul se concilient à merveille, quant à leur ensemble, et même quant à leurs valeurs numériques, avec les nombreuses mesures de la terre qu'on a faites dans les deux hémisphères. Un tel accord ne saurait être un pur effet du hasard.

La terre a donc été anciennement fluide.

» Reste à découvrir la cause de cette antique fluidité. J'ai annoncé en tête de ce chapitre que cette cause était *le feu* : mais il s'en faut de beaucoup qu'on se soit unanimement ac-

cordé sur ce point. Les géologues de l'*École neptunienne* n'ont voulu admettre qu'une fluidité aqueuse. Suivant eux, les matières terrestres, dont les propriétés sont si diverses, étaient originairement dissoutes dans un liquide, et la charpente solide du globe s'est formée par voie de dépôt ou de précipitation. Les *Plutoniens*, de leur côté, rejettent toute idée de dissolvant. Pour eux, la fluidité des principes constituans du globe, fut jadis le résultat d'une très haute température ; la surface s'est solidifiée en se refroidissant.

» Les deux écoles, j'ai presque dit les deux sectes, tant elles montrèrent d'acrimonie, se combattirent par des argumens peu décisifs, empruntés aux phénomènes géologiques, et qui laissaient les esprits rigides en suspens. Le vrai moyen de mettre un terme aux débats était évidemment d'examiner s'il existait au sein du globe des restes, des indices certains de la chaleur d'origine invoquée par les Plutoniens. Tel est le problème dont les physiciens et les géomètres, par des efforts communs, sont parvenus à donner une solution satisfaisante.

» Dans tous les lieux de la terre, dès qu'on est descendu à une certaine profondeur, le thermomètre n'éprouve plus ni variation diurne, ni variation annuelle : il marque constamment le même degré et la même fraction de degré, pendant toute l'année, et pendant toutes les années. Voilà le fait. Que dit la théorie?

» *Supposons un moment que la terre ait reçu toute sa chaleur du Soleil.* Le calcul *fondé sur cette hypothèse* nous apprendra 1°, qu'à une certaine profondeur la température sera invariable ; 2°. que cette température *solaire* de l'intérieur du globe change avec la latitude. Sur ces deux points, la théorie et l'observation sont d'accord ; mais nous devons ajouter que, d'après la théorie, dans chaque climat, la température constante des couches terrestres, serait la même à toutes les profondeurs, du moins tant qu'on ne s'enfoncerait pas de quantités fort grandes relativement au rayon du globe. Or, tout le monde sait aujourd'hui qu'il n'en est pas ainsi : les observations faites dans une multitude de mines, les observations de

la température de l'eau d'un grand nombre de fontaines jaillissantes venant de différentes profondeurs, se sont accordées à donner un accroissement d'un degré centigrade pour 20 à 30 mètres d'enfoncement. Quand une hypothèse conduit à un résultat aussi complétement en désaccord avec les faits, elle est fausse, et doit être rejetée.

» Ainsi il n'est point vrai que les phénomènes de température des couches terrestres, puissent être attribués à la seule action des rayons solaires.

» L'action solaire une fois éliminée, la cause de l'accroissement régulier de chaleur qui s'observe en tout lieu à mesure qu'on pénètre dans l'intérieur du globe, ne saurait être qu'une chaleur propre, une chaleur d'origine. La terre, comme le veut l'école plutonienne, comme le voulaient déjà Descartes et Leibnitz, mais les uns et les autres, il faut l'avouer, sans aucune preuve démonstrative, est devenue aujourd'hui, définitivement, un *soleil encroûté* dont la haute température pourra être hardiment invoquée, toutes les fois que l'explication des phénomènes géologiques l'exigera. »

Nous ne suivrons pas le savant académicien dans l'examen qu'il fait de la question qui a pour objet de découvrir combien il a fallu de siècles pour refroidir la terre à partir de son époque d'incandescence; où il prouve que depuis 2000 ans la température générale de la terre n'a pas varié de $\frac{1}{10}$ de degré, etc. Toutes ces considérations physiques d'un haut intérêt sont étrangères au sujet que nous traitons. Il nous paraît suffisant d'avoir montré que l'incandescence originaire de la terre, et celle même du noyau actuel jusque fort proche de sa surface, sont des faits incontestables : qu'obéissant à son mouvement de rotation autour d'un axe central, notre globe, jadis entièrement à l'état de fusion ignée, a dû recevoir la forme d'un ellipsoïde de révolution : qu'enfin la surface en se solidifiant par la perte de sa chaleur primitive, conservant cette même forme, n'a dû y éprouver que de faibles altérations produites, soit par des actions locales intérieures analogues à celles des volcans, soit par des causes encore inappré-

ciées. Les inégalités accidentelles de la terre trouvent ainsi une explication vraisemblable.

174. Les mesures géodésiques, prises à la surface terrestre, ont fait connaître que le degré près du pôle est plus long que celui de l'équateur, et l'on a trouvé 456 toises de plus à l'un qu'à l'autre. Si l'on compare 456 au degré de méridien en France, qui est de 57020 toises, on trouve que cet excès n'en est que le 125[e]. Ainsi les degrés de méridien, quoique inégaux, diffèrent très peu, *et dans les recherches qui n'exigent pas une grande précision, on peut supposer la terre sphérique.* Toutes les opérations de ce genre ont confirmé cette proposition.

Comme l'ellipsoïde de révolution est un corps de forme très simple, qu'il est indiqué par la théorie, et qu'il remplit les conditions relatives ci-dessus énoncées, il est naturel de consulter les observations pour s'assurer si cette forme convient réellement à la terre. Supposons donc que ce globe soit en effet engendré par la révolution d'une ellipse autour de l'axe des pôles qui en est le petit axe. Recherchons, par analyse, les relations des différentes parties de ce corps, et voyons si effectivement cette hypothèse s'accorde avec les faits observés.

De grands travaux ont été entrepris dans ce but, en différens lieux, avec des frais immenses, par le secours des gouvernemens; c'est de cette multitude d'efforts qu'est résultée la certitude que la terre est un corps irrégulier, même en faisant abstraction des montagnes et des cavités, qui ne sont que des accidens minimes de localités. Mais on a reconnu aussi, que, de toutes les formes régulières, l'ellipsoïde de révolution autour de son petit axe, qui est celui des pôles, est celle qui ne diffère que très peu du sphéroïde terrestre.

C'est en 1735 que des académiciens allèrent mesurer des arcs de méridien. Au Pérou, La Condamine et Bouguer; en Laponie, Maupertuis, Clairaut, Camus et Lemonnier, firent usage des méthodes et des instrumens les plus parfaits qu'on eût alors. Un grand nombre de géomètres ont uni leurs efforts aux leurs. Snellius, dans les Pays-Bas; Norwood et Mudge en

Angleterre; Picard, Lahire, Cassini, Méchain, Delambre, Biot, Arago en France: Ulloa au Pérou; Celsius et Swamberg en Laponie; La Caille au cap de Bonne-Espérance; Lambton et Burrow aux Indes-Orientales; Ricciolì, Beccaria, Lemaire et Boscowich en Italie; Liesganig en Autriche; Mason et Dixon en Pensylvanie; les ingénieurs géographes français dans la haute Italie, etc., ont mesuré des triangles et des bases pour arriver à connaître l'arc du méridien. De ces grands travaux résulte notre admirable système métrique, l'un des plus beaux monumens des sciences dans le XVIII[e] siècle. Carlini, Maraldi, Brousseaud ont pris la mesure des arcs de parallèles. Et comme les oscillations du pendule à secondes sont liées à la figure de la terre, de nombreuses expériences ont été faites en divers lieux, par Borda, Biot, Arago, Kater, Sabine, Freycinet, Duperrey, Foster, etc., pour trouver la longueur de ce pendule, afin d'en conclure l'aplatissement de la terre.

Prenant la question au point où l'expérience l'a amenée, nous allons rechercher les propriétés géométriques de l'ellipsoïde de révolution, et les formules qui en lient les divers élémens: puis partant des faits observés, et les comparant aux résultats de ces formules, nous montrerons qu'en effet cette figure convient très sensiblement au globe terrestre; et enfin nous donnerons les moyens de corriger les petites erreurs que cette supposition entraîne, quand elles sont de nature à intéresser la science.

Formules relatives à l'ellipsoïde de révolution.

175. Supposons que l'ellipsoïde APA' (fig. 78) tourne autour de son petit axe CP passant par le centre C et le pôle P; $CA = A$ est le rayon du cercle équatorial, qu'on nomme la *ligne équinoxiale;* $CP = B$ est le demi-axe polaire; F le foyer, CF l'excentricité, TM la tangente, et MN la normale en un point quelconque M, dont les coordonnées sont $CQ = x'$, $QM = y'$.

Les éq. de l'ellipse, de sa tangente et de sa normale sont

(*voy.* mon *Cours de Math. pures*, n° 386,408)

$$A^2y'^2 + B^2x'^2 = A^2B^2,$$
$$A^2yy' + B^2xx' = A^2B^2,$$
$$B^2x'(y - y') = A^2y'(x - x').$$

Soit e le rapport de l'excentricité CF au demi-grand axe CA, ou $e = \frac{CF}{CA}$; comme $CF = \sqrt{(A^2 - B^2)}$, on a

$$e^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2} = 1 - \frac{B^2}{A^2} \ldots\ldots \quad (1)$$

On appelle *aplatissement* le rapport de la différence des axes au grand axe. Soit $\frac{1}{p}$ l'aplatissement du globe terrestre supposé ellipsoïdal, ou

$$\frac{1}{p} = \frac{A - B}{A} = 1 - \frac{B}{A} \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

d'où $\qquad e^2 = 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}.$

Comme le nombre p diffère peu de 300, on néglige souvent $\frac{1}{p^2}$, et l'on prend $e^2 = \frac{2}{p}$: *le carré* e^2 *est donc, à fort peu près, le double de l'aplatissement.*

176. Désignons par l la latitude du point M (x', y') ; cet arc l, tel que le donnent les observations astronomiques, ainsi qu'on le dira plus tard, est la hauteur du pôle P′ sur l'horizon TM, c'est-à-dire l'angle P′KT′, savoir .... angle K = MNV = l. Or, $\tang T = \frac{B^2x'}{A^2y'}$; et comme l'angle T est le complément de N, on a

$$B^2x' \tang l = A^2y' \; ; \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

tirant Ay' de cette éq. et substituant dans celle de l'ellipse, il vient, à cause de $A^2e^2 = A^2 - B^2$,

$$x' = \frac{A^2}{\sqrt{(A^2 + B^2 \tang^2 l)}}, \quad y' = \frac{B^2 \tang l}{\sqrt{(A^2 + B^2 \tang^2 l)}},$$

ou

$$x' = \frac{A \cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}, \quad y' = \frac{A(1 - e^2) \sin l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}} \ldots \quad (4)$$

x est le rayon OM du cercle MM' parallèle à l'équateur, rayon donné ici en fonction de la latitude l du point M.

177. Toute ligne partant du centre C, et aboutissant à un point M de l'ellipsoïde est le *rayon* R de ce point de la surface; ce rayon varie avec les lieux : au pôle P, il est $= B$; sous l'équateur, il est $= A$; et va en croissant de B vers A, à mesure que la latitude diminue. On ne doit pas confondre le rayon R avec la normale $MN = N$, qui, dirigée selon la verticale MZ du lieu M, ne tend pas au centre C, si ce n'est pour les lieux A et P. Cherchons la loi des variations du rayon $R = CM$;

On a $R^2 = x'^2 + y'^2$, d'où

$$\left.\begin{aligned} R &= A\sqrt{\left[1 - \frac{e^2(1-e^2)\sin^2 l}{1 - e^2 \sin^2 l}\right]} \\ &= A\sqrt{\left[\frac{1 - e^2(2-e^2)\sin^2 l}{1 - e^2 \sin^2 l}\right]} \end{aligned}\right\} \ldots \quad (5)$$

Dans le triangle MNV, où l'angle $N = l$, on a $NV = x' = N \cos l$; d'une autre part, si l'on pose $x = 0$ dans l'éq. de la normale, pour avoir l'ordonnée CN du point N de section avec l'axe des y, on trouve

$$CN = -y' \cdot \frac{A^2 - B^2}{B^2} = -\frac{A^2 e^2 y'}{B^2} = -\frac{e^2 y'}{1 - e^2}.$$

Ce signe $-$ prouve que le point N est toujours situé de l'autre côté du grand axe AA'. On a pour valeur de la normale N, et de la partie CN,

$$N = \frac{x'}{\cos l} = \frac{A}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}} \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$CN = -\frac{Ae^2 \sin l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}} = -Ne^2 \sin l.$$

178. On a souvent besoin de calculer l'angle CMN $= i$ (fig. 78) que fait le rayon terrestre CM avec la verticale MN du lieu M dont la latitude est l : cet angle très petit est d'un fréquent usage dans la théorie des parallaxes. Voici une formule propre à déterminer l'angle i.

Comme $i =$ MBQ $-$ MCQ, MBQ $= l$, et

tang MCQ $= \frac{y'}{x'} = \frac{B^2}{A^2}$ tang l, on trouve (éq. 7, p. 35)

$$\text{tang } i = \frac{\text{tang } l - \frac{B^2}{A^2}\text{tang } l}{1 + \frac{B^2}{A^2}\text{tang}^2 l} = \frac{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2\right]\text{tang } l}{1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2\text{tang}^2 l},$$

à cause de $\frac{B}{A} = 1 - \frac{1}{p}$. Multiplions haut et bas par $\cos^2 l$,

$$\text{tang } i = \frac{\left(\frac{2}{p} - \frac{1}{p^2}\right)\sin l \cos l}{1 - \frac{2}{p}\sin^2 l + \frac{1}{p^2}\sin^2 l};$$

et effectuant la division,

$$\text{tang } i = \left[\frac{2}{p} - \frac{1 - 4\sin^2 l}{p^2} - \frac{4\sin^2 l(1 - 2\sin^2 l)}{p^3} \ldots\right]\sin l \cos l.$$

Or d'après les formules connues,

$\sin 2l = 2\sin l\cos l$, $\cos 3l = \cos l(1 - 4\sin^2 l)$, $\cos 2l = 1 - 2\sin^2 l$,

donc on a

$$\text{tang } i = \frac{\sin 2l}{p} - \frac{\sin l\cos 3l}{p^2} - \frac{\sin^2 l\sin 4l}{p^3} \ldots$$

Le second terme ne s'élève jamais à 2″,3, lorsqu'on prend $p = 280$; aussi se borne-t-on ordinairement à tang $i = \frac{\sin 2l}{p}$, ou plutôt, en exprimant l'arc i en secondes (n° 34), à

$$i = \frac{\sin 2l}{p \sin 1''}.$$

Si l'on conserve les deux premiers termes, précision qui dépasse tous les besoins, on trouve, d'après l'éq. (20), p. 36, en exprimant l'arc i en secondes,

$$i = \frac{\sin 2l}{p \sin 1''} - \frac{\sin l \cos 3l}{p^2 \sin 1''} \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Telle est la valeur, en secondes, de *l'angle du rayon terrestre avec la verticale du lieu qui a* l *pour latitude.*

On a coutume d'appeler *latitude géocentrique* l'angle... $MCA = l'$, qui est la hauteur du pôle pour un spectateur qui serait transporté du lieu M au centre de la terre et aurait CM pour sa verticale. L'angle i est la quantité qu'on doit retrancher de la latitude apparente ou astronomique $l = MNV$ pour avoir la latitude géocentrique MCA, $l' = l - i$.

Nous avons d'ailleurs trouvé plus haut l'éq.

$$A^2 \tang l' = B^2 \tang l,$$

qui à cause des éq. (1) et (2), revient à

$$\tang l' = (1 - e^2) \tang l = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \tang l.$$

179. On trouve encore l'angle i de la manière suivante. En reprenant notre première valeur de $\tang i$, qui est $\frac{(A^2 - B^2)\tang l}{A^2 + B^2 \tang^2 l}$, et mettant pour $\tang l$ sa valeur $\frac{\sin l}{\cos l}$, on a

$$\tang i = \frac{(A^2 - B^2)\sin l \cos l}{A^2 \cos^2 l + B^2 \sin^2 l} = \frac{(A^2 - B^2)\sin 2l}{2A^2 - 2(A^2 - B^2)\sin^2 l}.$$

Mais $2\sin^2 l = 1 - \cos 2l$, ainsi

$$\tang i = \frac{(A^2 - B^2)\sin 2l}{2A^2 - (A^2 - B^2)(1 - \cos 2l)} = \frac{(A^2 - B^2)\sin 2l}{A^2 + B^2 + (A^2 - B^2)\cos 2l};$$

enfin posant pour abréger $\frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} = K$,

$$\tang i = \frac{K \sin 2l}{1 + K \cos 2l}.$$

Dans cette expression facile à développer en série convergente, on trouve, à cause de $\frac{B}{A} = 1 - \frac{1}{p}$,

$$K = \frac{2p - 1}{2p^2 - 2p + 1}.$$

Il est commode de résoudre en table cette formule, afin d'y trouver, pour toutes les latitudes l, la valeur correspondante de l'arc i.

180. Quoiqu'on fasse rarement usage du rayon ρ de courbure de l'ellipse au point M, nous donnerons la valeur de ce rayon (*Cours de Math.*, n° 735)

$$\rho = \frac{\sqrt{(A^4 - c^2x'^2)^3}}{A^4 B},$$

en faisant $c^2 = A^2 - B^2 = A^2e^2$. Donc, à cause de $B^2 = A^2(1 - e^2)$, on a

$$\rho = \frac{\sqrt{(A^2 - e^2x'^2)^3}}{A^2\sqrt{1 - e^2}} = \frac{A}{\sqrt{1 - e^2}}\left[1 - \frac{e^2\cos^2 l}{1 - e^2\sin^2 l}\right]^{\frac{3}{2}},$$

d'où
$$\rho = \frac{A\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = N^3 \cdot \frac{1 - e^2}{A^2}\ldots$$

181. Soient G et H (fig. 80) deux stations, dont la distance GH $= \varphi$; la normale N $=$ GI. Le petit arc terrestre φ se confond sensiblement avec l'arc de cercle GH, décrit du centre I. Du rayon IL $= 1$, traçons l'arc LO $= a$. Ici a, φ, N sont rapportés à la même unité de mesure IL (mètre, toise...). On a $1 : a :: N : \varphi$, d'où

$$\varphi = Na = N\,(a'')\sin 1'',$$

en désignant par (a'') le nombre de secondes du petit arc a (p. 37); A désignant toujours la demi-grand axe, on a

$$\varphi\sqrt{(1 - e^2\sin^2 l)} = Aa = A(a'')\sin 1'',$$

en mettant pour N sa valeur (6). Développons le radical

$$(a'') = \frac{\varphi\sqrt{1 - e^2\sin^2 l}}{\text{A} \sin 1''}, \quad a = (a'') \sin 1'',$$

$$(a'') = \frac{\varphi}{\text{A} \sin 1''}\left(1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2 l - \frac{1}{8}e^4\sin^4 l \ldots\right),$$

$$\varphi = \text{A}a\,(1 + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 l + \tfrac{3}{8}e^4\sin^4 l \ldots).$$

Comme e^2 est une petite fraction, ces séries sont très convergentes ; elles *servent à traduire les arcs terrestres en secondes de degré, et réciproquement les nombres de secondes en distances itinéraires.* a est la longueur de l'arc semblable à φ, mais décrit avec le rayon 1.

182. Développons selon les puissances de e^2 nos autres expressions. Le rayon R (fig. 78) s'obtient d'abord, en négligeant le 5ᵉ ordre :

$$\begin{aligned}
\text{R} &= \text{A}\sqrt{(1 - 2e^2\sin^2 l + e^4\sin^2 l)(1 + e^2\sin^2 l + e^4\sin^4 l)} \\
&= \text{A}\sqrt{(1 - e^2\sin^2 l + e^4\sin^2 l\cos^2 l)} \\
&= \text{A}\quad [1 - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2 l + \tfrac{1}{8}e^4\sin^2 l\,(4 - 5\sin^2 l)] \\
&= \text{A}\quad \left(1 - \frac{\sin^2 l}{p} + \frac{5}{8}\cdot\frac{\sin^2 2l}{p^2}\right), \ldots\ldots\ldots \quad (8)
\end{aligned}$$

en développant la puissance $\frac{1}{2}$ du trinome. Cette série exprime la longueur du rayon terrestre pour le lieu dont la latitude est l ; A est le rayon de l'équateur, e l'excentricité, $\frac{1}{p}$ l'aplatissement. Lorsqu'on néglige les e^4 ou p^2, on a $e^2 = \frac{2}{p}$ (éq. 2), et

$$\text{A} - \text{R} = \frac{\text{A}\sin^2 l}{p} = \frac{\text{A}}{2p}(1 - \cos 2l) \ldots \quad (9)$$

C'est l'*excès du rayon de l'équateur sur tout autre rayon terrestre.* On réduit aisément cette expression en table, d'où l'on tire le rayon R à toute latitude l ; mais il faut connaître A et p. En conservant p^2, on trouve

$$\text{A} - \text{R} = \frac{\text{A}}{p}\left(\sin^2 l - \frac{5\sin^2 2l}{8p}\right) \ldots\ldots \quad (10)$$

Au reste ce dernier terme est ordinairement négligeable.

183. On développe de même la normale N, le rayon x' de parallèle, le rayon ρ de courbure (fig. 78) :

$$N = A(1 - e^2 \sin^2 l)^{-\frac{1}{2}} = A(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 l), \quad (11)$$

$$x' = N \cos l = A \cos l (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l + \text{etc.}), \quad (12)$$

$$\rho = A(1 - e^2)(1 - e^2 \sin^2 l)^{-\frac{3}{2}} = \frac{(1 - e^2) N^3}{A^2}, \quad (13)$$

$$= A(1 - e^2)\left\{1 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin^2 l + \tfrac{15}{8} e^4 \sin^4 l\right\}. \quad (14)$$

184. Observez que le zénith de M est en Z (fig. 78) sur le prolongement de la verticale NM; mais si l'on suppose un spectateur placé au centre C, il voit le point M dans la direction CMH, et H est appelé *zénith vrai* ou *géocentrique*, pour le distinguer du point Z, qui est le *zénith apparent*. De même l'angle MNV est la latitude l, qu'on distingue de l'angle MCA, qui est appelé *la latitude géocentrique* : l'angle CMN = HMZ = i, que fait *la verticale avec le rayon terrestre*, est la différence entre ces deux latitudes. Ces grandeurs entrent dans les calculs astronomiques, et nous avons donné (n° 178) des relations analytiques entre elles.

185. Désignons par s la longueur d'un arc de méridien terrestre, portion d'une ellipse. En différentiant l'éq. (4), on trouve

$$dx' = -A . \frac{(1 - e^2)\sin l . dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}}; \quad (15)$$

et comme, dans le triangle infinitésimal Mmo, on a Mm, ou $ds = -\frac{dx'}{\sin l}$, il vient

$$ds = A . \frac{(1 - e^2)\, dl}{(1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}}} = \rho\, dl \ldots\ldots \quad (16)$$

Développons en série la puissance $-\frac{3}{2}$, mais ne poussons d'abord les calculs que jusqu'aux e^2 ; nous avons

$$ds = A dl (1 - e^2 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin^2 l) \ldots\ldots \quad (17)$$

Cette éq. donne approximativement la distance itinéraire ds

entre deux lieux voisins, sur un méridien, dl étant la différence de leurs latitudes : on prend pour l la latitude du milieu de cette petite distance. Pour en faire usage, il faudrait connaître A et e^2, ou l'aplatissement $\frac{1}{p}$. Réciproquement cette éq. peut donner l'une de ces constantes, lorsqu'on a mesuré ds. C'est ce qui va être expliqué.

186. Mais avant, remarquons que l'éq. (17) a la forme $ds = K + H \sin^2 l$; K est la valeur de ds à l'équateur où $l = 0$; $ds' = K$; ainsi $ds - ds' = H \sin^2 l$; donc les degrés du méridien croissent en allant de l'équateur au pôle; et les *accroissements sont proportionnels aux carrés des sinus de la latitude*.

Le même théorème a pareillement lieu pour le rayon R, la normale N, et le rayon de courbure ρ.

187. Prenons, en deux contrées, les longueurs ds et ds' de deux arcs de méridien, sous les latitudes l et l', et tels que leur différence en latitude des deux extrémités soient les mêmes, $dl = dl'$; par ex., prenons deux arcs de un degré chaque, $dl = dl' =$ arc de 1°, l'éq. (16) donne

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l'}{1 - \frac{3}{2} e^2 \sin^2 l};$$

d'où
$$e^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{ds - ds'}{ds \sin^2 l - ds' \sin^2 l'}.$$

Ainsi ayant mesuré les longueurs ds et ds' de deux arcs d'un degré de méridien aux latitudes l et l', cette formule fera connaître e^2 et l'aplatissement $\frac{1}{p}$: on obtiendra ensuite le rayon équatorial A par l'éq. (16), où cette constante est seule inconnue. On a

$$A = \frac{ds}{1 - e^2} (1 - e^2 \sin^2 l)^{\frac{3}{2}} = ds\,(1 + e^2 + e^4)(1 - \tfrac{3}{2} e^2 \sin^2 l \ldots).$$

$$A = ds \left\{ 1 + \tfrac{1}{2} e^2 (2 - 3 \sin^2 l) + e^4 (1 - \tfrac{3}{2} \sin^2 l + \tfrac{3}{8} \sin^4 l) \right\}.$$

Tous les élémens du sphéroïde terrestre seront donc connus,

et nous pourrons en introduire les valeurs numériques dans nos éq., afin de vérifier si elles satisfont aux observations, et confirmer ou détruire la supposition que tous les méridiens sont elliptiques et que la Terre est un sphéroïde de révolution.

188. Nous appliquerons cette théorie à un exemple. Le tableau suivant est extrait de la *Mécanique céleste*, et d'un travail de M. Airy, inséré dans l'*Encyclopédie métropolitaine* : les mesures géodésiques qui sont données dans ce tableau sont celles qu'on regarde généralement comme étant les plus dignes de confiance. Nous avons marqué d'un * les nombres de M. Airy.

CONTRÉES.	OBSERVATEURS.	LATITUDE du milieu.	ARC mesuré.	Longueur de l'arc de 1°	
				en mètres.	en toises.
Laponie......	Maupertuis......	66° 20′ 0″	0° 57′ 29″	111892,2	57405
Laponie......	Swanberg......	66.20.10	1.37.19	111488 *	57201,6
Russie......	Struve......	58.17.37	3.35. 5	111362 *	57137
Angleterre......	Roy, Kater......	52.35.45	3.57.13	111241 *	57075
Autriche......	Liesganig......	47.47. 0	2.57.45	111239	57074
France......	Cassini, La Caille	46.52. 2	8.20. 0	111211 *	57059,5
	Delambre et Méchain......	44.51. 2	12.22.13	111108 *	57006,6
		46.12. 0	9.40.28	111131,2	57018,4
	Biot, Arago......	45. 4.18	12.48.44	111115,8	57010,6
Italie......	Boscowich et Lemaire......	42.59. 0	2. 9.47	111025 *	56964,2
		43.10. 0	2.11.26	11105[illegible]	56979
Pensylvanie...	Mason et Dixon......	39.12. 0	1.28.45	110880 *	56889,7
				1108[illegible]6,8	56888
Cap. de B.-Esp.	La Caille......	33.18.30	1.13.17	111163 *	57035
				111167	57037
Inde......	Lambton......	12.32.21	1.34.56	110644 *	56899,5
	Id. Everest......	16. 8.22	15.57.40	110653 *	56773,2
Pérou......	Bouguer et La Condamine.	1.31. 0	3. 7. 3	110582 *	56736,8
		0. 0. 0	3. 6.57	110613,6	56753

Prenons les arcs extrêmes et celui de France comme les mieux situés et les plus dignes de confiance, et faisons usage de la théorie précédemment exposée, savoir :

$$l = 1°31'\ 0'', \quad ds = 110582^{m}, \quad ds' - ds = 526,$$
$$l' = 44.51.\ 2, \quad ds' = 111108, \quad ds'' - ds = 906,$$
$$l'' = 66.20.10, \quad ds'' = 111488.$$

L'éq. $ds = K + H \sin^2 l'$ donne (éq. 13, p. 35)

$$ds' - ds = H(\sin^2 l' - \sin^2 l) = H \sin(l' + l)\sin(l' - l) = 526,$$
$$ds'' - ds = H \sin(l'' + l)\sin(l'' - l) = 906.$$

Vérifions si ces expressions sont de nature à former une proportion

	log 906.	2.9571282
$l' + l = 46°\,22''\,2$	log sin.	$\bar{1}$.8596049
$l' - l = 43.29.\,2$	log sin.	$\bar{1}$.8364816
$l'' + l = 67.51.10$	log sin. . . . . —	$\bar{1}$.9667133
$l'' - l = 64.49.10$	log sin. . . . . —	$\bar{1}$.9566349
	536,9.	2.7298665

Ainsi au lieu du 4[e] terme 526, de la proportion, le calcul nous donne 536,9 : la différence de ces nombres est, comme on voit, assez petite.

Voyez d'ailleurs ce qui sera dit sur les nombres de ce tableau n[os] 190 et 191.

En outre, si l'on introduit ces valeurs de ds et ds', dans l'éq. p. 179, on en tire pour la valeur de e^2, 0,006354 et 0,006463, quantités sensiblement égales, et dont la différ. peut résulter des erreurs d'observation, et de ce que les séries n'ont été approchées qu'au 2[e] ordre. On trouve (*voy.* ci-après éq. 22) que p est entre 310 et 314; ainsi on obtient pour l'aplatissement à peu près $\frac{1}{312}$. Le degré de méridien sous l'équateur n'est surpassé que de 906 mètres par celui de Laponie; ce qui montre que la Terre est presque sphérique, et explique pourquoi l'aplatissement est si faible.

On reconnaît donc, d'après cette 1[re] approximation, que si la Terre n'est pas rigoureusement un ellipsoïde de révolution, comme on l'a supposé, du moins elle en diffère très peu, et cette vue suffit pour nous porter à pousser les séries plus loin, pour donner plus de précision aux calculs.

189. L'arc de méridien qui traverse la France, de Greenwich jusqu'à Formentera, a été mesuré avec tant de soins, et par des savans si exercés, que cette opération mérite la plus

grande confiance. Voici le tableau des résultats (*Syst. métr.*, T. III, p. 549). L'arc est coupé en six parties par des stations dont les latitudes ont été déterminées avec une extrême précision.

STATIONS.	LATITUDES observées.	ARC de méridien.	Longueurs.	Arc de 1°.	Differ.	LATIT. moyennes.	Diminution
			m	m	m		m
Grenwich..	51°28'40" 0	0°26'31"50	49197,4	111284,5	18,5	51°15'24	14,09
Dunkerque.	51. 2. 8,50	2.11.19,13	243522,0	111266,0	35,8	49.56.29	16,39
Panthéon...	48.50.49,37	2.40. 6,83	296824,8	111230,2	178,3	47.30.46	63,15
Évaux.....	47.10 42,54	2.57.48,24	329088,2	111051,8	33.9	44.41. 8	18,24
Carcassonne	43.12.54,30	2.51. 7,72	205621,4	111018,0	26,5	42.17.21	9,80
Montjouy..	41.21.46,58	2.41.50,47	299383,3	110991,6		40. 0.52	
Formentera.	38.39.56,11						

La dernière colonne contient la diminution de longueur du degré aux diverses latitudes indiquées dans la colonne précédente. Pour que cette diminution suivît une loi régulière, elle devrait être partout de 24 mètres environ ; et l'on trouve que la diminution est trop faible aux deux extrémités, et trop forte au milieu. Les longueurs du degré croissent, il est vrai, avec la latitude ; mais ces variations ne sont pas soumises à la loi de proportionnalité aux carrés des sinus de la latitude.

190. Nous reprendrons encore ici le tableau de la page 180, qui paraît donner la même conséquence. On y voit que le degré de La Caille, mesuré avec de bons instrumens et des soins égaux à ceux que Delambre a pris en France, est 111163 mètres, nombre trop fort pour la latitude de 33°18'30", ce qui semblerait indiquer que l'hémisphère austral n'est pas semblable au boréal.

La Caille a aussi mesuré un degré en France, à la latitude de 47°, et l'a trouvé de 111211 mètres ; mais ce résultat était déduit de la base de Rodez, qui était trop courte. Il en

faut dire autant de l'opération du P. Liesganig en Hongrie, dont l'exactitude est suspecte.

191. L'opération de Lemaire et Boscowich dans les États-Romains, établie sur deux bases, doit aussi être rejetée comme donnant une distance trop forte de 108 mètres, de Rimini à Rome. L'une de ces bases, située sur la voie Appia, près de Rome, est de 11964^m,30, l'autre près de Rimini, au bord de la mer, est de 11766^m,12. Ces bases ont été retrouvées par les ingénieurs géographes français. La dernière a été vérifiée à l'aide de celle du Tésin par une chaîne de triangles qui lie l'une à l'autre. Enfin le travail de Beccaria, en Piémont, établi sur une base de 11791^m,34, près de Turin sur la grande route de Rivoli, vérifiée aussi à l'aide de celle du Tésin par les mêmes ingénieurs, est plus défectueuse encore : car cette base, trop faible de 6 mètres, conduit à une longueur trop courte de 120^m pour le degré en Piémont. MM. Carlini et Plana ont aussi vérifié cette base de Beccaria, et ont trouvé qu'un nouvel étalonnage de la toise de Mairan faisait disparaître cette erreur. *Voy.* l'ouvrage qu'ils ont publié.

On peut voir, dans la *Revue encyclopédique* de décembre 1823, la discussion que j'ai faite de ces travaux et les preuves des erreurs qu'on vient de signaler. Les ingénieurs français ont recommencé ces travaux et en ont reconnu les vices. Ainsi les conséquences que Laplace a déduites des nombres consignés dans le tableau qu'il cite, ne sont pas exactes (voy. *Mécanique céleste*, T. II, p. 138).

M. Coraboeuf prouve (*voy.* la *Revue* citée) que le degré de méridien évalué d'après celui

de Rome à Rimini est de........ 110934 mètres,
de Rome à Venise est de........ 111212,
de Rimini à Venise est de........ 111648.

Pour la latitude de 45°, ces résultats supposent $p = 258$.

Delambre trouve (T. III, p. 92) que $p = 150$ en France ; Legendre a trouvé $p = 148$; selon M. Puissant, $p = 260$; cet

aplatissement est beaucoup plus grand que les résultats obtenus p. 181, savoir $p=312$, par une 1re approximation. Les travaux de Lambton dans l'Inde donnent $p \doteq 120$. Plus tard, nous trouverons $p = 305$ et 310, tous nombres différens.

192. Ces discordances, sur lesquelles on ne peut élever aucun doute, résultent de plusieurs causes: 1°. des attractions locales peuvent faire dévier les niveaux et donner des latitudes défectueuses; 2°. les observations peuvent avoir quelques inexactitudes; 3°. les méridiens peuvent ne pas être elliptiques; 4°. les parallèles n'être pas circulaires; et enfin *la Terre peut être un sphéroïde irrégulier.*

Les oscillations du pendule ont fait reconnaître qu'il y a des localités où l'attraction terrestre est plus puissante que ne le veut la théorie. Les travaux de Maskelyne sur l'influence des montagnes; ceux de Boscowich et Beccaria en Italie, attestent ce fait. Or, 1″ d'erreur sur l'arc du méridien donne environ 31 mètres de différ. sur la longueur du degré.

On ne peut se refuser de reconnaître que, même en dégageant par la pensée, la surface terrestre de ses inégalités, qui ne sont jamais que des accidens minimes et sans importance pour notre objet, la Terre n'est pas rigoureusement *un corps ellipsoïdal de révolution.* Cependant, quoique irrégulier, ce corps peut être considéré comme une sphère, dans les questions qui n'exigent pas une extrême précision, et comme un ellipsoïde de révolution dans toutes les autres. Mais dans ce dernier cas, si l'on veut opérer avec rigueur, il faut choisir l'ellipsoïde dont les dimensions conviennent le mieux à la contrée, c.-à-d., prendre les axes et l'aplatissement que les localités exigent, en recourant au calcul que nous allons indiquer, fondé sur les mesures géodésiques actuelles.

Donc 1°. on peut toujours admettre que la Terre est un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe passant par les pôles.

2°. Il faut donner à cet ellipsoïde les axes et l'aplatissement qui conviennent à la contrée qu'on considère, et les

erreurs de cette supposition seront toujours au-dessous de celles de l'observation.

193. Parmi les inégalités lunaires, il en est une qui dépend du défaut de sphéricité de la Terre; l'aplatissement, cause de la précession et de la nutation, produit aussi un effet dont on peut tenir compte, par le calcul, sur les mouvemens de la Lune.

Burckhardt a développé ces calculs, et en a déduit que $p=304,6$, en ayant égard aux inégalités en longitude, et $p=305,05$ relativement à la latitude.

Ainsi l'aplatissement $\frac{1}{305}$ peut être considéré comme exempt de toute influence des localités. C'est donc cette quantité qu'on devra préférer dans les calculs astronomiques destinés à embrasser le globe entier. Nous verrons d'ailleurs bientôt que ce nombre s'accorde, à fort peu près, avec les résultats des meilleures opérations géodésiques et des mesures du pendule, quand on pousse les séries jusqu'au degré convenable d'approximation.

194. Développons d'abord les formules précédentes jusqu'aux e^4.

L'éq. (16), p. 178, étant développée, au 6e ordre près, est

$$ds = A(1-e^2)(1+\tfrac{3}{2}e^2\sin^2 l+\tfrac{15}{8}e^4\sin^4 l)\,dl,$$

et à cause des relations entre les puissances des sinus et cosinus d'arcs multiples (*Cours de Math.*, T. II, p. 258, 4e *édit.*),

$$\sin^2 l=\tfrac{1}{2}(1-\cos 2l),\quad \sin^4 l=\tfrac{1}{8}(3-4\cos 2l+\cos 4l),$$

d'où $$ds = A(1-e^2)(\alpha-6\cos 2l+\gamma\cos 4l)\,dl;$$

en faisant, pour abréger, $$\alpha=1+\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{45}{64}e^4,$$
$$6=\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{15}{16}e^4,$$
$$\gamma=\tfrac{15}{64}e^4,$$

il vient, en intégrant,

$$s=A(1-e^2)(\alpha l-\tfrac{1}{2}6\sin 2l+\tfrac{1}{4}\gamma\sin 4l)\ldots\quad(18)$$

Comme nous voulons que l'arc s du méridien commence à

l'équateur et se termine à la latitude l, nous n'ajoutons pas de constante, pour que $l=0$ donne $s=0$.

195. Pour un autre arc s', commençant aussi à l'équateur, mais terminé à la latitude l', on a de même

$$s' = A(1-e^2)(\alpha l' - \tfrac{1}{2}\beta \sin 2l' + \tfrac{1}{4}\gamma \sin 4l').$$

La différence de ces formules donne l'arc $s-s'$ de méridien, commençant à la latitude l', et terminé à la latitude l, savoir

$$\frac{s-s'}{A(1-e)^2} = \alpha(l-l') - \frac{1}{2}\beta(\sin 2l - \sin 2l') + \frac{1}{4}\gamma(\sin 4l - \sin 4l');$$

faisons

$$s-s' = S, \quad l-l' = \lambda, \quad l+l' = L,$$

et il viendra, à cause de l'éq. (10), p. 35,

$$S = A(1-e^2)(\alpha\lambda - \beta \sin\lambda \cos L + \tfrac{1}{2}\gamma \sin 2\lambda \cos 2L) \ldots \quad (19)$$

Cette équation est destinée à donner la longueur S d'un arc de méridien terminé aux latitudes l et l'.

Mais pour en faire l'application, il faut avant tout connaître les constantes A et e^2. L'arc S est exprimé par la même unité que A. Le terme $\alpha\lambda$ est le produit d'un nombre constant α par la longueur de l'arc λ qui, dans un cercle dont le rayon est 1, mesure la différence des latitudes $l-l'$ des deux bouts de l'arc. Pour la commodité des calculs, on doit diviser λ par le nombre

$$\mu = \frac{180^\circ}{\pi} \text{ (page 37)}, \quad \text{C.}\log\mu = \bar{2}.24187737,$$

et remplacer λ par $\frac{\lambda}{\mu}$ dans l'éq. (19). Alors λ désigne le nombre de degrés de la différ. des latitudes extrêmes.

196. En faisant dans cette formule $l = l' + 1^\circ$, on trouve pour la *longueur* H *de l'arc d'un degré du méridien*, se terminant à la latitude l;

$$H = A(1-e^2)[\alpha.\text{arc}\,1^\circ - \beta \sin 1^\circ \cos(2l+1) + \tfrac{1}{2}\gamma \sin 2^\circ \cos 2(2l+1)]. (20)$$

Le parallèle sous la latitude l a pour rayon $x' = N\cos l$,

N étant la normale (*voy.* p. 173). La longueur de cette circonférence est $2\pi x' = 2\pi N \times \cos l$: ainsi l'*arc de*

$$1^\circ \textit{ longitude} = d = \frac{\pi}{180^\circ} N . \cos l = \frac{N \cos l}{\mu} \ldots\ldots\ldots$$

C'est d'après ces deux éq. qu'a été construite la table II, en prenant pour A et e^2 les valeurs qui conviennent à l'aplatissement $0,00324 = \frac{1}{308,64}$. Pour avoir log N, ajoutez....... log A=6.8046153 à tous les nombres de la dernière colonne.

197. On peut se servir de l'éq. (19) pour déterminer la constante e^2 et l'aplatissement; car si l'on mesure deux arcs S et S' de méridiens, chacune de ces valeurs connues sera liée à ses latitudes extrêmes par une éq. telle que l'éq. (19). En divisant ces éq. membre à membre, le facteur A $(1 - e^2)$ disparaîtra, et l'on aura cette relation, qui ne contient plus que la seule inconnue e^2, laquelle entre dans les constantes α, β et γ :

$$\frac{S}{S'} = \frac{\alpha\lambda - \beta \sin\lambda \cos L + \frac{1}{2}\gamma \sin 2\lambda \cos 2L}{\alpha\lambda' - \beta \sin\lambda' \cos L' + \frac{1}{2}\gamma \sin 2\lambda' \cos 2L'};$$

ici λ' est la différ. et L' la somme des latitudes extrêmes de l'arc S'.

Il reste à tirer la valeur de e^2 de cette éq. Or, après avoir réduit au même dénominateur, posons

$$m = S\lambda' - S'\lambda,$$
$$n = S \sin\lambda' \cos L' - S' \sin\lambda \cos L,$$
$$q = S \sin 2\lambda' \cos 2L' - S' \sin 2\lambda \cos 2L,$$

on trouve $\qquad \alpha m - \beta n + \frac{1}{2}\gamma q = 0.$

Substituant pour α, β et γ leurs valeurs en e^2, on a donc

$$m - \tfrac{3}{4} e^2 (n - m) + \tfrac{15}{64} e^4 (3m - 4n + \tfrac{1}{2} q) = 0,$$

éq. où m, n, q sont des grandeurs connues, et qui est de la forme $\qquad m - he^2 + ke^4 = 0.$

Pour résoudre cette éq., on pourrait la traiter à la manière du 2me degré, parce que la valeur de e^2 serait de la

forme $g \pm \sqrt{h}$, et que e^2 serait la différ. entre les deux parties g et $\sqrt{h}$ qui sont presque égales; en sorte qu'il faudrait pousser les approximations très loin pour que la différ. $g - \sqrt{h}$ fût exacte. Mais comme e^2 est très petit, si si l'on développe

$$e^2 = \frac{m}{h - ke^2},$$

la série sera très convergente; on y substituera ensuite pour e^2 sa valeur approchée $\frac{m}{k}$, et e^2 sera connu :

$$e^2 = \frac{m}{h} \times \left(1 - \frac{ke^2}{h}\right)^{-1}$$

$$= \frac{m}{h}\left[1 + \frac{ke^2}{h} + \left(\frac{ke^2}{h}\right)^2 + \ldots\right],$$

$$e^2 = \frac{m}{h} + \frac{k}{h}\left(\frac{m}{h}\right)^2 + \left(\frac{k}{h}\right)^2\left(\frac{m}{h}\right)^3 + \ldots \quad (21)$$

Et quant à l'aplatissement, la valeur de e^2 le fait connaître (*voy.* page 172), et l'on trouve

$$1 - \frac{1}{p} = (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4;$$

d'où $\quad \frac{1}{p} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4, \quad p = \frac{2}{e^2\left(1 + \frac{1}{4}e^2\right)} \ldots \quad (22)$

198. Maintenant que e^2 est connu, cherchons A, rayon de l'équateur.

Désignons par Q *le quart du méridien elliptique*, depuis le pôle jusqu'à l'équateur : nous avons $l = 90° = \frac{1}{2}\pi$ dans l'équ. (18)

$$Q = A(1 - e^2)\,\tfrac{1}{2}\alpha\pi = \tfrac{1}{2}\pi A\left(1 - \tfrac{1}{4}e^2 - \tfrac{3}{64}e^4\right), \ldots \quad (23)$$

éq. qui donne l'une des constantes A ou Q, lorsque l'autre est connue : elles sont rapportées à la même unité métrique.

199. Divisant membre à membre l'éq. (23) par (19),

on a

$$Q = \frac{\frac{1}{2}\alpha\pi S}{\alpha\lambda - 6\sin\lambda\cos L + \frac{1}{2}\gamma\sin 2\lambda\cos 2L}, \ldots \qquad (24)$$

éq. qui sert à trouver le quart du méridien, quand e^2 est connu, ainsi qu'un arc S du méridien, terminé aux latitudes l et l'. Mais on la simplifie en choisissant cet arc S tel, que ses limites en latitudes donnent $l + l' = 90° = L$: car alors $\cos L = 0$, et la formule ayant d'ailleurs un 3ᵉ terme très petit au dénominateur, se réduit à fort peu près à

$$Q = \frac{\frac{1}{2}\pi S}{l - l'} = \frac{90° S}{l - l'} \ldots\ldots\ldots \qquad (25)$$

Q et S sont ici rapportés à la même unité; $l - l'$ est dans la 1ʳᵉ fraction la longueur d'un arc pris dans le cercle de rayon 1; mais ensuite cet arc se trouve exprimé par son nombre de degrés à l'aide du facteur μ, comme on l'a dit page 37.

Ce que cette dernière expression offre de remarquable, c'est qu'elle est indépendante de A et de e^2; mais elle n'est qu'approchée, parce qu'on a négligé le terme en γ, qui n'est pas sans valeur. Il n'en résulte pas moins que si l'on détermine Q par l'éq. (25), en ayant soin de choisir l et l', de manière que $l + l'$ diffère peu de 90°, cette valeur de Q sera très peu affectée de l'erreur qu'on a pu commettre sur celle de e^2.

On peut donc regarder Q comme connu, et par suite A par l'éq. (23),

$$A = \frac{2Q}{\pi}\left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{64}e^4\right) \ldots\ldots \qquad (26)$$

200. Appliquons cette théorie à un exemple.

On a mesuré deux arcs de méridien en des contrées très éloignées, savoir : l'arc du Pérou, par Bouguer et La Condamine; et l'arc de France, par Delambre et Méchain. Nous préférons ce dernier à celui de Laponie, parce que l'opération présente plus de précision. On trouve (*Syst. mét.*, T. III, p. 107 et 133),

Dunkerque....	$l = 51°2'\ 9'',20$	Cotchesqui.....	$l = +\ 0°2'31''$
Montjouy.....	$l' = 41.21.46,58$	Tarqui.......	$l' = -\ 3.4.32$
	$\lambda = 9.40.22.62 = 9°67295$		$\lambda' = 3.7.\ 3$
	$L = 92.23.55,78$		$L' = -\ 3.2.\ 1$
	$S = 551583,60$ toises		$S' = 176877$ toises.

Le calcul donne $m = 150,79$, $n = 31199,10$, $\frac{1}{2} q = 58979,44$; puis $h = 23286,18$, $k = -15319,83$, et enfin les équ. 24 et 22 font connaître e^2 et p, savoir :

$$e^2 = 0,006448044, \quad p = 309,67.$$

Delambre trouve par erreur $p = 308,65$.

D'ailleurs, depuis l'époque où ce savant a écrit, on a reconnu que les triangles de Fontainebleau jusqu'à Bourges étaient mal conformés, et par une meilleure disposition on a trouvé que l'arc de méridien devait être augmenté de 34,40 toises ; en sorte que $S = 551617$ toises, ce qui conduit à $p = 306,556$. (V. la *Description géométrique de la France*, t. VI, p. 306, 471, etc.)

Au Dépôt de la Guerre, on a adopté $p = 308,64$ dans les calculs relatifs à la grande carte de France. Ce nombre est à fort peu près celui qu'on tire de l'opération géodésique faite en Laponie, par Swanberg. On voit qu'en définitive ces valeurs de l'aplatissement ne diffèrent qu'à peine de $\frac{1}{305}$ qu'on tire des inégalités lunaires, et que tout s'accorde à faire préférer comme méritant le plus de confiance.

201. Voyons à tirer de nos données précédentes la longueur du quart Q du méridien. Comme l'arc du Panthéon à Montjouy (p. 180) remplit à peu près la condition $l + l' = 90°$, nous appliquerons l'éq. (24) aux valeurs indiquées dans le tableau cité :

$$\lambda = 7°29'2'',79, \quad L = 90°12'35'',95, \quad S = 426638^{toi},8.$$

La substition de ces nombres dans nos formules donne

$Q = 5\,130\,405^{toi}$, nombre indépendant de e^2,

$\alpha = 1,00486536$, $\quad \beta = 0,00487510$, $\quad \gamma = 0,00000975o$,

$e^2 = 0,00644816$, $\quad A = 3\,271\,392^{toi}$, $\quad B = 3\,260\,828^{toi}$,

Différence, $\quad A - B = 10564$ toises.

202. On a défini LE MÈTRE *la dix-millionième partie du quart du méridien* Q. Multiplions la longueur ci-dessus de Q par 864 pour la réduire en lignes, et nous trouvons que le mètre devrait être formé de 443,27 lignes.

Mais la commission des poids et mesures ayant arrêté son travail avant les dernières opérations de Delambre, avait pris $\frac{1}{334}$ pour l'aplatissement terrestre. Cette donnée introduite dans l'équation (24) donne $Q = 5\,130\,740^t,74074$. On a donc dû être conduit à des résultats légèrement inexacts. Toutefois, on a jugé à propos de conserver la détermination prescrite pour le mètre, par la loi du 19 frimaire an 8 (10 décembre 1789) qui fixe le MÈTRE LÉGAL à $443^{ll},296$ *de la toise du Pérou, en fer, à 13° de Réaumur, ou* $16°\frac{1}{4}$ *centigrades du thermomètre à mercure.* Ainsi,

$$
\begin{aligned}
1 \text{ mètre} &= 443^l,296 \quad \text{lignes}, \quad \log = 2.64669\ 38125\ 405681 \\
&= 36,9413333 \quad \text{pouc.}, \quad \log = 1.56751\ 25664\ 929433 \\
&= 3,0784444 \quad \text{pieds}, \quad \log = 0.48833\ 13204\ 453185 \\
&= 0,5130740740 74 \quad \text{toise}, \quad \log = \bar{1}.71018\ 00700\ 616749.
\end{aligned}
$$

Le mètre n'est donc pas, en toute rigueur, la dix-millionième partie du quart du méridien, tel qu'on l'a trouvé par un calcul plus précis. M. Biot a cependant fait voir dans son *Astronomie physique*, T. I, p. 161, qu'en prenant pour base des déterminations l'arc de France prolongé jusqu'à Formentera, on retrouve à peu près l'aplatissement $\frac{1}{334}$, qui ramène au mètre légal.

203. Concluons de cette exposition que les opérations géodésiques et les méthodes de calcul n'ont pas encore permis de trouver avec toute certitude les valeurs de Q et de e^2; que les travaux de nos successeurs pourront quelque peu modifier les nombres qui nous paraissent le mieux établis, et conduire à d'autres résultats. Cependant on ne pouvait différer de donner aux mesures une longueur exactement définie, ce qui a fait adopter le mètre légal de $443^{ll},296$; et comme cette longueur est extrêmement voi-

sine de la véritable, on pouvait, sans inconvénient pour la pratique, l'adopter comme définitive. Quels que soient les progrès futurs des sciences, il ne sera jamais utile de modifier ce nombre ; il suffira d'avoir une idée nette de ce qu'il représente.

204. Prenons donc cette longueur du mètre légal pour unité, et adoptons l'aplatissement $p = 309,65$; puis substituant ces nombres dans nos éq., nous obtiendrons pour la moyenne des grandeurs de Q en France et au Pérou (voy. *Syst. mét.*, T. III, p. 135) :

$$Q = 5\,131\,111 \text{ toises}, \qquad \log = 6.17021\ 1409805,$$
$$= 10\,000\,721,64874 \text{ mètres}, \qquad \log = 7.00003\ 1339743,$$
$$\log\left(\frac{2Q}{\pi}\right) = 6.51409\ 15328 \text{ en toises}, \ldots\ldots = 6.80391\ 14627 \text{ en mètres},$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{309,65} = 0,0032294526, \qquad \log = \bar{3}.50912\ 90,$$
$$e^2 = 0,0064484758, \qquad \log = \bar{3}.80945\ 72,$$
$$\frac{B}{A} = 0,99677054 7 = 1 - \frac{1}{p}, \qquad \log = \bar{1}.99859\ 51970,$$
$$\log \alpha = 0.00210798, \quad \log \zeta = \bar{3}.6380050, \quad \log \tfrac{1}{2}\gamma = \bar{6}.6877957.$$

$$A = 3\,271\,847,7 \text{ toises}, \qquad \log = 6.51479\ 30754,$$
$$= 6\,376\,949,9 \text{ mètres}, \qquad \log = 6.80461\ 30053,$$
$$B = 3\,261\,278,7 \text{ toises}, \qquad \log = 6.51338\ 82723,$$
$$= 6\,356\,355,8 \text{ mètres}, \qquad \log = 6.80320\ 82023.$$

La normale N, le rayon x' de parallèle, le rayon terrestre R, le rayon de courbure ρ, sous la latitude l, sont *en mètres* :

$$N = A + A'\sin^2 l + B'\sin^4 l, \quad \log A' = 4.3130402, \quad \log B' = 1.9975587,$$
$$\log N = \log A + A''\sin^2 l + B''\sin^4 l, \quad \log A'' = \bar{3}.1462115, \quad \log B'' = \bar{6}.6546387,$$
$$x = N\cos l, \qquad \log \rho = \overline{14}.3879644 + 3\log N,$$
$$\rho = 6335827 + C\sin^2 l + D\sin^4 l, \quad \log C = 4.7873219, \quad \log D = 2.6937191,$$
$$R = A - V\sin^2 l - P\sin^4 l, \qquad \log V = 4.3102304, \quad \log P = 2.2194074,$$
$$\log R = \log A - V'\sin^2 l - P'\sin^4 l, \quad \log V' = \bar{3}.1434018, \quad \log P' = \bar{5}.1317600.$$

Un arc s commençant à l'équateur et terminé à la latitude l, exprimé, dans le 1[er] terme, par son nombre l de

degrés sexagésimaux est, éq. (18),

$$s = El - F \sin 2l + G \sin 4l,$$

$\log E = 5.0457888$, $\log F = 4.1887785$ —, $\log G = 1.1885691$.

L'arc d'un degré de méridien terminé à la latitude l, est (éq. 20)

$$H = 111\,119^m,3 - F' \cos(2l + 1°) + G' \cos 2(2l + 1°),$$
$$\log F' = 2.7316638, \quad \log G' = 0.0324179.$$

Degré moyen en France = 57 020 toises = 111 134 mètres.

Le cercle dont le rayon est x' a pour circonférence $2\pi x'$; la longueur du degré de parallèle sous la latitude l est (*voy.* éq. 21)

$$d = \frac{x'}{\mu} = \frac{N \cos l}{\mu},$$

$$\log d = 5.0464904 + \log \cos l + A'' \sin^2 l + B'' \sin^4 l,$$

en prenant ci-dessus les valeurs des log. de A″ et B″.

205. Nous avons dit que l'aplatissement $\frac{1}{305}$, déduit des inégalités lunaires, doit être préféré, lorsque l'on considère le sphéroïde terrestre entier (*). Voyons à calculer nos formules dans cette hypothèse.

(*) M. de Zach donne en toises les éq. suivantes pour l'aplatissement $\frac{1}{310}$, qui peut être substitué sensiblement à celui du dépôt de la guerre,

$$e^2 = 0,00641206. \quad \log \tfrac{1}{2} e^2 = \bar{3}.5079372,$$

longueur d'un degré de méridien, à la latitude l,

$$= 57016^t,8 - 277^t,617 \cos 2l,$$

longueur d'un degré de parallèle, à la même latitude,

$$= (57099^t,47 - 183^t,95 \sin^2 l + 0^t,8837 \sin^4 l) \cos l.$$

Pour ce même aplatissement $\frac{1}{310}$, Laplace donne les longueurs suivantes des demi-axes (*Syst. du Monde*, chap. 14),

$$A = 6\,376\,606 \text{ mètres}, \quad B = 6\,356\,215 \text{ mètres}.$$

Nous conserverons la valeur obtenue ci-devant :

$$Q = 5\,131\,111 \text{ toises} = 10\,000\,721{,}64874 \text{ mètres.}$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{305} = 0{,}0032787, \qquad \log = \bar{3}.51570\ 01606\ 53,$$

$$e^2 = \frac{609}{(305)^2} = 0{,}00654\ 66272\ 5074, \qquad \log = \bar{3}.81601\ 76139\ 39,$$

$$\frac{B}{A} = \frac{304}{305} = 0{,}99672\ 13114\ 75, \qquad \log = \bar{1}.99857\ 37442\ 42,$$

$$\frac{B^2}{A^2} = 1 - e^2 = 0{,}99345\ 33727\ 4926, \qquad \log = \bar{1}.99714\ 74884\ 84,$$

$$\log \alpha = 0{,}00214\ 01784\ 12,$$

$$\log \beta = 3.69461\ 83698, \quad \log \tfrac{1}{2}\gamma = \bar{6}.70091\ 65173,$$

$$A = 3\,271\,928{,}279 \text{ toises}, \qquad \log = 6.51480\ 37752,$$

$$= 6\,377\,107{,}018 \text{ mètres.} \qquad \log = 6.80462\ 37052,$$

$$B = 3\,261\,200{,}319 \text{ toises}, \qquad \log = 6.51337\ 75195,$$

$$= 6\,356\,198{,}470 \text{ mètres}, \qquad \log = 6.80319\ 74494.$$

Pour la latitude l on a, *en mètres*,

$$N = A + A'\sin^2 l + B'\sin^4 l, \quad \log A' = 4.3196113, \quad \log B' = 2.0106904,$$

$$\log N = \log A + A''\sin^2 l + B''\sin^4 l, \quad \log A'' = \bar{3}.1527719, \quad \log B'' = \bar{6}.6677597,$$

$$x' = N \cos l, \qquad \log \rho = \overline{14}.3878999 + 3 \log N,$$

$$\rho = 6335357 + C\sin^2 l + D\sin^4 l, \quad \log C = 4.7938802, \quad \log D = 2.7068078,$$

$$R = A - V\sin^2 l - P\sin^4 l; \quad \log V = 4.3167588, \quad \log P = 2.2325397,$$

$$\log R = \log A - V'\sin^2 l - P'\sin^4 l, \quad \log V' = \bar{3}.1499193, \quad \log P' = \bar{5}.1448809.$$

Le rayon moyen, à la latitude de 45°, est

$$R = 3\,266\,573 \text{ toises}, \qquad \log = 6.5140924,$$

$$= 6\,366\,669 \text{ mètres}, \qquad \log = 6.8039123.$$

M. de Prony (T. I, p. 308 de sa *Méc. Statiq.*) donne les formules pour l'aplatissement $\frac{1}{334}$ adopté par la commission des poids et mesures :

$$\log e^2 = \bar{3}.7766328;$$

elle a pris $Q = 10\,000\,724^m$ dans ses derniers travaux,

$$\log e^2 = \bar{3}.8108714, \quad \log A = 6.8046154, \quad \log B = 6.8032060.$$

Un arc s partant de l'équateur, et terminé à la latitude l, est exprimé ainsi (dans le 1[er] terme, l désigne un nombre de degrés)

$$s = El - F \sin 2l + G \sin 4l,$$

$$\log E = 5.0457887397, \log F = 4.19535957-, \log G = 1.2016577.$$

La longueur de l'arc d'un degré du méridien, de la latitude $l - 1$ à l, est

$$\text{fl} = 111\ 119^{m},106 - F' \cos(2l + 1^\circ) + G' \cos 2(2l + 1^\circ),$$

$$\log F' = 2.7382449-, \quad \log G' = 0.0455069.$$

Un degré de parallèle à la latitude l est $d = \frac{N \cos l}{\mu}$;

$$\log d = 5.0465012 + \log\cos l + A'' \sin^2 l + B'' \sin^4 l,$$

A'' et B'' ont leurs valeurs ci-devant.

206. Quoique nous ayons déterminé nos grandeurs par des séries, il est souvent plus commode de se servir des formules complètes, p. 173, etc. Nous prendrons pour ex. de ces calculs l'aplatissement $\frac{1}{290}$, que les dernières observations du pendule en divers pays paraissent recommander.

Prenons la latitude de Paris, $l = 48^\circ\ 50'\ 14''$.

La 2[e] éq. (5) est

$$R = A\sqrt{\left(\frac{1 - 2e^2\sin^2 l + e^4\sin^2 l}{1 - e^2\sin^2 l}\right)};$$

$$\text{on a } e^2 = 1 - \left(\frac{289}{290}\right) = \frac{290^2 - 289^2}{290^2} = \frac{579}{290^2}.$$

Voici le développement des calculs (éq. 5) :

579.... 2.76267856,
$(290)^2$..— 4.92479600,
e^2..... $\bar{3}.83788256$......... $e^2 =$ 0,00688466,
$\sin^2 l$... $\bar{1}.7534086$

$\bar{3}.5912912$..... $e^2 \sin^2 l =$ 0,003902035,
e^2..... $\bar{3}.8378826$ dénom. = 0,996097965...... $\bar{1}.9983022$,
$\bar{5}.4291738$..... $e^4 \sin^2 l =$ 0,0000268 64,
$2e^2 \sin^2 l =$ —0,007804070,

$\bar{1}.9966093$.... numér. = 0,992222794.
— $\bar{1}.9983022$.... dénom.
$\bar{1}.9983071$
$\sqrt{}$..... $\bar{1}.9991536$
A..... 6.8046018... *Voy.* ci-après.
R..... 6.8037554... R = 6 364 370^m = rayon terrestre.

Voici le *calcul de* A (éq. 26). Pour $p = 290$, on trouve en mètres

$$\log Q = 6.9999697.$$

On omet ici le calcul, en tout semblable à celui de la p. 190, en partant des latitudes de Montjouy et de Dunkerque.

Facteur. 7490 $1 + \frac{1}{4} e^2 =$ 1,001721165
2....... 0.3010300 $\frac{1}{8} e^4 =$ 5925
Q....... 6.9999697 $\frac{1}{64} e^4 =$ — 741
π.......—0.4971499 1,001726349 log = 0.0007490,
A...... 6.8045988.......... A = 6 376 740^m = rayon équatorial.

Calcul de la normale N (éq. 6). *Calcul du rayon de courb.* ρ (éq. 9).

A......... 6.8045988 N^3........... 20.4163431,
$\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 l)}$—$\bar{1}.9991511$, $1 - e^2 = \left(\frac{289}{290}\right)^2$ 4.9217957, numér.
log N...... 6.8054477. dénom.......— 4.9247960,
N = 6 389 217 mètres, A^2..........—13.6091976.
ρ = 6 370 084^m....... ρ............ 6.8041452.

Le tout pour Paris et l'aplatissement $\frac{1}{290}$.

Sur l'usage des arcs de parallèles à l'équateur.

207. Le procédé le plus propre à faire connaître l'aplatissement de la Terre, consiste à comparer, comme l'a fait M. Puissant, un arc de méridien avec un arc de parallèle (Voy. *Conn. des Tems*, 1827 et 1828). Nous reviendrons bientôt sur la détermination des arcs de méridien, sujet que nous avons déjà traité (nº 161); nous exposerons plus tard les moyens de trouver les arcs de parallèle (nº 250) : voyons à faire usage de ces évaluations.

Développons l'éq. (19), p. 186, selon les puissances de e^2; nous trouvons pour l'arc de méridien $S = s - s'$, terminé aux latitudes l et l' (fig. 78),

$$S = A\left[\lambda - \tfrac{1}{4}e^2(\lambda + 3\sin\lambda\cos L) - \tfrac{3}{16}\, I\, e^4\right].$$

En faisant $\quad L = l + l', \quad \lambda = l - l',$

$$I = \tfrac{1}{4}\lambda + \sin\lambda\cos L - \tfrac{5}{8}\sin 2\lambda\cos 2L.$$

Ici λ exprime la longueur d'un arc pris dans le cercle dont le rayon est 1, arc qui est la différ. des latitudes des deux bouts de S. On calcule λ d'après ce qui a été dit p. 37, c'est-à-dire qu'on doit changer dans cette formule λ en $\dfrac{\pi\lambda}{180^\circ} = \dfrac{\lambda}{\mu}$, et désignant par λ le nombre de degrés de cet arc.

208. D'un autre côté, x' étant le rayon d'un parallèle à l'équateur, la circonf. est $2\pi x'$, et $D = \dfrac{\pi x' d}{180^\circ} = \dfrac{x' d}{\mu}$ est la longueur de l'arc de d degrés. Ainsi, pour le parallèle sous la latitude φ, on a (éq. 4, nº 176)

$$D = \frac{Ad}{\mu}\cdot\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1 - e^2\sin^2\varphi)}},$$

$$D = \frac{Ad\cos\varphi}{\mu}\left(1 + \frac{1}{2}e^2\sin^2\varphi + \frac{3}{8}e^4\sin^4\varphi\right).$$

Ces éq. font connaître les longueurs de deux arcs, l'un

S de méridien, l'autre D de parallèle, pourvu qu'on ait le rayon A de l'équateur, et e^2, ou l'aplatissement $\frac{1}{p}$.

Mais en divisant ces formules membre à membre, A disparaît, et il ne reste plus que l'inconnue e^2.

$$\frac{Sd \cos \varphi}{D\mu} = M = \frac{\lambda - \frac{1}{4} e^2 \cdot (\lambda + 3 \sin \lambda \cos L) - \frac{9}{16} I e^4}{1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 \varphi}:$$

nous représenterons par M le 1er membre qui est une quantité connue par des observations.

On voit donc que si l'on a mesuré deux arcs, l'un de méridien, l'autre de parallèle, on pourra tirer de cette éq. le nombre e^2, et par suite l'aplatissement (éq. 22), puis le rayon A de l'équateur, le quart Q du méridien, etc., comme il a été expliqué précédemment.

Après la réduction au même dénominateur, etc., on a

$$e^2 (\tfrac{1}{4}\lambda + \tfrac{3}{4} \sin \lambda \cos L + \tfrac{1}{2} M \sin^2 \varphi) + \tfrac{3}{16} e^4 (2 M \sin^4 \varphi + I) = \lambda - M.$$

209. Appliquons cette théorie à l'arc du méridien de France, de Greenwich à Formentera, et au parallèle de Milan. Nous emprunterons nos données au *supplément à la Géodésie* de M. Puissant, p. 71 et 91; ou pour l'arc de parallèle qui s'étend du méridien de Paris au dôme de Milan $D = 533641^m,75$, arc de 6,856469 degrés. De plus

Greenwich...	$l = 51°28'40''00$	Milan...	$\varphi = 45°43'12''$,
Formentera...	$l' = 38.39.56,11$		
	$\lambda = 12.48.43,89$		$S = 1\,423\,637^m$,
	$L = 90.\ 8.36,11$,		

on trouve l'arc $\lambda = 0,2236150$, la circonférence ayant 1 pour rayon; $M = 0,2228874$, $m = 0,0007276$, $h = 0,11260974$, $k = -0,08301639$, ce qui conduit à $m - he^2 + ke^4 = 0$, équ. d'où l'on tire la valeur de e^2 par la formule (21, p. 188). On trouve $e^2 = 0,00643060620$, et par l'éq. (22), $p = 310,51$. On trouverait $p = 252,38$ en ne prenant que l'arc de méridien qui traverse la France de Dunkerque à Montjouy.

210. Dans la *Conn. des Tems* de 1829, et un bel ouvrage intitulé : *Mesure d'un arc de parallèle moyen*, M. le colonel Brousseaud expose tous les détails de l'opération qu'il a dirigée pour mesurer le parallèle qui s'étend de Marennes à Milan, Padoue et Fiume. Il en conclut l'arc moyen d'un degré qu'il prend pour valeur de D, en faisant $d = 1°$, et celles de l'aplatissement qu'on obtient par des combinaisons variées de cet arc avec celui du méridien. Voici les résultats qu'il présente.

STATIONS.	LATITUDES.	ARC de méridien.	LONGUEUR de cet arc.	DEGRÉ de parallèle.	$p =$
Greenwich... / Formentera..	51°28'40",00 / 38.39.56,11	12°48'43",89	1 423 835, 2 m	77873m,82	274.39
Dunkerque.. / Montjony..	51. 2. 8,50 / 41.21.46,58	9.40.21,90	1 075 121, 5		269,84
Gotchesqni . / Tarqui......	0. 2 31 / -3. 4.32	3. 7. 3,00	344 739,80		291,19
Runnæ...... / Darungedda.	8. 9.38,39 / 18. 3.23,64	9.53.45,25	1 094 769,53		286,84
		Moyenne.			280,55

CHAPITRE II. LONGITUDES ET LATITUDES DES STATIONS.

Différences de longitude par des signaux de feu.

211. Le moyen le plus exact d'obtenir la différence de longitude de deux stations X et Y consiste à faire des signaux de feu en un lieu quelconque intermédiaire, pourvu que ce feu soit visible de l'une et de l'autre. Mais, dans ce cas, les stations doivent être peu distantes. On fait brûler quelques onces de poudre à canon, vers une heure convenue ; deux observateurs, placés aux lieux dont on veut avoir la différ. de longitude, sont munis de chronomètres, et attentifs à noter l'instant précis où le feu apparaît. On

a soin de régler d'avance la marche de chaque chronomètre, par des observations astronomiques, de manière à connaître exactement l'heure sous chaque méridien. L'instant physique où le feu éclate est le même pour les deux observateurs; mais les heures en chaque lieu sont différentes; celle de la station orientale est la plus avancée; la différence des heures sidérales est celle des méridiens, ou la longitude relative en temps.

On réitère plusieurs fois l'expérience, afin d'atténuer les petites erreurs d'observation. Chaque épreuve donne une valeur de la longitude relative; ces résultats ont de légères différences; on prend le résultat moyen pour valeur exacte.

212. Au lieu de brûler de la poudre, on peut faire éclater une fusée dans les hautes régions de l'air, et l'explosion est visible à 25 ou 30 lieues de distance: on peut encore allumer un grand feu, ou un réverbère à réflecteurs paraboliques; les lentilles des phares de Fresnel sont d'un usage très avantageux. On cache la lumière avec un écran, et on la découvre subitement à des intervalles convenus d'avance. Les observateurs notent les instans où la lumière devient tout-à-coup, soit visible, soit cachée. Un feu de trois pieds de largeur ne paraît, à la vue simple, que comme une étoile tertiaire, quand on ne le voit qu'à 12 lieues de distance.

Selon de Zach, 4 à 6 onces de poudre brûlées en plein air donnent un feu qu'on peut voir le jour de plus de 7 lieues, et pendant la nuit, à 50 et même 60 lieues de distance, même quand les stations sont hors de toute portée des instrumens d'optique. S'il y a une montagne intermédiaire, le feu, par un temps serein, est encore visible comme un éclair répercuté par le ciel. On doit dire cependant que les ingénieurs n'ont pas reconnu la vérité de ces assertions, et que ces distances leur ont paru trop considérables.

La précision du procédé dépend principalement du soin qu'on met à déterminer l'heure des stations extrêmes, c'est-

à-dire l'état et la marche des chronomètres : les erreurs d'observation peuvent être regardées comme nulles, quand on a répété les feux 8 ou 10 fois.

213. Mais lorsque les deux stations extrêmes sont fort éloignées, un feu ne peut être aperçu de l'une et de l'autre, et le procédé exige une modification. On multiplie les stations et les feux intermédiaires, de manière à obtenir, par le même moyen, les longitudes relatives de toutes ces stations. Mais pour éviter que les erreurs des chronomètres ne s'ajoutent et ne conduisent à des résultats défectueux, voici comment on opère.

Soient Y et X (fig. 86) les deux points extrêmes dont on cherche la differ. des longitudes. On fait éclater les feux en divers lieux f, f', f''... Des observateurs, munis de chronomètres, stationnent en des points intermédiaires A, B, C..., et notent, comme ci-devant, l'instant où chaque feu éclate. Il n'est pas nécessaire que les chronomètres des stations intermédiaires donnent l'heure de leurs méridiens respectifs : il suffit que leur marche ne varie pas sensiblement pendant la courte durée des expériences, qui ne dépasse guère une heure pour toutes les répétitions. Les chronomètres des stations extrêmes Y et X devront seuls donner les heures des méridiens respectifs. Bien entendu encore que les lieux f, A, f', B,... ne sont pas assujettis à être en ligne déterminée. Supposons que les feux se succèdent en allant de l'est Y à l'ouest X.

Un feu allumé en f sera vu en Y et en A, et l'on y notera les heures de l'apparition. De même pour le feu f' vu en A et en B ; pour le feu f'' vu en B et en C, etc. Or, si l'observateur A a vu éclater le feu f une minute avant le feu f', en ajoutant 1' à l'heure où le feu f a été vu en Y, on aura celle où le feu f' aurait été vu en Y, si la distance eût permis de l'apercevoir : en sorte que les choses se passent comme si, le feu f n'ayant pas eu lieu, l'observateur en Y avait vu briller le feu f', puisqu'il en connaît ainsi l'heure exacte. De

même, si B voit éclater le feu f' deux minutes avant f'', en ajoutant en outre ces 2′ à l'heure précédente, on a celle que le chronomètre en Y indique quand le feu f'' a brillé, précisément comme si on l'eût aperçu de la station Y.

On voit donc que, de proche en proche, l'heure de Y où le dernier feu f''' a éclaté se compose de l'heure où le 1er feu f a été vu en Y, plus de toutes les différ. de durée observées en A, B, ... entre le moment où a brillé le feu du côté de X (à l'ouest), moins celui qui est du côté Y (à l'est). Bien entendu que cette différ. doit être prise en —, quand le feu de l'ouest éclate au contraire avant celui de l'est.

Ainsi tout est ramené au cas où le dernier feu f''' est aperçu à la fois en Y et en X, et l'on en tire la différ. de longitude entre ces deux stations extrêmes par une soustraction, comme ci-devant.

214. Soient a, b, c, d.. les durées écoulées entre deux feux successifs aperçus respectivement de chaque station intermédiaire A, B, C, D..., c'est-à-dire qu'en A on a vu éclater le feu f, a secondes avant le feu f'; qu'en B, on a vu éclater le feu f', b secondes avant f'', etc. Soit y l'heure exacte où, de la station Y, on a vu briller le feu f, et x celle où le feu f''' a été aperçu en X, y et x étant les heures de ces méridiens respectifs, et la station X étant à l'ouest, lieu où l'on compte une heure contemporaine moins avancée qu'en Y : la différ. L des longitudes de Y et X, est

$$L = y + a + b + c + d \dots - x,$$

en ayant soin de prendre négatives celles des durées, $a, b, \dots$ qui se rapporteront au cas où le feu de l'est aura brûlé après celui de l'ouest. Il faut remarquer en outre que ces heures et ces durées devront toutes être exprimées en temps sidéral : en sorte que si, comme c'est l'ordinaire, les chronomètres étaient réglés sur le temps moyen, il faudrait changer la durée $a+b+c\dots$ en sidérale, en ajoutant 0″,1643 par minute, 0″,00274 par seconde (*voy.* n° 393). Et même, si les pendules des stations extrêmes Y et X marquent aussi le temps

moyen, cette correction devra être faite sur tout le 2e membre de l'éq. ci-dessus. On a d'ailleurs attention, avant de faire ce calcul, de dégager les indications des pendules extrêmes des erreurs de leur marche, afin que y et x soient bien exactement les heures de ces méridiens respectifs, à l'instant de l'explosion des feux voisins. De même si les chronomètres intermédiaires marquent plus ou moins de 86400″ en 24 heures, les durées a, b, c... devront aussi subir quelques corrections, comme on le verra n° 419. Mais les heures absolues marquées par les chronomètres intermédiaires n'ont aucun rapport nécessaire avec leurs méridiens A, B,... puisqu'ils ne sont destinés qu'à donner les durées sidérales écoulées entre les observations des feux.

215. C'est ainsi qu'on a exécuté l'opération qui a servi à mesurer l'amplitude de plusieurs arcs de parallèle. De Brest à Strasbourg, on a établi deux stations entre Brest et Paris, et deux entre Paris et Strasbourg, avec un feu entre chacun de ces intervalles. Ces feux ont été allumés sur des sommités, de manière à être visibles des deux stations voisines. On a dû les espacer le plus possible, pour éviter les frais et les causes d'erreur ; on peut apercevoir un feu à 20 ou 30 lieues de distance, et plus. Lorsqu'on manque quelqu'une de ces apparitions, l'opération n'en est pas moins continuée, et il suffit de regarder comme nulle cette épreuve incomplète; on réitère les expériences de 5′ en 5′ pour atténuer les erreurs d'observation, et l'on fait d'avance un tableau indicateur des momens d'explosion, d'après la marche connue des chronomètres, afin de ne pas fatiguer sans utilité l'attention des observateurs. La valeur de L est négative quand le calcul procède de l'ouest X à l'est Y.

Quand une montagne se trouve interposée entre un feu et une station, comme on ne peut compter sur l'apparition de l'éclair, on remplace les feux par des fusées volantes en carton, qu'on élève à 4 ou 6 cents mètres de hauteur, et dont l'explosion, dans les hautes régions de l'air, détermine le signal attendu.

216. Voici un exemple de ces calculs, où nous n'indiquons

qu'une seule série de feux, en trois points intermédiaires, avec deux stations A et B, et les deux extrémités X et Y, qui sont les villes de Paris et Strasbourg, dont on demandait la différ. des longitudes. En ces derniers points, on a déterminé les heures sidérales de l'apparition des feux voisins, qu'on trouve indiquées dans les colonnes extrêmes, toutes corrections faites; dans les deux autres colonnes, on a marqué les heures moyennes qu'indiquaient les chronomètres aux instans d'explosion.

PARIS Y.	STATION A.	STATION B.	STRASBOURG X.
$y \ldots 19^h 5' 44'',1$	$f \ldots 8^h 49' 48'',2$		
	$f' \ldots 8.54.10,8$	$f' \ldots 9^h 16' 0'',2$	
	$a = +4.22,6$	$f'' \ldots 9.30.37,8$	$x \ldots 19^h 46' 23'',7$
		$b = +14.37,6$	

Voici le calcul de cette expérience.......... $a = +\ 4'22'',6$
$b = +\ 14.37,6$

Temps moyen.......... $+\ 19.\ 0,2$
Réduction en temps sidéral (n° 393) $+\ 3,1$
$y = 19.\ 5.44,1$
$x = -\ 19.46.23,7$
$L = -\ 21.36,3.$

On opère de même pour chaque série de feux; et même l'on voit qu'en combinant les diverses séries entre elles, on peut en tirer des moyens de vérification. La moyenne de tous ces résultats est la valeur de la longitude rélative en temps. C'est ainsi qu'on a trouvé $-\ 21'35'',48$ pour la longitude de Strasbourg, par rapport au méridien de l'Observatoire de Paris. Au reste, il convient de ne pas combiner entre elles des observations distantes de 30' et plus, pour que le résultat ne se trouve pas influencé par les erreurs de marche des chronomètres.

(Voy. un *Mémoire* de M. Bonne, T. III du *Mémorial du dépôt de la guerre.*)

Des azimuts, longitudes et latitudes.

217. Nous savons calculer tous les côtés des triangles du réseau géodésique (fig. 73). Connaissant, par l'observation directe, la longitude, la latitude d'un des sommets A, ainsi que la direction d'un côté AC, c'est-à-dire l'angle CAI qu'elle fait avec la méridienne AV du point A, on peut trouver, par le calcul, les mêmes choses pour la station C. Et comme, de proche en proche, on peut opérer de même pour chaque sommet de triangle, on trouve en définitive les longitudes et latitudes de toutes les stations, ainsi que les azimuts des côtés des triangles. Exposons cette théorie, mais supposons d'abord que la Terre soit sphérique; nous corrigerons ensuite l'erreur qu'entraîne cette hypothèse.

Soit P (fig. 79) le pôle terrestre; PM, PM' les méridiens des deux stations M et M'; l'arc MM' $= a$ est connu en mètres, et par suite en secondes d'arc (nos 146 et 181). La latitude du point M est l; celle de M' est l'. La 1re est donnée, la 2e inconnue, ainsi que l'angle MPM' $=$ P des deux méridiens, différ. des longitudes des stations M et M';

$$PM = 90^\circ - l, \quad PM' = 90^\circ - l'.$$

Dans le triangle sphérique PMM', on connaît donc les côtés PM et MM', ainsi que l'angle compris M, supplément de l'azimut donné M'M$m = z$, compté du sud vers l'est ou l'ouest : on suppose cet angle z connu par l'observation astronomique ou par des calculs de l'espèce de ceux dont nous nous occupons actuellement. Il s'agit de résoudre le triangle PMM', et d'en tirer PM' $= 90^\circ - l'$, l'angle P, et l'angle M', supplément de l'azimut MM'$m' = z'$ compté vers l'ouest ou l'est, le côté MM' étant vu en M', sur l'horizon de cette station.

Comme les arcs a et P sont toujours fort petits, on veut

résoudre un triangle sphérique dont un côté et l'angle opposé sont très petits, c.-à-d. n'ont qu'un petit nombre de minutes. Il est plus exact de calculer la petite différ. $d = l - l'$ entre les deux latitudes. L'éq. fondamentale, p. 68, devient ici

$$\sin l' = \sin l \cos a + \cos l \sin a \cos M;$$

d'où
$$\sin l - \sin l' = \sin l(1 - \cos a) + \cos l \sin a \cos z$$
$$= 2 \sin l \sin^2 \tfrac{1}{2} a + \cos l \sin a \cos z.$$

Le 1er membre $= 2 \sin \frac{1}{2}(l - l') \cos \frac{1}{2}(l + l') = 2 \sin \frac{1}{2} d . \cos(l - \frac{1}{2} d)$
$$= 2 \sin \tfrac{1}{2} d (\cos l \cos \tfrac{1}{2} d + \sin l \sin \tfrac{1}{2} d).$$

Divisant toute l'éq. par $2 \cos l \cos^2 \frac{1}{2} d$, il vient

$$\tang \frac{1}{2} d\left(1 + \tang l \tang \frac{1}{2} d\right) = \frac{K}{\cos^2 \frac{1}{2} d} = K\left(1 + \tang^2 \frac{1}{2} d\right),$$

en posant, pour abréger,

$$K = \tfrac{1}{2} \sin a \cos z + \tang l \sin^2 \tfrac{1}{2} a.$$

Donc en ordonnant,

$$\tang \tfrac{1}{2} d + (\tang l - K) \tang^2 \tfrac{1}{2} d = K;$$

mais l'arc a est très petit : on a, au 4e ordre près,

$$\sin a = a - \tfrac{1}{6} a^3, \quad \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{4} a^2;$$

d'où
$$K = \tfrac{1}{2} a \cos z + \tfrac{1}{4} a^2 \tang l - \tfrac{1}{12} a^3 \cos z.$$

Résolvant l'éq. par rapport à $\frac{1}{2} d$, et négligeant le 4e ordre (*),

$$d = a \cos z + \tfrac{1}{2} a^2 \tang l \sin^2 z - \tfrac{1}{6} a^3 \sin^2 z \cos z (1 + 3 \tang^2 l). \quad (A)$$

(*) Résolvons l'équation $\tang x + h \tang^2 x = K$.

En supposant K très petit, ainsi que x, puis développant le radical en série, selon les puissances croissantes de K, enfin ne prenant que le signe —

218. Dans le même triangle, on a (éq. 5, p. 68)

$$\cos l' : \sin z :: \sin MM' (= \sin a) : \sin P;$$

d'où
$$P = a \cdot \frac{\sin z}{\cos l'} \ldots\ldots\ldots \quad (B)$$

219. Appliquant la 4ᵉ analogie de Néper (p. 80) au triangle PMM', il vient, en renversant les fractions,

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(M + M') = \cot \tfrac{1}{2} P \cdot \frac{\cos \frac{1}{2}(l - l')}{\cos \frac{1}{2}(180° - l - l')},$$

$$\cot \frac{1}{2}(M + M') = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} P \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(l + l')}{\cos \frac{1}{2}(l - l')}.$$

Dans notre figure 79, z désigne l'azimut du côté $MM' = a$, vu de M; z' est celui du même côté, vu de M' : ces angles z et z' sont comptés, selon l'usage, du méridien sud, de 0 à 180° en

---

du radical par la raison donnée au bas de la p. 187, il vient

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{2h}\left(-1 + \sqrt{1 + 4Kh}\right)$$
$$= \frac{1}{2h}\left(2Kh - 2K^2h^2 + 4K^3h^3 - 10K^4h^4 \ldots\right)$$
$$\operatorname{tang} x = K - hK^2 + 2h^2K^3 - 5h^3K^4 \ldots,$$

Mais on sait d'ailleurs (nᵒ 32) que

$$x = \operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^3 x \ldots\ldots$$

En substituant ici la valeur de tang x en série, on trouve cette expression, qui est exacte au 5ᵉ ordre près,

$$x = K - hK^2 + (2h^2 - \tfrac{1}{3})K^3 + (1 - 5h^2)hK^4 + \text{etc.}$$

Pour appliquer cette série à l'éq. du texte, il faut poser

$$h = \operatorname{tang} l - K, \quad x = \tfrac{1}{2} d,$$

donc on a
$$d = 2K - 2K^2 \operatorname{tang} l + 2K^3\left(\tfrac{1}{3} + 2 \operatorname{tang}^2 l\right)$$
$$= a \cos z + \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{tang} l - \tfrac{1}{2} a^2 \cos z$$
$$- 2 \operatorname{tang} l \left(\tfrac{1}{4} a^2 \cos^2 z + \tfrac{1}{4} a^3 \cos z \operatorname{tang} l\right)$$
$$+ \tfrac{1}{4} a^3 \cos^3 z \left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 l\right)$$
$$= \text{etc.}$$

allant au nord, l'un du côté de l'ouest, l'autre vers l'est. Ainsi z et z' sont les supplémens des angles M et M' de notre éq., savoir, $M = 180° - z$, $M' = 180° - z'$; d'où

$$\tfrac{1}{2}(M+M') = 180° - \tfrac{1}{2}(z+z') = 90° - \tfrac{1}{2}(z+z'-180°).$$

La cotangente est donc $= \tang \frac{1}{2}(z+z'-180°)$. Or, en M et M', les méridiennes des deux stations sont presque deux droites parallèles que la ligne MM' coupe obliquement; en sorte qu'à fort peu près $z+z'=180°$. L'excès de $z+z'$ sur $180°$, qu'on appelle *la convergence des méridiens*, parce que cet excès mesure le défaut de parallélisme, est donc un très petit arc. Ainsi l'on peut substituer cet arc $\frac{1}{2}(z+z'-180°)$ à sa tangente, ainsi que $\frac{1}{2}$ P. Donc

$$\frac{1}{2}(z+z'-180°) = \frac{1}{2}\,P.\frac{\sin\frac{1}{2}(l+l')}{\cos\frac{1}{2}(l-l')};$$

d'où $$z' = 180° - z + P.\frac{\sin(l-\frac{1}{2}d)}{\cos\frac{1}{2}d} \ldots\ldots \quad (C)$$

220. Les éq. (A), (B), (C) sont d'un fréquent usage en géodésie. La 1re fait connaître la différ. d des latitudes (fig. 79), et par suite la latitude de la station M', $l' = l - d$;

La 2e donne la différ. P des longitudes;

La 3e l'azimut z' du côté MM' vu de M', sur l'horizon de cette dernière station. Mais il y a quelques remarques à faire.

1°. Nous avons supposé que la Terre est sphérique,

2°. d et a désignent, dans l'éq. (A), des longueurs d'arcs de cercle pris dans la supposition que le rayon est 1, ces arcs mesurant les valeurs angulaires $l - l'$ et MM'. Pour que ces arcs a et d soient exprimés en secondes, il faut les changer en $a \sin 1''$ et $d \sin 1''$, savoir :

$$d = a\cos z + \tfrac{1}{2}a^2 \sin 1'' \tang l \sin^2 z$$
$$- \tfrac{1}{6}a^3 \sin^2 1'' \sin^2 z \cos z\,(1 + 3\tang^2 l) \ldots \quad (A')$$

avec $$d = l - l', \quad l' = l - d.$$

221. On peut d'ailleurs chasser d et l' des éq. B et C; car

$$\cos l' = \cos(l-d) = \cos l \cos d\,(1 + \tang l \tang d),$$

substituons dans l'éq. (B), $P\cos l' = a \sin z$; mais faisons $\tan d = d$, $\cos d = 1$, attendu que voulant nous borner aux 2[es] puissances de a qui est déjà facteur, il ne faut admettre dans l'éq. (A) que le 1[er] terme $d = a\cos z$: ainsi........

$$\cos l' = \cos l\,(1 + d \operatorname{tang} l),\ P = \frac{a\sin z}{\cos l}(1 + d\operatorname{tang} l)^{-1},$$

$$P = \frac{a\sin z}{\cos l}(1 - d\operatorname{tang} l) = \frac{a\sin z}{\cos l}(1 - a\cos z \operatorname{tang} l),$$

$$\text{et}\quad P = \frac{a\sin z}{\cos l} - \frac{1}{2}a^2\sin 1''\sin 2z.\frac{\operatorname{tang} l}{\cos l}, \ldots.\quad (B')$$

en exprimant a et P en secondes.

La fraction de l'éq. (C) est $= \sin l - \cos l \operatorname{tang}\frac{1}{2}d$, ou $= \sin l - \frac{1}{2}d\sin 1''\cos l$, par la même raison que ci-dessus, ou $= \sin l - \frac{1}{2}a\cos z\cos l\sin 1''$: multipliant par la valeur (B') de P, on trouve enfin

$$z' = 180° - z + a\sin z\operatorname{tang} l - \tfrac{1}{4}a^2\sin 1''\sin 2z\,(1 + 2\operatorname{tang}^2 l) \ldots \text{(C')}:$$

a et les deux derniers termes sont exprimés en secondes.

222. Jusqu'ici nous avons regardé la terre comme sphérique; restituons la forme ellipsoïdale. Désignons, comme ci-devant, p. 172, par e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe A, par N la normale en M (fig. 85).........
$N = \frac{A}{\sqrt{1 - e^2\sin^2 l}}$; la normale en M' est N'; Z et Z' sont les zéniths des deux stations sur les prolongemens de leurs normales.

Or, concevons une sphère dont le centre serait en N, et qui aurait MN pour rayon. Le plan passant par N, M et M' coupe cette sphère selon un arc de cercle qu'on peut sensiblement regarder comme ayant même longueur que $MM' = \varphi$, quoique sa position soit un peu différente. En effet, l'arc MM' est toujours très petit, et l'on voit par la valeur de CN (n° 177) qui est de l'ordre e^2, que cette hypothèse est tout-à-fait admissible. Quant au nombre de secondes a de l'arc φ,

nous en avons donné la valeur n° 181. Nous ferons bientôt une application de cette formule.

La sphère dont il s'agit ici est $NpMM'$; les plans méridiens NMP, NM'P, conduits par l'axe et les deux stations, coupent sa surface selon des arcs de cercle pM, pM', et forment le triangle sphérique pMM' pour lequel tout ce qui a été dit ci-dessus sera vrai.

Observez cependant que les zéniths Z et Z' des lieux M et M', sont sur les prolongemens des normales différentes NM, N'M', qui sont les verticales de ces stations : ces normales ne concourent pas. On peut bien assimiler MM' à un arc de cercle en ce qui concerne sa longueur, mais non plus quand on a égard à sa forme et à sa direction.

En M, la latitude astronomique, ou la hauteur du pôle est l'angle $MNV = l$; celle de M' est $M'N'V' = L$, qui diffère de M'NV appelé ci-dessus l'; L et l sont les complémens des angles $pN'M'$ et pNM. L'angle $NM'N' = i$ est formé par la normale M'N' avec M'N; quoique très petit, il n'est pas négligeable.

Menant Nb parallèle à M'N', on voit que $l' = L + i$.

Nous avons fait précédemment $d = l - l'$; mais ici d n'est plus la différ. des latitudes des deux stations, puisque celle de M' est L, et non pas l'. Soit $D = l - L$, différ. des latitudes sur le sphéroïde, on a

$$D - d = l' - L = i, \qquad D = d + i.$$

Ainsi pour avoir D, puisque d est connu, il ne s'agit que de trouver la valeur du petit angle i, et de l'ajouter à la valeur trouvée pour d par l'éq. (A), dans le cas où la terre est censée sphérique. On connaîtra ainsi la différ. D des latitudes sur le sphéroïde. Le triangle NM'N' donne

$$\sin i = \frac{NN'}{NM'} \sin N', = \frac{CN - CN'}{NM'} \times \cos L,$$

$$\sin i = e^2 (\sin l - \sin L) \cos L;$$

car on a (n° 177) $CN = Ne^2 \sin l$, $CN' = N'e^2 \sin L$; les nor-

males N, N', ainsi que NM' sont sensiblement égales; on trouve donc, d'après l'éq. (10), p. 35.

$$\sin i = 2e^2 \sin \tfrac{1}{2}(l - L) \cos \tfrac{1}{2}(l + L) \cos L = 2e^2 \sin \tfrac{1}{2} d \cos^2 l,$$

parce que le petit facteur e^2 permet de remplacer $l = L$ par $l - l' = d$, ainsi que L par l, d'où $l + L = 2l$, donc

$$i = e^2 d \cos^2 l, \quad d + i \quad \text{ou} \quad D = d(1 + e^2 \cos^2 l).$$

On voit donc que pour avoir égard à la forme ellipsoïdale de la terre, il suffit de multiplier le 2e membre de l'éq. (A ou A') par $(1 + e^2 \cos^2 l)$, lorsqu'on veut obtenir la diff. de latitude des stations :

$$D = (a \cos z + \tfrac{1}{2} a^2 \sin 1'' \tang l \sin^2 z)(1 + e^2 \cos^2 l) \ldots . \quad (A'')$$

Ce qui revient à calculer la quantité d par l'éq. A' comme si la terre était sphérique, puis à ajouter au résultat le produit de cette valeur d par $e^2 \cos^2 l$, qui est la correction sphéroïdique, savoir $D = d + de^2 \cos^2 l$. D et a sont ici exprimés en secondes, ainsi que la valeur du 2e membre ; et l'on a

$$L = l - D.$$

223. Quant aux éq. B et C, ou B' et C', elles n'exigent aucun changement pour avoir égard à l'excentricité; car d'un côté, l'angle P formé par les plans pM, pM', est le même que celui des arcs d'ellipse PM, PM'; et de l'autre, la correction que devrait subir l'azimut z serait du 3e ordre et négligeable. *Voy.* le *Syst. métr.*, T. II, p. 672.

224. Donnons un ex. de l'application de nos éq. En P (fig. 83) est le Panthéon, dont on connaît la latitude l, et l'azimut z de l'arc PD qui va à Dammartin D (T. II du *Mémorial du Dépôt*, p. 416), ainsi que cette distance....... PD $= \varphi = 33494^m,32$; log $= 4.5249711$;

$$l = 48^\circ\, 50' 48'',59, \quad z = 133^\circ\, 44' 23'',03.$$

Ces données diffèrent de celles du *Système métr.*, parce

que le clocher de Dammartin ayant été abattu, on a dû établir un autre signal.

Prenons l'aplatissement $\frac{1}{309,65}$, p. 192; on a donné les valeurs de e^2 et A. Réduisons le côté a en secondes du cercle dont le rayon est la normale N, par la formule p. 176.

e^2	$\bar{3}.8094572$			
$\sin^2 l$	$\bar{1}.7535358$		φ	4.5249711
	$\bar{3}.5629930$	0,00365589	C sin 1" ..	5.3144251
$1-e^2\sin^2 l$	$\bar{1}.9984095$	0,99634411	√	$\bar{1}.9992047$
			A	−6.8046136

Nombre de secondes de φ... $a = 1081'',402$ 3.0339873

Calcul de la latitude L *de Dammartin* (éq. A", p. 211).

a	3.0339873	a^2	6.06797	e^2	$\bar{3}.80946$
cos z	$\bar{1}.8397191-$	0,5	$\bar{1}.69897$	$\cos^2 l$	$\bar{1}.63655$
	2.8737064−,	tang l	0.05849	745,97	2.87272−
		$\sin^2 z$	$\bar{1}.71766$	−2,083	0.31873−
	−747",665	sin 1"	$\bar{6}.68557$		
	+ 1,693		0.22866		$l = 48°50'48'',59$

$d = \left.\begin{matrix}-745,972 \\ -2,083\end{matrix}\right\}$ .... D = − 748",055 = ... + 12.28,06

Latitude de Dammartin......... L = 49. 3.16,65

Calcul de la diff. P *des longitudes* (éq. B', p. 209).

a	3.0339878	a^2	6.0679746−
sin z	$\bar{1}.8588305$	0,5	$\bar{1}.6989700$
cos l	$-\bar{1}.8182740$	sin 2z	$\bar{1}.9995796-$
	3.0745443	tang l	0.0584930
		sin 1"	$\bar{6}.6855749$
	1187",256	cos l	$-\bar{1}.8182740$
	+4,924	4,924	0.6923181+

1192,180 = P = 19'52",18 *long. de Dammartin.*

Calcul de l'azimut z′ du côté PD, sur l'horizon de D (éq. C′, p. 209).

a	3.0339878	a^2	6.0679756 —		
sin z	$\bar{1}$.8588305	sin $2z$	$\bar{1}$.9995296 —		
tang l	0.0584930	0,25	$\bar{1}$.3979400		
893″,945	2.9513113	sin 1″	6.6855749		
	+ 1,416	....	0.1510701 +		
	893,945	2	0.3010300		180°
		tang² l	0.1169860		0.14′59″,07
	3,708	....	0.5690861 +	z =	− 133.44.23,03
	899,069 = 14′59″,07			z' =	46.30.36,04.

Distance entre les lieux dont on a la longitude et la latitude.

225. On donne le nom de *ligne géodésique* à celle qui est la plus courte distance entre deux points de la surface terrestre : à moins que ces points ne soient sur l'équateur, ou sur un méridien, cette ligne est une courbe à double courbure. En joignant au pôle par des méridiens les deux extrémités d'une ligne géodésique de longueur et de position quelconque connue, points où l'on suppose qu'on a pu stationner et faire des observations astronomiques, on forme *un triangle sphéroïdique*, dans lequel on connaît les deux arcs de méridien, colatitudes des stations, et l'angle au pôle qui est la diff. des longitudes des stations : il s'agit donc de résoudre ce triangle pour en déduire la distance des stations et les azimuts de la ligne géodésique.

Ce problème, considéré dans sa généralité, présente de grandes difficultés. Ce même triangle géodésique donne encore lieu à un grand nombre d'autres questions, selon qu'on varie les données prises dans ses six élémens. Tous ces problèmes se résolvent en se fondant sur une doctrine qui a fait le sujet des travaux d'Euler, Legendre (*voy.* les *Mém. de l'Acad. des Sciences*, en 1806, etc.). Dans ses *Elementi di Trigonometria sferoidica*, Oriani a résolu ces problèmes. M. Puissant dans sa

Géodésie, son *Essai sur la trigonométrie sphéroïdique* et la *Conn. des Tems* de 1832, s'est occupé de ces recherches avec le soin et le talent qu'on reconnaît dans tous ses ouvrages.

Mais ces travaux, utiles comme exercices d'analyse, ne le sont guère pour la Géodésie ; car outre que les formules sont très compliquées, à quoi peut servir de connaître la plus courte distance de Paris à Pétersbourg, puisque mille accidens de localité forcent d'allonger la route d'au moins un quart? Nous ne croyons donc pas devoir nous arrêter sur ce sujet.

Mais lorsqu'on compare ensemble deux stations voisines, telles que les sommets de l'un des triangles du réseau, il peut être très utile d'en connaître la distance exacte φ, d'après leurs latitudes et longitudes ; c'est d'abord un moyen de vérification des calculs; mais en outre il peut arriver qu'on veuille lever la carte d'un pays sans avoir les moyens de mesurer une base, opération toujours très longue et d'une difficile exécution. Les localités s'opposent même souvent à ce qu'on puisse effectuer cette mesure. Alors on peut faire des observations astronomiques du haut de deux sommités pour en connaître les latitudes et longitudes ; et ensuite on obtient, par le calcul, la *distance réduite au niveau des mers*.

226. Sans doute, lorsqu'on doit entreprendre une grande opération géodésique, il ne faut pas l'établir sur une base déterminée par des procédés de ce genre, et se croire fondé à regarder la longueur ainsi obtenue comme ayant une exactitude suffisante pour l'objet qu'on se propose. Aucun ingénieur ne consentirait à employer ce procédé dont le succès serait trop hasardé.

De toutes les opérations géodésiques, la plus certaine est la mesure directe des bases, lorsqu'elle est faite avec les soins et les précautions que nous avons recommandés : et quelque bien divisés que soient les cercles, quelque parfaite que soit l'exécution des instruments, l'attention la plus minutieuse ne garantit pas au même degré l'exactitude qu'on obtient pour

les valeurs angulaires. Trop d'élémens différens se viennent compliquer ensemble pour apporter aux résultats de légères erreurs, qui restent inaperçues; les incertitudes des réfractions, les pointés plus ou moins défectueux, les intempéries des saisons, les fatigues de l'ingénieur, etc., sont des causes de petites altérations des résultats. La mesure directe des bases, surtout quand on l'obtient deux fois par une marche rétrograde, présente bien plus de certitude. Ainsi rien ne peut la remplacer; sans compter qu'en mesurant plusieurs bases on a le moyen de vérifier tous les résultats de l'opération, puisque liées ensemble par la triangulation, le calcul qu'on fait de l'une en partant de l'autre, doit donner à fort peu près le même chiffre que la longueur obtenue directement.

Mais il est des cas exceptionnels où la méthode que nous allons exposer est précieuse, parce que alors aucun autre procédé ne pourrait servir aussi avantageusement. Ainsi, dans l'exemple que nous citerons plus loin (n° 229), comme application de cette méthode, M. Puissant voulait lier la Corse C(fig. 81) au continent AB ; il s'est servi des opérations géodésiques faites par les ingénieurs, qui ont fait connaître les latitudes l et l' des stations A et B, et la différence P de leurs longitudes, valeurs trouvées par des mesures géodésiques continentales, qui offrent bien plus de sécurité que des observations célestes, toujours longues et délicates. Une fois la distance AB connue, la détermination de la position du sommet C n'a plus de difficulté.

Voici encore un cas où notre méthode peut être employée avec avantage, lorsqu'on a trouvé, par des observations directes, les latitudes de deux stations et la différence de leurs longitudes, bien que ces résultats n'aient qu'une certitude approchée. Comment espérer qu'on puisse faire une carte tant soit peu satisfaisante des contrées de l'Afrique intérieure, dont les habitans inhospitaliers permettent à peine qu'on y pénètre, et s'opposeraient assurément à ce qu'on fît des opérations géodésiques. Muni d'un sextant et d'un chronomètre, un voyageur peut sans de grandes difficultés s'assurer

des latitudes et des longitudes de certaines stations, et mesurer les angles de divers triangles. Les chiffres ainsi obtenus serviront ensuite à calculer tous les élémens de ces triangles; et s'ils n'ont qu'une exactitude limitée, encore seront-ils plus précis que ceux qu'on a eus jusqu'ici, puisque les distances ne sont évaluées qu'en journées de chemin.

228. Supposons donc qu'après avoir stationné en deux lieux A et B, et y avoir trouvé les latitudes l et l' et la différence P des longitudes, on veuille calculer la longueur AB, réduite au niveau des mers, de l'arc terrestre qui joint ces stations.

L'éq. (A″), p. 211, donne la differ. D entre les latitudes de M et M′ (fig. 85), dont l'arc de distance est de a secondes; et l'éq. (B), p. 207, donne la diff. P des longitudes; dans ces éq. z est l'azimut M′Mm. Renversons le problème : a et z seront les inconnues, et l'on connaîtra les latit. l de M, et l' de M′, ainsi que l'arc P. Dans ces éq. a, D, et P sont de petits arcs exprimés en secondes. On a donc

$$a \sin z = \mathrm{P} \cos l', \ldots\ldots \quad (1)$$

$$l - l' = \left(a \cos z + \tfrac{1}{2} a^2 \sin^2 z \operatorname{tang} l \sin 1''\right)\left(1 + e^2 \cos^2 l\right).$$

Pour éliminer z entre ces équ. on tire de celle-ci

$$a \cos z = \frac{l - l' - \frac{1}{2}\mathrm{P}^2 \cos^2 l' \operatorname{tang} l \sin 1'' \left(1 + e^2 \cos^2 l\right)}{1 + e^2 \cos^2 l},$$

et l'on divise l'équ. (1) par cette dernière

$$\operatorname{tang} z = \frac{\mathrm{P} \cos l' \left(1 + e^2 \cos^2 l\right)}{l - l' - \frac{1}{2}\mathrm{P}^2 \cos^2 l' \operatorname{tang} l \sin 1'' \left(1 + e^2 \cos^2 l\right)} \ldots \quad (2)$$

Ici $l - l'$ et P sont de petits arcs connus par leurs nombres de secondes; d'ailleurs N étant la normale du lieu M, le nombre φ de mètres du côté MM′, qui est un arc de a secondes, est (n° 181)

$$\varphi = \mathrm{N} a \sin 1''.$$

cette éq. (1) donne

$$\varphi = \frac{\mathrm{NP} \cos l' \sin 1''}{\sin z} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Ainsi l'éq. (2) donne l'arc auxiliaire z, qui introduit dans (3) fait connaître φ.

Il convient, dans la détermination de N, de prendre pour l la latit. moyenne λ entre l et l', $\lambda = \frac{1}{2}(l + l')$: mais pour celle de $1 + e^2 \cos^2 l$, on doit conserver la valeur l.

229. Appliquons cette théorie à l'ex. suivant :

$l = 43°\,48'\,53'',41$,
$l' = 43.16.32,61$, $l - l' = 32'20'',80$, $\mathrm{P} = 37'58'',85$.

On calcule d'abord $1 + e^2 \cos^2 l$, puis N pour la latit. moyenne $\lambda = 43°32'43''$. Nous supposerons $e^2 = 0,0064485$, ou... $p = 309,65$.

e^2.............	$\bar{3}.80946$...........		$\bar{3}.8094572$	
$\cos^2 l$........	$\bar{1}.71657$	$\sin^2 \lambda$ ...	$\bar{1}.6763472$	1
	$\bar{3}.52603$		$\bar{3}.4858044$.........	— 0,0030608
$1 + e^2 \cos^2 l$..	1.003350		$\bar{1}.9986666$.........	0,9969392
log..........	0.0014525	$\surd$... —	$\bar{1}.9993333$	
		A...	6.8046130	
		N...	6.8052797	
P............	3.3577158			
$\cos l'$........	$\bar{1}.8621691$			
somme.......	3.2198849...........		3.2198849	
	0.0014525...........		0.0014525	
0,5..........	$\bar{1}.6989700$ —		3.2213373	numér.
$\sin 1''$........	$\bar{6}.6855749$	—	3.2865418	dénom.
$\tang l$........	$\bar{1}.9820281$	$\tang z$...	$\bar{1}.9347955$	$z = 40°42'53'',65$
	0.8077953 —,	N...	6.8052797	
	$-6''42$		3.2198849...	$\mathrm{P} \cos l'$,
$l - l' =$	32' 20,80		$\bar{6}.6855749$...	$\sin 1''$,
dénom. = ...	32.14,38	—	$\bar{1}.8144446$...	$\sin z$,
log = ...	3.2865418	φ....	4.8962949	$\varphi = 78758^m,03$,

La solution exacte est $\varphi = 78758^m,053$, qui ne diffère de la précédente que de 23 millimètres quoique cette base soit de près de 20 lieues. Voyez la *Description géométrique de la France*, page 81, tome VI du Mémorial du Dépôt de la Guerre (*).

Vérification des opérations et des calculs géodésiques.

230. Lorsqu'on a exécuté une grande opération géodésique, et calculé toutes les parties du réseau de triangles dont on a couvert le sol d'un état, il importe de s'assurer qu'aucune erreur ne frappe les résultats. On peut se servir pour cela de plusieurs bases, de longitudes, de latitudes et d'azimuts de côtés qui doivent se reproduire exactement par le calcul, tels qu'on les obtient par des mesures directes.

Dans le beau travail fait en France pour obtenir la longueur de l'arc de méridien terrestre, et par suite celle du mètre, opération qu'on a ensuite étendue au sol géodésique de la France entière, on a mesuré sept bases, savoir :

1°. Celle de Melun ; 2°. celle de Vernet à Salces, près de Perpignan, par Delambre et Méchain : nous les avons données page 131 ;

3°. Celle d'Ensishem, dans le Bas-Rhin, par Henry ;

4°. Celle de Plouescat, près de Brest, par M. Bonne ;

5°. Celle de M. Delcros, près d'Aix, en Provence ;

6°. Celle de M. Brousseaud, près de Bordeaux ;

7°. Enfin, celle de Gourbera, près de Dax, par M. Corabœuf.

231. Une chaîne de triangles du 1[er] ordre avait été levée par Delambre et Méchain, dans le sens de la méridienne, de

(*) On a lié l'île de Corse à la France, en observant le Monte-Cinto C (fig. 81) de deux stations sur le continent, le Cheiron A et la Sanvette B ; l est la latitude de A, l' celle de B ; P est la différence de leurs longitudes : il s'agit ici de calculer la plus courte distance AB, qui sert de base au grand triangle ABC.



Dunkerque à Barcelone, chaîne qui a depuis été prolongée jusqu'à Formentera, par MM. Biot et Arago. Ensuite deux autres chaînes méridiennes ont été formées : l'une à l'ouest, appelée *méridienne de Saintes*, qui va de Bayeux aux Pyrénées; l'autre à l'est, est la *méridienne de Sédan*, qui s'étend de Mézières aux Bouches-du-Rhône. Il faut encore y joindre la *méridienne de Fontainebleau*, qui a été nécessaire pour certaines vérifications; elle va de cette ville à Bourges.

232. Ces triangles ont été liés ensemble et aux bases par six chaînes dirigées dans le sens des parallèles à l'équateur, savoir: 1°. De Dieppe à Amiens et Mézières; 2°. de Brest à Paris et Strasbourg, 3°. de Noirmoutiers à Bourges et en Suisse; 4°. de la tour de Cordouan jusqu'en Savoie et à la mer Adriatique; 5°. le parallèle de Rhodez, de Bayonne et Aurant à Grasse; 6°. la frontière des Pyrénées joignant l'Océan à la Méditerranée.

Ces triangulations, confiées à des ingénieurs d'un rare mérite, offrent des caractères de précision si remarquables, qu'aucun travail de ce genre ne les a surpassées. Pour donner une idée de la précision des résultats, nous dirons qu'en partant de la base d'Ensishem, on a trouvé pour la distance des signaux de Strasbourg et de Donon . . . . 43931^{m},62
et que cette même longueur conclue de la base de Melun, à l'aide de 28 triangles, a été de. . 43930,91

Différence. 0,71

Cette différence, qui n'est que d'environ 26 pouces et demi, montre que les deux bases de départ s'accordent, autant qu'on peut le désirer, puisque, partagée par moitié, l'erreur n'est que le 6200e du côté.

233. Le tableau suivant, extrait du 6e vol. du *Mémorial du Dépôt de la Guerre*, p. 483, offre des comparaisons semblables entre les sept bases, et accuse une exactitude étonnante.

Oriani a mesuré une base sur les bords du Tésin, laquelle comparée à celle de M. Brousseaud dans les landes bordelaises, ne conduit qu'à 2 décimètres de différence, quoique de l'une

à l'autre, il y ait 150 triangles. La longueur de l'arc qui s'étend de Marennes à Fiume, au bord de la mer Adriatique, est déterminée par 80 triangles de 1er ordre. (*Voy.* le *Mémoire* de M. Brousseaud sur l'arc de parallèle moyen en France, de Bort-Hernant à Bort-Maimac.)

BASES.	MESURE directe.	MESURE CALCULÉE sur la base de		DIFFÉR.	RAPPORT.
	m		mètres	mètres.	
Melun.....	11842,158				
Perpignan..	11706,397	Melun.....	11708, 22	+ 1,82	1: 6432
Ensishem...	19044, 50	Melun.....	19044, 13	— 0,37	1: 70540
Brest......	10526, 91	Melun.....	10526, 91	0	»
		Ensishem...	10527, 08	0,17	1: 61923
Bordeaux...	14119, 08	Melun.....	14119, 65	0,58	1: 24770
			14118, 77	— 0,51	1: 45546
			14117, 82	— 1,26	1: 11206
		Ensishem...	14119, 00	— 0,08	1:176488
			14118, 17	— 0,91	1: 15515
		Brest.....	14119, 06	— 0,02	1:705954
			14118, 32	— 0,76	1: 18578
Gourbera...	12220,031	Perpignan..	12220,769	— 0,74	1: 16558
			12218, 49	— 1,54	1: 72399
		Melun.....	12219, 24	— 0,79	1: 15449
		Bordeaux...	12219,729	— 0,30	1: 40464
Aix.......	8066, 65	Melun.....	8067, 17	0,52	1: 15512
		Perpignan..	8066, 93	0,28	1: 28812
			8067, 15	0,50	1: 16134
		Bordeaux...	8067, 35	0,70	1: 11524
		Gourbera...	8066, 44	— 0,21	1: 38415
			8067, 70	0,05	1: 7683

234. Nous avons montré, n° 217, que lorsqu'on a calculé tous les côtés des triangles sphéroïdaux qui composent un réseau géodésique, on peut calculer aussi les positions relatives des sommets de ces triangles, savoir leurs longitudes, latitudes, et les azimuts des côtés, connaissant la latitude d'un seul sommet et l'azimut d'un seul côté. Or, on peut, par des procédés astronomiques, déterminer directement ces arcs, non-seulement pour une station, mais même pour tous les sommets; et comparant les résultats du calcul à ceux de l'observation, on en déduit des moyens de vérification.

Par ex. (fig. 74), si l'angle CAM = α est connu, ainsi que les angles et les côtés du triangle CAB, et la latitude du lieu A, on pourra calculer la longitude et la latitude de C, et l'azimut du côté AC, vu sur l'horizon de C. On obtiendra de même la longitude et la latitude de B et les azimuts des côtés BC et AB sur l'horizon de B : car l'angle ACB est connu, et l'on vient de trouver l'angle AC*i*. On trouvera ainsi, de proche en proche, les longitudes et latitudes de tous les sommets et les azimuts de tous les côtés. Mesurant ensuite directement ces mêmes arcs çà et là, on obtiendra autant de termes de comparaison.

Mais le résultat du calcul dépend de la valeur qu'on a adoptée pour l'aplatissement, puisque e^2 entre dans l'éq. (A″), ainsi que dans la formule du n°. 181, qui sert à traduire une distance ϕ en secondes. Cet élément e^2 influe surtout sur la différ. P des longitudes; le calcul de cet arc doit être regardé comme moins exact que les observations directes. Quand on aura trouvé P astronomiquement, on pourra chercher, comme on l'a fait n° 200, quelle valeur de e^2 doit être préférée pour mettre d'accord les calculs et les observations.

Pour éclaircir ce sujet, nous donnerons ici le tableau inséré p. 129 de la *Description géométrique de la France* par M. Puissant, et quelques différences en azimuts signalées par le même savant dans un mémoire.

STATIONS.	LATITUDES géodésiques.	LATIT. astronomiq.	DIFFÉRENCE
Greenwich (Observatoire)....	51°28′44″,6	40″,0	− 4″,6
Dunkerque..................	51. 2.11,6	8,5	− 3,1
Paris (Panthéon)...........	48.50.48,6	48,6	0,0
Angers (Saint-Martin).......	47.28.10,67	6,79	− 3,88
Évaux......................	46.10.35,64	42,50	+ 6,86
Genève (ancien Observatoire)	46.11.59,74	59,50	− 0,24
Clermont-Ferrand..........	45.46.45,7	54,6	+ 8,9
Tour de Borda.............	43.42.41,75	42,09	+ 0,34
Carcassonne................	43.12.51,9	54,3	+ 2,4
Montjouy..................	41.21.49,7	46,6	− 3,1
Formentera................	38.40. 1,9	56,1	− 5,8

Si l'on excepte Genève et la tour de Borda, les latitudes astronomiques et celles que l'aplatissement $\frac{1}{308,64}$ a données, sont en discordance; et bien que les différences soient très faibles, elles dépassent de beaucoup les erreurs possibles d'observation. On en a conclu que des attractions locales avaient influencé les bulles des niveaux, car on n'a pu réussir à modifier l'aplatissement de manière à accorder ces latitudes; et surtout les azimuts. Il est, au reste, plus que probable que, même abstraction faite des inégalités montueuses du sol, la terre n'a pas rigoureusement la forme d'un ellipsoïde de révolution.

En partant de l'azimut de Belle-Assise sur l'horizon du Panthéon, mesuré avec un soin particulier, on a trouvé que l'azimut géodésique

d'Angers et Lasalle est de...... 10°33′48″,56 au lieu de 31″,85,
de Bourges et de Dun-Leroy.... 329.10.67 , 3.......... 41 ,30,
de Carcassonne et Nore........ 201.18.91 , 9.......... 53 , 0,
de Bréri et du mont Poupet..... 229.23.14 ,87.......... 37 ,60,
de Monceault et du Colombier. 223: 7.22 ,30.......... 6 ,55,
d'Opmes et du Puy-de-Dôme.... 124.19.17 ,56.......... 1 ,74.

Ainsi les azimuts géodésiques diffèrent des astronomiques de —16″,71, —26″,90, —33″,9, —37″,87, —15″,75, —15″,82. Une multitude d'autres différences de ce genre se manifestent dans tout le réseau géodésique.

Les longitudes observées par des signaux de feu ne s'accordent pas mieux avec celles que donne la Géodésie. Ainsi la longitude géodésique de

l'observatoire de marine à Brest est de 6°49′49″,22 au lieu de 35″,10,
la flèche de Strasbourg.............. 5.24.53 ,72 .... 48 ,87,
ancien observatoire de Genève....... 3.48.56 ,92 .... 40 ,63,
mont Colombier..................... 3.24.77 ,27 .... 53 ,28.

Voilà donc des différences entre le calcul et l'observation directe qui, en longitude, s'élèvent à —14″,12, —4″,85. —16″,29 et —23″,99.

235. Il résulte de ces considérations que malgré l'accord satisfaisant que présentent les sept bases mesurées en France, il est impossible de concilier entre elles les latitudes, les longitudes et les azimuts, lorsqu'on les tire du calcul géodésique et de l'observation directe. M. Puissant regarde comme un fait incontestable qu'en combinant l'arc du parallèle moyen compris entre l'Océan et Padoue, avec celui du méridien de Dunkerque, qui s'étend de Greenwich à Formentera, l'aplatissement de l'ellipsoïde osculateur au point d'intersection de ces deux arcs est plutôt au-dessus qu'au-dessous de $\frac{1}{400}$: ce savant l'estime de $\frac{1}{243}$. Cet aplatissement diffère sensiblement de $\frac{1}{309}$ qu'on obtient par des mesures géodésiques de France et du Pérou, quoique la commission ait décidé que les calculs de la détermination des positions dans la nouvelle carte de France, seraient faits sur cette dernière fraction.

En étudiant avec un soin particulier la marche des différences, M. Puissant est conduit à cette conséquence : « que la surface de la France est formée de deux nappes principales, séparées à peu près par le méridien de Paris ; que ces nappes appartiennent à deux ellipsoïdes irréguliers, ayant des aplatissemens très différens l'un de l'autre ; l'aplatissement est très petit du côté de l'Océan, tandis qu'à l'est il dépasse beaucoup $\frac{1}{309}$; qu'aucun ellipsoïde de révolution ne satisfait exactement à toutes les stations à la fois, et que la sphère paraît tenir le milieu entre les écarts, et avoir la forme qui, pour le sol de la France, convient le mieux aux résultats d'observation. Toutefois il existe en certains lieux de fortes anomalies qui accusent des irrégularités locales, et font dévier la méridienne de l'observatoire de Paris de la direction qu'elle aurait sans cela ; dans notre contrée l'arc de méridien terrestre est une courbe à double courbure très prononcée. Enfin, il est incontestable que, quand la direction du fil-à-plomb, d'où dépendent essentiellement les valeurs absolues des coordonnées géographiques d'un point de la terre, est troublée, soit par l'attraction de quelque montagne voisine, soit parce que la densité du terrain est plus petite ou plus grande que la

densité générale de la croûte terrestre, on ne peut vérifier, non-seulement la loi de la variation des degrés des méridiens et des parallèles dans l'hypothèse elliptique; mais, en outre, la relation qui existe, sans cette cause perturbatrice, entre les azimuts et les longitudes sur un sphéroïde irrégulier peu différent d'une sphère. Ainsi les anomalies nombreuses qui ressortent des comparaisons précédentes, tiennent nécessairement à des variations d'une grande étendue dans la nature du sol de la France et de l'Italie, et les mesures géodésiques, comme celles du pendule à secondes, lorsqu'elles réunissent toutes les conditions requises, sont éminemment propres à les signaler aux géologues. »

Des perpendiculaires à la méridienne.

236. Le plan vertical perpendiculaire au méridien du lieu, étant dirigé de l'est à l'ouest, est ce qu'on appelle le *premier vertical :* ce plan coupe l'horizon suivant une ligne qui est la *perpendiculaire à la méridienne du lieu.* Cette ligne peut être prolongée en se servant de la méthode dont nous avons fait usage page 154 pour tracer sur le sol un arc de méridien. On établit une lunette dans la direction du premier côté de cette perpendiculaire, et l'on marque, du côté opposé, un signal qui soit situé sur cette même perpendiculaire repliée selon la verticale de cette seconde station. On transporte la lunette à ce signal, et l'on répète la même opération : et ainsi de proche en proche.

La perpendiculaire à la méridienne est différente du parallèle à l'équateur, bien que ces deux courbes soient dans des plans l'un et l'autre perpendiculaires au méridien du lieu de départ : mais un parallèle est perpendiculaire à tous les méridiens, tandis que la courbe dont il s'agit ici s'écarte d'autant plus du parallèle qu'elle s'éloigne davantage du méridien. Si la terre était sphérique, cette courbe serait l'intersection même de la surface terrestre par le plan vertical perpendiculaire au méridien, c.-à-d. qu'elle serait un grand cercle de la sphère, lequel

couperait l'équateur en deux points diamétralement opposés, et à 90° de distance en longitude, de part et d'autre du méridien du lieu de départ.

Il y a plus, dans le sphéroïde, *la perpendiculaire à la méridienne est une courbe à double courbure.* En effet (fig. 75) les verticales qui vont toutes au centre de la Terre sphérique, ne concourent plus au même point dans l'ellipsoïde. Si l'on a mené, en un lieu a, la perpendiculaire ab à la méridienne Pa, ab supposé un très petit arc, est dans le plan vertical iab, qui passe par la normale ai. Lorsqu'on se transporte à l'extrémité b de cet arc, comme la verticale ou la normale en b est bk, coupant l'axe de la Terre en k, il faut briser le prolongement de ab, pour le coucher sur le nouvel horizon, dans ce 2e plan vertical cbk : ainsi l'arc bc sort du 1er plan vertical. De même, l'arc cd se trouve dans un 3e vertical dcl; et ainsi des autres. La courbe $abcd$... est donc composée d'arcs élémentaires situés dans des plans verticaux sans cesse variables.

237. La position d'un point M (fig. 84) sur un plan, est déterminée par ses distances x et y à deux axes Ax, Ay, rectangulaires et donnés; ou bien par sa distance AM $= \varphi$ à l'origine A, et par l'azimut PAM $= z$, savoir,

$$x = \varphi \cos z, \quad y = \varphi \sin z \ldots\ldots \quad \text{(F)}$$

Imitons ce système sur la surface terrestre. Soit P (fig. 87) le pôle, PX le méridien d'un lieu A pris pour origine des coordonnées sphériques AQ $= x$, QM $= y$, d'un point M, et AQ' $= x'$, Q'M' $= y'$ d'un autre point M'. Les ordonnées y, y', sont comptées sur des arcs QMp, Q'M'p, perpendiculaires à la méridienne PX.

Si l'on suppose que la Terre soit sphérique, ces arcs QMp, Q'M'p, vont concourir en p à l'équateur, ainsi qu'il vient d'être dit, et p est le pôle du méridien PX, c.-à-d. que le point p est à 90 degrés de tous les points du cercle PX. Les méridiens des stations M et M' sont les arcs PM, PM', *colati-*

tudes de ces points. Les angles MPA, M'PA sont les longitudes de ces stations, relativement au méridien principal PX; nous les désignerons par P et P' : l'angle $MPM' = P - P'$ est la différ. des longitudes.

Or le triangle sphérique rectangle PMQ donne (éq. n et q, page 69)

$$\sin y = \cos l \sin P,\quad \cot\zeta = -\sin l \tang P; \ldots \quad \text{(G)}.$$

l est la latitude de M, ζ l'angle IMQ, ou l'azimut de MQ sur l'horizon de M, compté à partir du sud. Mais l'azimut du côté MM', vu de M, est connu, $IMM' = z$; appelons l'angle $QMM' = \psi$, angle donné par

$$\psi = \zeta - z \ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

La long. P du point M de départ est ici $>$ que celle P' de M'; l'azimut z est du côté occidental de la méridienne : s'il était à l'est, comme fig. 88, on aurait $P < P'$, et on ferait z négatif, car l'on aurait visiblement $\psi = \zeta + z$.

238. Appliquons au triangle sphérique MpM' tout ce qui a été dit page 205, et les formules démontrées conviendront ici; seulement p n'étant plus le pôle terrestre, comme l'était P (fig. 79), il faudra prendre $pM = 90° - y$, $pM' = 90° - y'$, c.-à-d. remplacer, dans les éq. A' et B', p. 208,

$$l \text{ et } l' \text{ par } y \text{ et } y',\quad d \text{ par } y - y',$$
$$z \text{ par } \psi, \text{ et P par l'angle } p = \text{arc } QQ' = x' - x.$$

Et même, comme dans les équ. A' et B', d, a et P sont des valeurs angulaires exprimées en secondes d'arcs décrits du rayon 1, et que nous prendrons la normale N pour rayon, il faudra substituer $\frac{\varphi}{N}$, $\frac{d}{N}$ et $\frac{P}{N}$, au lieu de $a \sin 1''$, $d \sin 1''$ et $P \sin 1''$, comme page 176, pour que φ, d et P représentent des longueurs métriques. Il faudra donc en définitive remplacer $a \sin 1''$, etc., par $\frac{\varphi}{N}$, $\frac{y - y'}{N}$ et $\frac{x' - x}{N}$; et φ, y, y', x et x' seront rapportés à la même unité que la normale N, qui d'ailleurs est connue (nº 177).

Ainsi l'on obtient les équ. suivantes pour la fig. 87,

$$\left.\begin{array}{l} y' = y - \varphi \cos \psi - \dfrac{\varphi^2}{2N} \operatorname{tang} y . \sin^2 \psi \\ x' = x + \dfrac{\varphi \sin \psi}{\cos y} - \dfrac{\varphi^2}{2N} \sin 2\psi . \dfrac{\operatorname{tang} y}{\cos y} \end{array}\right\} \ldots \text{(H)}$$

239. Ces éq. donnent, pour chaque station M', les deux coordonnées x' et y', l'une dans le sens de la méridienne principale PX, l'autre selon sa perpendiculaire pQ'. On déterminera d'abord les arcs y, ζ et ψ par les éq. G et I, sans qu'il soit nécessaire d'y apporter une grande précision; et même, comme on procède successivement d'un sommet de triangle au suivant, x et y sont connus lorsqu'on cherche x' et y'. Au sommet A pris pour origine, x et y sont nuls, et nos éq. se réduisent aux formules (F), au 3ᵉ ordre près. Alors (fig. 89) M est situé sur la méridienne principale, $\zeta = 90°$ et $\psi = 90° - z$.

La valeur $QQ' = x' - x$, pour tous les arcs MM' (fig. 87), est leur projection sur la méridienne principale, selon des arcs pQ, pQ', perpendiculaires à cette méridienne.

240. Il arrive souvent que la longitude P et l'arc y sont fort petits; alors les équ. (G) se mettent sous une forme plus simple pour le calcul. On y remplace les sinus et tang. par l'arc, savoir $y = \text{P} \cos l$, et $90° - \zeta = -\text{P} \sin l$; et comme on veut exprimer l'arc P en secondes, et la ligne y en mètres, on change P en P sin 1", et y en $\dfrac{y}{\text{N}}$, N étant la normale; ainsi l'on a

$$y = \text{NP} \sin 1'' \cos l, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(K)}$$
$$\zeta = 90° + \text{P} \sin 1'' \sin l. \ldots\ldots\ldots \text{(L)}$$

Nous ferons plus tard des applications de ces formules.

241. Si l'on suppose l'arc MM' (fig. 79) *perpendiculaire à la méridienne* PM du point M, on a $z = 90°$ dans les éq. A', B' et C', pages 211 et 209; et pour que a soit exprimé par le nombre φ d'unités métriques de l'arc terrestre, au lieu de

l'être par sa longueur le rayon étant 1, ou par son nombre de secondes, on changera, comme n° 181, l'arc a en $\frac{\varphi}{N \sin 1''}$. Ainsi, à cause de $D = l - L$, on trouve, 1° pour la latitude L de l'extrémité M' de l'arc MM', perpendiculaire en M; 2° pour la différence P des longitudes de M et M'; 3° enfin pour l'azimut z' du lieu M vu de M', ou l'angle $m'M'M$ compté du sud, les trois relations suivantes :

$$L = l - \frac{\varphi^2}{2N^2} \cdot \frac{\tang l}{\sin 1''} (1 + e^2 \cos^2 l),$$

$$P = \frac{\varphi}{N \cos l \sin 1''} - \frac{\varphi^3}{3N^3} \cdot \frac{\tang^2 l}{\cos l \sin 1''},$$

$$z' = 90° + \frac{\varphi \tang l}{N \sin 1''} - \frac{\varphi^3 \tang l}{6N^3 \sin 1''} (1 + 2 \tang^2 l).$$

Ces équ. sont exactes au 4e ordre près : l'azimut z' est compté du sud vers l'est ou l'ouest; P est exprimé en secondes, ainsi que tous les termes qui ont sin 1″ au dénominateur; φ et N sont des longueurs rapportées à la même unité métrique (n° 181).

242. Multipliez la 2e de ces éq. par $\sin l$, et retranchez la 3e, la 1re puissance de φ disparaîtra, et vous aurez

$$P \sin l = z' - 90° + \frac{\varphi^3 \tang l}{6N^3 \sin 1''}.$$

Cette éq., où le 1er membre et l'avant-dernier terme sont exprimés en secondes, fait connaître la longitude P de M' par rapport au méridien de M, lorsqu'on a l'azimut z' du sommet M, vu de M', compté du sud.

Pour un autre point du même arc perpendiculaire, mais situé de l'autre côté du méridien de M, on aurait une éq. semblable en P', z'' et φ' : ajoutant ces deux éq. et désignant par λ la différ. des longitudes de ces deux stations opposées, ou $\lambda = P + P'$, on a

$$\lambda = \frac{z' + z'' - 180°}{\sin l} + \frac{(\varphi^3 + \varphi'^3) \tang l}{6N^3 \sin l \sin 1''}.$$

Telle est la différ. λ des longitudes des deux bouts M' et M'' d'un arc perpendiculaire à la méridienne, laquelle le traverse en l'un de ses points. M. Puissant a prouvé (*Conn. des Tems*, 1828) que si cet arc a 400 mille mètres de longueur (100 lieues), sous la latitude de 45°, on a $\lambda = 5° 4' 3'',78$, valeur exacte à une demi-seconde près. Pourvu donc que l'arc n'excède pas cette étendue, c'est-à-dire que son amplitude ne dépasse pas 10° de longitude, l'éq. est exacte. Les azimuts z' et z'' mesurés aux extrémités de cette perpendiculaire, et les longueurs φ et φ' de ses deux parties, font connaître la différ. en longitude de ces deux bouts de l'arc.

Mesure des arcs de méridien, de parallèles, etc.

243. Les arcs terrestres sont mesurés en dirigeant un réseau de triangles dans le sens de ces arcs, calculant les longueurs et azimuts de ces côtés, les longitudes et latitudes des stations, enfin projetant ces lignes sur l'arc qu'on veut mesurer, à l'aide de parallèles à l'équateur, ou d'arcs de grand cercle perpendiculaires à la ligne géodésique : le tout par le secours des formules précédemment démontrées. La somme des projections convenablement choisies donne la longueur totale de l'arc.

Ainsi pour trouver la longueur de l'arc de méridien qui traverse une chaîne de triangles dont tous les élémens et la disposition mutuelle sont connus, on rapportera chaque sommet au méridien principal d'une station prise pour origine, et l'on évaluera les deux coordonnées x et y de chaque sommet, dans le sens de la méridienne et de sa perpend. Ce procédé est bien plus commode et plus analytique que celui de la page 155, qui a l'inconvénient d'exiger le secours d'une figure. D'ailleurs, on est obligé de trouver la latitude de l'extrémité de l'arc, qui diffère sensiblement de celle du dernier sommet, ce qui exige une correction qu'on peut trouver, il est vrai, par nos formules précédentes : mais la méthode des projections a l'avantage de faire connaître directement les latitudes

de tous les pieds des arcs perpendiculaires, ainsi qu'on va l'expliquer.

On projette donc tous les côtés orientaux, sur la méridienne principale ; on en fait autant pour les côtés occidentaux ; les deux sommes doivent s'accorder à donner la même longueur pour l'arc total ; ce qui fournit un moyen de vérification des calculs ; et s'il existe entre les deux résultats une petite différ., on prend une moyenne entre eux pour la valeur cherchée.

Et d'abord il faut préparer nos éq. pour en faciliter l'application au cas que nous traitons.

244. L'éq. A, p. 206, donne la différ. d entre les latitudes des deux stations M et M' (fig. 79), dont l'arc de distance est a, et z l'azimut de cet arc vu de M. Or, d et a sont de petits arcs qu'il convient d'exprimer plus commodément. La distance itinéraire MM', en unités métriques, étant φ, on changera a en $\frac{\varphi}{N}$, N étant la normale du point M, où.....
$N = \frac{A}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}$; c'est ici comme au n° 238. De même, on changera d en $\frac{\theta}{N}$, et θ désignera la distance, en mètres, des deux parallèles de M et M' ; ainsi l'on aura

$$\theta = \varphi \cos z + \frac{\varphi^2}{2N} \operatorname{tang} l \sin^2 z - \frac{\varphi^3}{6N^2} \sin^2 z . \cos z (1 + 3 \operatorname{tang}^2 l) \ldots \quad (E)$$

On peut donc projeter ainsi tous les côtés des triangles du réseau sur la méridienne principale, par une suite d'arcs de parallèles à l'équateur, et obtenir la longueur de l'arc total, limité en deux points extrêmes dont on a les latitudes. Ce procédé conduit au résultat demandé, puisque la somme de toutes les valeurs de θ, pour les côtés soit orientaux, soit occidentaux, donnera l'arc de méridien, non-seulement en entier, mais même en parties séparées qu'on pourra comparer entre elles, comme on l'a fait p. 180 ; et il n'est point nécessaire de faire, pour la dernière station, la petite cor-

rection dont nous avons parlé, et qu'exige la méthode de Legendre, p. 155.

On a soin de donner aux azimuts z le signe qui convient selon le sens que ces angles affectent par rapport à la méridienne : ces angles sont comptés du sud ; mais les uns sont ouverts à l'ouest, et les autres à l'est. Les ingénieurs préfèrent ordinairement les compter tous dans l'un de ces deux sens, de 0 à 360°, en faisant le tour entier.

Observez que pour arriver à l'éq. (E), nous n'avons pas employé la correction d'aplatissement donnée par l'éq. (A''), p. 211, parce que nous nous servons de la normale N qui contient e^2, et que l'angle des deux normales IG, IH (fig. 80) est celui qu'on a introduit dans l'éq.

245. Appliquons cette formule à l'exemple de la p. 212, et projetons sur la méridienne l'arc terrestre du Panthéon à Dammartin (fig. 83),

φ.........	4.5249711	φ^2.....	9.04994	φ^3.....	13.57491 —
cos z......	$\bar{1}.8397190$ —,	0,5....	$\bar{1}.69897$	sin² z..	$\bar{1}.71766$
	4.3646901 —,	tang l..	0.05849	cos z...	$\bar{1}.83972$ —
1er terme	— 23157m,42	sin² z..	$\bar{1}.71766$	6......	— 0.77815
2e........	+ 52, 44	N.....	—6.80529	N².....	—13.61058
3e........	+ 0, 055		1.71977	0,055..	$\bar{2}.74356$
4e........	+ 0, 217		+ 52,44	tang l^2.	0.11699
θ =	— 23104, 71			3...	0.47712
				0,217.	$\bar{1}.33767$.

La projection cherchée est θ ; le signe — vient du sens où l'on a compté l'azimut z, et est inutile à l'objet qu'on a en vue.

246. Si l'on veut opérer par des *perpendiculaires à la méridienne*, on calculera d'abord le 1er triangle ABC (fig. 74), à l'aide des éq. (F), p. 225. L'angle azimutal CAb observé à Dunkerque a été trouvé $z = 16°46'27'',6$: la distance AC à Cassel est $\varphi = 27458^m,60$. Ainsi dans la fig. 89 où M est Dun-

kerque et M' Cassel, on trouve les arcs $MQ = x$, $M'Q = y$,

φ........	4.4386784...............		4.4386784
cos z.......	$\bar{1}$.9814156	sin z.......	$\bar{1}$.4603007
x..........	4.4197940	y..........	3.8989791
$x =$	26290^m,21	$y =$	7924^m,63.

Ce 1[er] triangle est exceptionnel. Tous les autres de la chaîne sont traités d'après les éq. H, qu'il convient toutefois de simplifier, attendu que y est un petit arc connu en mètres. En développant jusqu'au 3[e] ordre, on trouve (p. 36)

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\frac{y^2}{N^2},\quad \tang y = \frac{y}{N} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{N^3},\ \text{etc.},$$

$$\frac{\tang y}{\cos y} = \left(\frac{y}{N} + \frac{1}{3}\frac{y^3}{N^3}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{y^2}{N^2}\right) = \frac{y}{N} + \frac{5}{6}\frac{y^3}{N^3} - \text{etc.},$$

N étant la normale au point dont l'azimut est z; donc

$$\left.\begin{aligned} y' &= y - \varphi\cos\psi - \frac{y\varphi^2}{2N^2}\sin^2\psi,\\ x' &= x + \varphi\sin\psi - \frac{y\varphi^2}{2N^2}\sin 2\psi + \frac{\varphi y^2}{2N^2}\sin\psi \end{aligned}\right\}\ldots \quad (M)$$

On commence donc par déterminer ζ par l'équation (L), puis $\psi = \zeta \mp z$, en prenant — quand l'azimut z est du côté de l'est, et + dans l'autre cas. Ensuite les équ. (M) donnent x' et y'.

247. Appliquons ces éq. à la projection du 2[e] côté CE (fig. 74) qui va de Cassel à Béthune. On a déjà trouvé x et y, et l'on sait d'ailleurs qu'à Cassel

$z = 19°37'6'',0$, $l = 50°47'57'',9$, $P = 6'44'',9$,
$\varphi = 31558^m,11$ $\quad \log N = 6.8054584$.

P........	2.6173478	$\zeta =$	90° 5' 13'',77
sin l......	$\bar{1}$.8892670	$z =$	19.37. 6 , 0
	2.4966148.... 313'',77	$\psi =$	109.42.19 ,77

On a ajouté z, parce que l'azimut est du sud vers l'ouest.

φ	4.4991110 —	....	4.4991110
$\cos\psi$	$\bar{1}.5278890$ —	$\sin\psi$	$\bar{1}.9737919$
	4.0270000 +		4.4729029
	$+\ 10641^m,42$		$29710^m,01$

y	3.89898			y^2	7.79796
φ^2	8.99822			φ	4.49911
$0,5$	$\bar{1}.69897$ —			$0,5$ ...	$\bar{1}.69897$
N^2	-13.61092			$\sin\psi$ ..	$\bar{1}.97379$
	$\bar{2}.98525$ —	......	$\bar{2}.98525$ —	N^2 ...	-13.61092
$\sin^2\psi$	$\bar{1}.94757$	$\sin 2\psi$ ...	$\bar{1}.80273$ —		$\bar{2}.35891$
	$\bar{2}.93282$ —		$\bar{2}.78798$ +		$+\ 0'',023$
	$-\ 0'',086$		$+\ 0'',061$		

$y =$	$7924^m,63$	$x =$	$26290^m,21$
2ᵉ terme	$+\ 10641,42$		$+\ 29710,01$
3ᵉ	$-\ 0,09$		$+\ 0,06$
$y' =$	$18565,96$		$+\ 0,02$
		$x' =$	$56000,14$

Continuant l'opération, on projettera de même sur le méridien le côté de Béthune au Mesnil, pour lequel on a..... $\varphi = 11311^m,43$ et $z = -18°54'27''$: la latitude de Béthune est $l = 50°31'55''$; la long. P est $= 15'43'',6$; le calcul donne $\zeta = 90°12'8'',44$, puis $\psi = 71°17'41'',44$. Les éq. (M) donnent enfin $y' = 14938^m,40$, $x' = 66714^m,12$, en partant des valeurs obtenues pour y' et x', qu'on prend pour y et x.

Et ainsi de suite pour tous les côtés occidentaux de la chaîne; en sorte qu'on obtient en définitive l'arc du méridien soit entier, soit par parties, entre les stations dont on a observé astronomiquement les latitudes.

248. Observez que $x' - x$ est la valeur de la projection d'un côté de triangle, et que ce résultat n'est pas influencé par celle de x obtenue antérieurement; ainsi les petites erreurs de calcul ou d'observation ne s'accumulent pas, et n'altèrent pas l'arc de méridien qu'on veut mesurer. Il est

vrai que y entre dans la formule qui donne x' et que la valeur de y' est influencée par celle de y, ce qui tend à réagir sur x'. Mais il n'en peut résulter d'erreur notable sur x', qui est le sujet principal des recherches, parce que la 2[e] éq. (M) ne renferme y que dans des termes fort petits. Aussi peut-on se passer de la 1[re] de ces éq. et trouver y par approximation à l'aide de l'éq. K qui est plus simple et suffisante.

Par ex., pour la perpendiculaire abaissée du Mesnil, dont la latitude est $l = 50°26'9'',1$ et la longitude $P = -12'39'',1$, on a

cos l.........	$\bar{1}$.8040996
P............	2.8802990
sin 1''.........	$\bar{6}$.6855749
N............	6.8054496
y...........	4.1754231, d'où $y = 14976^m,94$, trop fort de 38^m.

249. Le pied Q d'une perpendiculaire à la méridienne, abaissée d'une station M (fig. 87), n'a pas la même latitude que ce point M, parce que l'arc MQ est différent d'un parallèle. Mais en considérant que l'arc $QM = y$ est connu en mètres et que son azimut Q est de 90°, on peut y appliquer la formule (A), p. 206, pour obtenir la differ. d des latitudes des points M. et Q. On fera donc $\cos z = 0$, et l'on remplacera a par y, ou plutôt par $\frac{y}{N}$, pour que l'arc y soit exprimé en mètres. En désignant par l la latitude du point M, et par L celle de Q, on a

$$L = l + \frac{1}{2}\frac{y^2}{N^2}\tang l.$$

Cette formule sert à trouver la latitude de l'extrémité de l'arc MQ dont on a obtenu la longueur; on sait ainsi quelle est la graduation de cet arc. C'est la correction dont nous avons parlé, p. 156, qu'exige la méthode de Legendre pour trouver l'amplitude totale de l'arc de méridien.

250. Les procédés qu'on vient d'exposer servent aussi à

trouver la longueur d'un arc de parallèle, limité par des méridiens extrêmes dont la différ. de longitude est connue (n° 211). On forme, comme n° 162, une chaîne de triangles dirigés de l'est à l'ouest, et peu distans de ce parallèle; puis on en calcule les côtés, les azimuts, les longitudes et les latitudes, comme ci-devant.

Soit AB (fig. 92) un côté de ces triangles, A et B deux stations, OQ le parallèle sur lequel on veut projeter l'arc AB, à l'aide des deux méridiens PAE, PBG; c.-à-d. qu'il s'agit de trouver la longueur Y de l'arc GE dont la latitude est L. L'azimut du côté AB vu en A est z; la latitude de B est l, sa normale est $N' = BN'$; celle du point G est $N = GN$: les rayons des parallèles GE, BD, sont $GF = x$, $BI = x'$, perpendiculaires à l'axe PC. On a $x = N \cos l$ (n° 177).

Le triangle sphérique PBA donne (éq. B, p. 204)

$$\sin P = \frac{\sin a \sin z}{\cos l};$$

comme $P = \sin P + \frac{1}{6}\sin^3 P$, il faut ajouter au second membre le 6e de son cube pour obtenir l'arc P : d'ailleurs faisant $\sin a = a - \frac{1}{6}a^3$, on en tire

$$P = \left(a - \frac{1}{6}a^3\right)\frac{\sin z}{\cos l} + \frac{1}{6}\,\frac{a^3 \sin^3 z}{\cos^3 l}.$$

En remplaçant a par $\frac{\varphi}{N'}$, comme précédemment, pour que le côté a soit exprimé par son nombre φ d'unités métriques, il vient

$$P = \frac{\varphi \sin z}{N' \cos l} - \frac{\varphi^3}{6N'^3}\,\frac{\sin z}{\cos l}\left(1 - \frac{\sin^2 z}{\cos^2 l}\right).$$

P est ici l'angle dièdre formé par les deux méridiens des stations extrêmes, ou plutôt l'arc décrit du rayon 1 qui mesure cet angle, ou l'angle DIB que font les rayons ID, IB, menés perpendiculaires à l'axe PC, partant des deux extrémités de l'arc BD, arc qui est la projection de AB sur le parallèle de B.

Or on a $1:P::1B:BD$, $BD=Px'$; les arcs semblables BD, GE, sont comme leurs rayons :

$$x':x::\text{BD}:\text{GE}=\frac{x}{x'}\times\text{BD}=Px=Y.$$

Mettant ici pour P et $x=\text{N}\cos\text{L}$ leurs valeurs, on trouve

$$Y=\frac{\text{N}\cos\text{L}}{\text{N}'\cos l}\left[\varphi\sin z-\frac{\varphi^3}{6\text{N}'^2}\sin z\left(1-\frac{\sin^2 z}{\cos^2 l}\right)\right]\ldots(\text{N})$$

On applique cette formule successivement à tous les côtés nord ou sud des triangles de la chaîne, et l'on obtient la somme de leurs projections qui compose l'arc de parallèle proposé.

251. Pour la commodité des calculs, on compose une table des valeurs de la normale (éq. 6, p. 173) pour les diverses latitudes, entre les limites des sommets de triangles qui composent la chaîne, et pour l'aplatissement adopté. N cos L est ici constant; φ, z, N' et l varient avec les stations. Mais on abrége ces calculs en cherchant d'abord N pour le parallèle OQ sur lequel les arcs sont projetés, puis le petit changement que N éprouve pour de légères variations de L.

On a $\text{N}^2=\text{A}^2(1-e^2\sin^2\text{L})^{-1}$; la différentielle par rapport à N et L est

$$d\text{N}=\frac{\text{N}\,e^2\sin\text{L}\cos\text{L}\,d\text{L}}{1-e^2\sin^2\text{L}};$$

mais $\text{N}'=\text{N}+d\text{N}$ donne (éq. 22, p. 36)

$$\log\text{N}'=\log\text{N}+\log\left(1+\frac{d\text{N}}{\text{N}}\right)=\log\text{N}+\text{M}.\frac{d\text{N}}{\text{N}},$$

M étant *le module*, et en se bornant au 1er ordre, qui suffit ici. Représentons le dernier terme par ι,

$$\iota=\frac{\text{M}\,e^2\sin 2\text{L}\,d\text{L}}{2(1-e^2\sin^2\text{L})}.$$

Développant la puissance -1 de $(1-e^2\sin^2\text{L})$, et désignant par δ la différ. $l-\text{L}$ des latitudes, il vient

$$\iota = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{M}e^2\delta \sin 1'' \sin 2\mathrm{L}\,(1 + e^2 \sin^2 \mathrm{L}).$$

Telle est *la correction* ι *que log* N *doit subir pour devenir log* N'. δ est $= l - \mathrm{L}$ exprimé en secondes. Comme il est permis de négliger ici les e^4 sans inconvénient, attendu que δ est toujours fort petit, on a simplement

$$\iota = \tfrac{1}{2}\mathrm{M}e^2\delta \sin 1'' \sin 2\mathrm{L} = \mathrm{K} \sin 2\mathrm{L}\,.\,\delta\,,$$

en faisant la constante $\mathrm{K} = \frac{1}{2}\,\mathrm{M}e^2 \sin 1''$ (*V.* la table II).

Pour l'aplatissement $\frac{1}{305}$, on a $\log \mathrm{K} = \bar{9}.83835$,

pour $\frac{1}{309.65}$... $\log \mathrm{K} = \bar{9}.83179$.

On prend δ négatif quand la station B est plus voisine de l'équateur que le parallèle principal OQ, savoir quand $l < \mathrm{L}$.

Aires des zones et du sphéroïde.

252. En désignant l'excentricité par e, nous avons trouvé, p. 189, les élémens du sphéroïde elliptique, savoir : les demi-axes A et B, son aplatissement, etc. En faisant A=B, ou $e=0$, on a les formules qui se rapportent à la Terre supposée sphérique.

Cherchons l'aire d'un quadrilatère sphéroïdique compris entre deux méridiens et deux parallèles. Pour cela, observons que le cercle décrit par un point M (fig. 78) dans la révolution de l'ellipse AMP autour du petit axe CP, a pour rayon $\mathrm{OM}=x'$; la circonf. est $2\pi x'$, et un arc de L degrés a pour longueur le 4e terme de la proportion : si 360° valent $2\pi x'$, L degrés valent $\frac{\pi \mathrm{L}x'}{180} = \frac{\mathrm{L}x'}{\mu}$, en conservant à la constante μ la valeur trouvée p. 37, $\mu = \frac{180^\circ}{\pi}$. Multiplions cet arc par l'élément $\mathrm{M}m = ds$, et intégrons ; l'aire d'un quadrilatère sphéroïdique compris entre deux parallèles et deux méridiens, sera, L étant la différ. des longitudes,

$$u = \frac{\mathrm{L}}{\mu}\int x'\,ds\,;$$

on a trouvé (p. 173, 1re éq. 4)..... $x' = \dfrac{A\cos l}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 l}}$,

(p. 178, éq. 16) ..... $ds = A\dfrac{(1-e^2)dl}{\sqrt{(1-e^2\sin^2 l)^3}}$;

donc, à cause de $1 - e^2 = \dfrac{B^2}{A^2}$ (éq. 1, p. 172),

$$u = \frac{LB^2}{\mu}\int\frac{\cos l dl}{(1 - e^2\sin^2 l)^2}.$$

Pour intégrer cette expression, posons $z = e\sin l$, $dz = e\cos l dl$,

$$u = \frac{LB^2}{e\mu}\int\frac{dz}{(1-z^2)^2} = \frac{LB^2}{e\mu}\left[\frac{z}{2(1-z^2)} + \frac{1}{4}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right];$$

rétablissant $e\sin l$ au lieu de z;

$$u = \frac{LB^2}{2\mu}\left[\frac{\sin l}{1 - e^2\sin^2 l} + \frac{1}{2e}\log\left(\frac{1 + e\sin l}{1 - e\sin l}\right)\right].$$

Nous n'avons pas ajouté de constante, parce que nous supposons que l'aire du quadrilatère commence à l'équateur, et se termine au parallèle dont la latitude est l; ainsi $l = 0$ doit répondre à $u = 0$, et la constante est nulle.

253. Pour la facilité des calculs, on pose

$$e\sin l = \sin\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

et l'on divise les log. par le module M (p. 36) pour changer ces log. qui sont népériens en tabulaires. On trouve

$$u = \frac{LB^2}{2\mu e}\left[\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\sin\varphi} + \frac{1}{M}\log.\ \text{tabul.}\ \operatorname{tang}^2\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)\right] \ldots (3)$$

Pour obtenir l'aire du globe entier, il faut prendre $L = 360^\circ$, et $l = 90^\circ$, puis doubler, savoir :

Pour la zone torride, on fait $l = 23^\circ\ 28'$, avec $L = 360^\circ$;
Pour la zone tempérée...... $l = 66^\circ\ 32'$;

mais du résultat, on doit retrancher l'aire de la zone torride. Enfin on retranche ces deux zones de l'hémisphère pour avoir la zone glaciale.

Quand on suppose la terre sphérique, les formules 1 à 3 deviennent, en faisant $A = B$, et $e = 0$,

$$u = \frac{A^2L}{\mu}\sin l = \frac{A^2L\pi \sin l}{180^\circ}, \quad \text{et} \quad 4\pi A^2.$$

Dans cette hypothèse, et prenant pour le rayon A de la sphère, la moyenne entre le grand et le petit axe, c.-à-d. entre les nombres 6 375 739ᵐ et 6 356 649ᵐ, pour l'aplatissement $\frac{1}{310}$, savoir, en faisant A = 6 366 194ᵐ, on trouve les résultats suivans :

Les deux zones glaciales valent ensemble.	42122 72206 hectares.
Les deux zones tempérées. . . .	2 64362 40880
La zone torride.	2 02808 67640
Surface entière du globe terrestre.	5 09293 80726
Le calcul direct donne $4\pi A^2 =$	5 09293 80650,

c.-à-d. 76 hectares de moins, ce qui provient des erreurs dues aux log. des grands nombres.

CHAP. III. — NIVELLEMENT.

Nivellement géodésique.

254. Deux points M et N (fig. 93) sont *de niveau* quand ils sont situés sur une même surface MAN, concentrique au globe terrestre *man*, que nous supposerons être une sphère. Si l'on compare quelque sommet O au point M, la différence NO de niveau est mesurée sur la verticale, ou le rayon CN prolongé. Il s'agit de trouver $NO = x$.

Du point M, d'où l'on voit le signal O, on mesurera l'angle OMP qu'on appelle la *distance zénithale* de O. Observons que la *réfraction atmosphérique* fait voir ce point O plus élevé qu'il ne l'est réellement, en sorte qu'on juge ce sommet O en *i*, et que l'angle mesuré est, non pas OMP, mais $iMP = z$, plus petit que le 1ᵉʳ; la différ. est $iMO = r$. La véritable distance au zénith est donc $OMP = z + r$, z étant l'angle qu'on mesure actuellement, et r la réfraction inconnue.

Quant à l'arc MAN, il est toujours fort petit; nous verrons qu'on peut lui substituer sa corde MBN $= k$ (*voy.* n° 151).

255. Dans le triangle isoscèle CMN, l'angle NMC $= 90° - \frac{1}{2}C$; la corde MBN $= k = 2R \sin \frac{1}{2}C$, R étant le rayon terrestre, ou plutôt la normale en M, pour avoir égard à l'aplatissement terrestre. Donc, en exprimant l'angle C en secondes; et substituant le petit arc $\frac{1}{2}C$ à son sinus (on remplace $\sin \frac{1}{2}C$ par $\frac{1}{2}C \sin 1''$, *voy.* p. 37), on a $k = RC \sin 1''$.

Le triangle OMN donne sin O : MN ou k :: sin OMN : ON ou x;

d'où $$x = k \times \frac{\sin OMN}{\sin O}:$$

or $$OMN = 180° - OMP - NMC = 90° - z - r + \tfrac{1}{2}C,$$
$$NOM = O = OMD = OMP - C = z + r - C,$$

donc $$x = k \times \frac{\cos(z + r - \frac{1}{2}C)}{\sin(z + r - C)} : \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

avec $$k = RC \sin 1''. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Cette éq. (2) où la distance k est connue, donne l'arc C en secondes : ainsi il ne reste plus pour avoir la différ. x de niveau des stations M et O, que de trouver la réfraction r.

En prenant $R = 6\,366\,198$ mètres, on a $\log \frac{1}{R \sin 1''} = \bar{2}.5105449.$

Il peut arriver que l'angle C soit assez petit pour qu'on ne change pas sensiblement la valeur (1), en remplaçant C par $\frac{1}{2}C$ dans le dénominateur, attendu que l'arc $z + r - C$ étant peu différent de 90°, son sinus varie à peine pour un petit changement de l'arc : alors l'éq. (1) devient simplement

$$x = k \times \cot(z + r - \tfrac{1}{2}C). \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

256. Pour trouver la réfraction r, ou en éviter l'emploi, on prend des *distances zénithales réciproques et simultanées* : un observateur placé en O (fig. 93) mesure l'angle MOZ, distance zénithale de M vu de O, en même temps qu'une autre personne prend l'angle OMP. Soit MOZ $= z' + r$, z' étant l'angle observé,

et r la réfraction qu'on suppose la même en O qu'en M (*).

On a MOZ + OMP $= z + z' + 2r$. Mais d'un autre côté, ces deux angles étant extérieurs au triangle MOC, sont l'un MOZ = OMC + C, l'autre OMP = O + C; la somme de ces angles se compose des trois angles du triangle MOC, plus de l'angle C : ainsi cette somme = 180° + C, et l'on a

$$180° + C = z + z' + 2r; \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

d'où $$r = \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(z + z' - 180°) \ldots\ldots \quad (5)$$

Introduisant cette valeur dans l'éq. (1), il vient

$$x = k \times \frac{\sin\frac{1}{2}(z' - z)}{\cos\frac{1}{2}(z' - z + C)} \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

L'éq. (3) qui n'est qu'approximative, mais qui suffit le plus souvent, devient

$$x = k \times \tan\tfrac{1}{2}(z' - z) = \tfrac{1}{2}k(z' - z)\sin 1'', \ldots \quad (7)$$

en exprimant en secondes le petit arc $z' - z$. Lorsque z et z' ne sont pas à peu de chose près égaux, et que k est de quelque étendue, on doit se servir de l'éq. (6) de préférence.

L'éq. (7) peut aussi servir à trouver l'une des distances zénith. z et z' quand on connaît l'autre et la différ. x de niveau.

257. Comme il est pénible de doubler ainsi le nombre des observations, dans le seul but de trouver la réfraction r, on a fait des tentatives multipliées pour éviter les distances zénithales réciproques, et déterminer r *à priori;* car alors on pourrait se servir des éq. (1) ou (3). Ce petit arc r est variable par les circonstances atmosphériques; le Mémoire cité de M. Biot apprend à le trouver, mais les formules sont compliquées.

(*) M. Biot a donné, dans la *Connaissance des Temps* de 1842, des formules pour trouver r, et a prouvé que quand on fait des observations réciproques et simultanées, la réfraction r est sensiblement la même pour les deux stations, c'est-à-dire que la *trajectoire* de la lumière est la même courbe pour chacune.

Supposons que, par des observations très soignées, on soit parvenu à trouver diverses valeurs de r, correspondantes chacune à un angle G bien connu (fig. 93). En divisant ces valeurs par les angles C qui leur appartiennent, on a remarqué que les quotiens diffèrent peu de 0,08. Ainsi, dans les circonstances atmosphériques ordinaires, si l'on n'a pu obtenir des distances zénithales réciproques, on pourra poser approximativement

$$r = 0,08 \times C;$$

ensuite l'équat. (1) donnera la differ. x de niveau entre les deux stations, à fort peu près, et par des distances zénithales simples z.

258. Mais les variations qu'éprouve l'atmosphère dans ses diverses couches, changent notablement la réfraction, et l'on ne peut avoir une confiance absolue dans l'éq. $r = 0,08 \times C$. Rigoureusement, on devrait poser $r = mC$, et choisir pour m la valeur qui convient aux circonstances atmosphériques où l'on opère.

La variable m est appelée *le coefficient de la réfraction*; elle change avec la température, la pression atmosphérique, et mille causes locales presque insaisissables par le calcul. Delambre (*Astron.*, T. III, p. 575) a trouvé m de 0,05 à 0,06 en été; rarement de 0,14 à 0,15 par un temps brumeux d'hiver; et presque toujours $m = 0,08$, avec 0,02 de variation en moins pendant l'été, et en plus dans les temps froids.

La moyenne de 17 observations de la mer (nº 264) faites en été et en automne, est 0,0783. On trouve, p. 234 et 366 du 6ᵉ vol. du *Mémorial du dépôt de la guerre*, un grand nombre de déterminations du facteur m, plus ou moins différentes de 0,08, et qui prouvent la variabilité de ce coefficient.

Concluons de là qu'il faut, autant qu'on le peut, mesurer des distances zénithales réciproques de tous les sommets dont on veut avoir le nivellement avec précision. Mais comme il n'est pas toujours possible de le faire au même moment, et

que lorsqu'on le peut, les difficultés et les frais d'exécution obligent souvent à renoncer à cet avantage, les distances zénithales sont alors réciproques, sans être simultanées. Et quand elles ne le sont ni l'une ni l'autre, faute de mieux, on prend $m = 0,08$, ce qui donne encore des résultats très satisfaisans, du moins quand l'atmosphère ne se trouve pas dans des conditions exceptionnelles de température, pression, humidité, etc.

Une simplification qu'on se permet, quand, d'une même station, on peut apercevoir plusieurs sommets environnans, consiste à mesurer, pour l'un seulement, des distances zénithales réciproques et, s'il se peut, simultanées, afin d'en conclure la valeur actuelle de m, qu'on fait ensuite servir à la détermination des hauteurs des autres sommets, pour lesquels on se contente de distances zénith. simples. On se sert de l'éq. (1) en y faisant $r = m\mathrm{C}$, avec la valeur de m qu'on vient d'obtenir, parce que l'on admet que l'état de l'air restant le même, ce coefficient conserve sa valeur.

259. Au reste, l'éq. (1) peut être développée, dans ce cas, d'une manière commode pour le calcul. Posons $r = m\mathrm{C}$ dans cette éq., et faisons, pour abréger, $\psi = z - (\frac{1}{2} - m)\mathrm{C}$; nous aurons

$$x = k\,\frac{\cos\psi}{\sin(\psi - \frac{1}{2}\mathrm{C})} = \frac{k\cot\psi}{\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}\,(1 - \cot\psi\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{C})},$$

en développant le $\sin(\psi - \frac{1}{2}\mathrm{C})$, et divisant haut et bas par $\sin\psi\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}$. Faisons la puissance -1 de $(1 - \cot\psi\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\mathrm{C})$; et comme ψ est très voisin de z (et de 90°), $\cot\psi$ est fort petite, ainsi que C; négligeons le 2e ordre;

$$x = \frac{k\cot\psi}{\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}} = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}}\cot\left[z - \left(\frac{1}{2} - m\right)\mathrm{C}\right]$$
$$= \frac{k}{\cos\frac{1}{2}\mathrm{C}}\cdot\frac{\cot z + \mathrm{tang}\,(\frac{1}{2} - m)\mathrm{C}}{1 - \cot z\,\mathrm{tang}\,(\frac{1}{2} - m)\,\mathrm{C}};$$

faisons la puissance -1 du dénominateur, et négligeons toujours le 2e ordre, puis remplaçons la tangente par le petit

arc $(\frac{1}{2} - m)$C,

$$x = \frac{k}{\cos\frac{1}{2}C}\left[\cot z + \left(\frac{1}{2} - m\right)\frac{k\,\mathrm{cosec}^2 z}{R}\right],$$

à cause de l'éq. (2), $k =$ RC. Enfin

$$x = \frac{k\cot z}{\cos\frac{1}{2}C} + \frac{k^2(\frac{1}{2} - m)}{R\cos\frac{1}{2}C\sin^2 z}. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Le plus souvent on prend $\cos\frac{1}{2}C = 1$, et même $\sin^2 z = 1$, et l'on a

$$x = k\cot z + \frac{k^2}{R}\left(\frac{1}{2} - m\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Nous donnerons plus loin un exemple de cette formule, lorsque nous aurons déterminé k avec précision.

260. L'éq. (6) exprime la différ. de niveau $x =$ ON (fig. 93) des deux stations M et O, d'où l'on a mesuré les distances zénith. réciproques z et z' ; elle a été déduite de la résolution du triangle rectiligne MON qu'on appelle *hypsométrique*; k y représente la corde MN. La même chose doit se dire des éq. (1), (8) et (9). Pour appliquer ces formules aux cas particuliers, il faut supposer que la corde MBN est égale à l'arc *man* qui est l'un des côtés de nos triangles géodésiques projetés sur le sphéroïde du niveau des mers et composant le réseau ; car tous les côtés de nos triangles ont été réduits à ce niveau par le calcul. Il est bien certain que cette supposition n'altère pas sensiblement la valeur qu'on obtient pour x, qui est en général une petite quantité par rapport aux dimensions de la terre.

Mais, en fait, l'arc *man* diffère de la corde MN ; et si la valeur de x n'est pas influencée par la supposition de $k =$ arc *man*, cela tient au peu d'élévation des sommités au-dessus de la mer. Désignons l'arc connu *man* par φ, tel que le donnent la triangulation et les calculs ; nous aurons

Cm : *mbn* :: CM : MBN, ou $R : \alpha :: R + h : k$,

en faisant la corde $mbn = \alpha$, et la hauteur $Mm = h$ au-des-

sus de la mer, hauteur connue, au moins à peu près. Ainsi

$$k = \frac{\alpha(R+h)}{R} = \alpha\left(1+\frac{h}{R}\right):$$

la corde α de l'arc φ, est (nº 151), $\alpha = \varphi - \frac{\varphi^3}{24R^2}$; ainsi

$$k = \varphi\left(1+\frac{h}{R}\right)\left(1-\frac{\varphi^2}{24R^2}\right) \ldots\ldots \quad (10)$$

Telle est la valeur qu'il faut employer pour k dans les éq. précédentes. Comme les calculs se font toujours par log., nous développerons les log. des deux binomes par l'éq. (22, p. 36) et nous négligerons les termes du 2ᵉ ordre, qui sont très petits; nous aurons, en désignant par M le module,

$$\log k = \log\varphi + \frac{Mh}{R} - \frac{M\varphi^2}{24R^2} \ldots\ldots \quad (11)$$

Pour la latitude de 45°, on trouve en mètres

$$\log\frac{M}{R} = \bar{8}.8339041, \quad \log\frac{M}{24R^2} = \overline{16}.6498127.$$

Appliquons maintenant l'éq. (9) à un exemple. Supposons que du Panthéon on ait observé le clocher de Vélizy, et qu'on ait trouvé la distance zénithale de la boule de ce clocher, $z = 89^\circ 48' 33''$. L'arc de distance qui sépare les deux stations, réduit au niveau des mers, a été trouvé $\varphi = 13321$ mètres; on demande la différ. x des niveaux de la boule du clocher et de la lanterne du Panthéon, d'où l'on a observé z. Prenons d'ailleurs $m = 0,08$ et $h = 144^m$. (Une détermination exacte a donné $143^m,8$ pour la hauteur du sommet de la lanterne du Panthéon au-dessus de la mer)

φ …….	4.1245368	const. …..	$\bar{8}$.83390	Le 3ᵉ terme de l'éq.(11) ne donne rien.	
	98	$h = 145^m$..	2.15836		
k ……..	4.1245466	982'…….	$\bar{6}$.99226		
cot z ….	$\bar{3}$.5225332			h^2 ….	8.2490932
	1.6470798	……… 41^m,369		0,42 ..	$\bar{1}$.6232493
		11,707		R…	−6.8038802
diff. de niveau ………		$x =$ 56,076		11,707	1.0684623.

Comme l'arc $\frac{1}{2}$ C n'est ici que de 3′36″, le diviseur cos $\frac{1}{2}$ C est tout-à-fait sans importance, et l'on se sert de l'éq. (9).

261. Lorsqu'on opère dans un pays de montagnes, il serait tout-à-fait défectueux de supposer que k désigne la même chose que le côté φ d'un triangle géodésique, parce que la hauteur h des stations au-dessus de la mer exerce une influence sensible dans l'éq. (11); il en faut dire autant du cas où les stations seraient assez distantes l'une de l'autre, pour que φ fût un fort grand nombre. Ce n'est donc qu'en pays de plaines qu'on est en droit de supposer $k = \varphi$, et pour les intervalles de 15 mille mètres au plus. Au reste, l'éq. (11) apprendra si réellement $k = \varphi$.

Voyons à mettre l'éq. (6) sous une forme plus commode pour le calcul : en posant $\nu = \frac{1}{2}(z' - z) =$ angle OMN (fig. 93), l'éq. (6) devient

$$x = \frac{k \sin \nu}{\cos(\nu + \frac{1}{2}C)} = \frac{k \sin \nu}{\cos \nu \cos \frac{1}{2}C - \sin \nu \sin \frac{1}{2}C}$$
$$= \frac{k \operatorname{tang} \nu}{\cos \frac{1}{2}C\,(1 - \operatorname{tang}\nu \operatorname{tang}\frac{1}{2}C)}.$$

Développant la puissance — 1 du binome, on a

$$x = \frac{k \operatorname{tang} \nu}{\cos \frac{1}{2}C}\left(1 + \operatorname{tang}\nu \operatorname{tang}\frac{1}{2}C \text{ etc.}\right). \quad (12)$$

Les angles ν et $\frac{1}{2}$ C sont si petits que le 2e terme est presque toujours négligeable, ce qui donne

$$x = k\,\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(z' - z)}{\cos\frac{1}{2}C} \;\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Prenons pour exemple les observations que M. Peytier a faites au Pic du Midi de Bigorre et à Monterpé; il a trouvé pour distances zénithales réciproques

Pic du Midi ...... $z' =$	92°14′32″,5	dist. $\varphi = 27570^m,4$:
Monterpé .... $z =$	87.58.27,4	
$z' - z =$	4.16.5,1	hauteur au-dessus de la mer,
$\nu =$ moitié $=$	2.8.2,5.	environ $h = 1850^m$.

1er terme φ	4.4404486	const.	$\bar{8}.83390$	const. ...	$\overline{16}.6498$—
2e	1262	h	3.26717	φ^2	8.8809
3e	— 3		$\bar{4}.10107$		$\bar{7}.5307$—
k	4.4405745		1262		—3
tang v	$\bar{2}.5712783$			φ	4.44057
cos $\frac{1}{2}$C	$\bar{1}.9999990$			compl. sin 1″	5.31443
x	3.0118518			R	—6.80388
x =	1027m,66		893″,55....	C	2.95112
=	diff. des hauteurs du signal et de la station.				

Le 3e terme de l'éq. (11) donne à peine 0m08, quoique les élévations ou *altitudes* soient ici très considérables.

262. L'ex. précédent montre qu'on ne peut ordinairement faire les observations en se plaçant aux sommets des signaux dont on mesure les distances zénithales; il faut donc corriger les angles observés. Soit C (fig. 82) un signal qu'on a observé de A, et O le lieu où se place l'observateur pour voir A. La station est au-dessous de C d'une quantité OC = i, et l'angle mesuré AOZ = Z doit, dans les éq., être remplacé par ACZ = z ; A est la diff. de ces angles; il s'agit de la calculer et de l'ajouter à O. On a AC : OC :: sin O : sin A ; d'où, exprimant le petit arc A en secondes (p. 35), et faisant AC = a,

$$A = \frac{i \sin Z}{a \sin 1''}, \quad ZCA = z = Z + A.$$

Et s'il arrive qu'on ne puisse observer Z d'un point O situé dans la verticale OZ du signal, on se place le plus près possible en un lieu O (fig. 90), dans le plan vertical BOA passant par la station A, et par le signal B, que nous supposons dans le même plan horizontal que O : ce plan vertical coupe l'horizon selon BO. L'angle observé est BOZ = Z qu'il faut corriger pour avoir ABZ'. OD parallèle à BA, donne A pour différ. de ces angles, en posant AB : OB :: sin AOB : sin A ; d'où

$$A = \frac{m \cos Z}{a \sin 1''}, \quad ABZ' = DOZ = Z + A,$$

en faisant $OB = m$. Quand la station O est en arrière de B, cos Z devient négatif, et l'on a $ABZ' = Z - A$. Bien entendu que si le signal au lieu d'être en B, sur l'horizon de O, est élevé en C au-dessus de B, il faut corriger ce résultat, en vertu du théorème qui précède.

Enfin, quand on ne peut stationner dans le plan vertical des signaux A et B, et qu'on est obligé de se placer en un lieu G, on peut supposer que la station est en B, en prenant $AB = AG$, attendu que les rayons partis de A, et terminés en B et en G, sont également inclinés sur le plan horizontal BOG. La distance AG se tire du triangle AOG, et l'on a OB = diff. des projections horizontales de AG et OG.

263. Il arrive quelquefois que l'arc terrestre k qui sépare les deux signaux est inconnu, et qu'au contraire, on a trouvé, soit directement, soit par des observations barométriques (n° 273), la différ. x de leurs niveaux. Nos éq. peuvent alors servir à trouver cette distance k ; mais ce procédé n'a aucune précision.

264. Lorsque d'un sommet O, on aperçoit en M (fig. 47) la mer à l'horizon, et qu'on mesure l'angle MOZ formé par la verticale OZ avec l'horizon OM de la mer, tangent à la surface des eaux, cette distance zénithale apparente $MOZ = z$ donne ce qu'on appelle l'*altitude*, ou la hauteur absolue de la station O au-dessus du niveau de la mer. En effet, le triangle MOC est rectangle en M, et l'angle extérieur $MOZ = z + r$, est aussi $= 90° + C$; d'où

$$z + r = 90° + C,$$

Or, ce triangle MON donne $CM = CO \times \cos C$; et comme $ON = x = CO - CN$, on trouve

$$x = \frac{CM}{\cos C} - CN = CM\left(\frac{1 - \cos C}{\cos C}\right),$$

$$x = R \tan C . \tan \tfrac{1}{2} C = \tfrac{1}{2} R \tan^2 C,$$

à cause de l'éq. (8) page 35, et parce que, quand l'arc ay est très

petit, tang $ay = a$ tang y. Mais nous avons trouvé d'abord $C = z + r - 90°$, et comme r est une très petite quantité, on peut la négliger dans $r = mC$, et poser $r = m\,(z - 90°)$. En effet, l'influence de l'erreur de l'éq. $C = (m+1)(z-90°)$, est tout-à-fait nulle sur tang C et tang $\frac{1}{2}$ C. Substituons donc cette quantité pour C, et notre éq. devient

$$x = \tfrac{1}{2} R\,(m+1)^2 \tan^2 (z - 90°) \ldots\ldots \quad (15)$$

Cette éq. donne l'*altitude*, ou la hauteur absolue x de la station O, au-dessus du niveau des mers, pourvu que l'on connaisse le coefficient m, soit par d'autres observations contemporaines de distances zénithales réciproques (*voy*. n° 258), soit simplement en prenant $m = 0{,}08$. Cette dernière valeur donne

$$x = 0{,}5832\ R \tan^2 (z - 90°) \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

265. Comme l'océan est soumis à un mouvement alternatif de *flux* et *reflux*, on devra mesurer z, tant au moment de la haute mer, qu'à celui de la basse mer suivante, et prendre la moyenne entre les deux valeurs de z, qui sera la distance zénithale de la mer moyenne. Tel est le procédé suivi pour obtenir la hauteur de la sommité O, au-dessus d'un niveau que la mer conserverait constamment, sans les actions que le soleil et la lune exercent pour produire les marées.

Toutefois, le facteur m variant entre des limites assez étroites, on ne peut accorder une confiance absolue à ce procédé, et l'on doit préférer le nivellement topographique (n° 48).

266. En faisant $m = 0{,}08$ dans l'éq. (15), on a (fig. 47)

$$\tan (z - 90°) = \frac{1}{1{,}08} \sqrt{\left(\frac{2}{R}\right)} \times \sqrt{x}.$$

Si l'on mène par le point O une horizontale parallèle à la tangente en N), l'angle θ qu'elle fera avec MO, est $\theta = z - 90°$; cet angle est appelé *la dépression de l'horizon*; c'est l'angle que l'horizon sensible MO fait avec l'horizon vrai de la station

O. Comme θ est toujours fort petit, on remplace la tangente par l'arc, qu'on exprime en secondes (p. 37) : ainsi au lieu de tang $(z-90^\circ)$, on met $\theta \sin 1''$, et l'on a

$$\theta = \frac{1}{1{,}08 \sin 1''}\sqrt{\left(\frac{2}{R}\right)}\cdot\sqrt{x} = H\sqrt{x}.$$

en faisant (*) $\log H = 1{,}0295592$;

et exprimant x en centimètres, θ en secondes d'arc, et prenant le rayon terrestre $R = 636\ 669\ 800$ centimètres (*voy.* p. 194).

267. Quant à l'arc terrestre $MN = k$ jusqu'où le rayon visuel OM atteint aux limites de l'horizon, comme l'éq (2) est $k = \theta R \sin 1''$, on trouve, en exprimant k en mètres, x en centimètres et θ en secondes,

$$k = B\sqrt{x}, \quad k = D\theta,$$
$$\log B = 2.5190484, \quad \log D = 1.4894892.$$

268. Ainsi lorsqu'en mer, on veut observer la hauteur d'un astre, on mesure sa distance angulaire aux limites de l'horizon sensible; on doit retrancher le petit arc θ de l'arc obtenu, pour avoir la hauteur sur l'horizon vrai du lieu. On mesure d'abord le nombre x de centimètres dont le pont du navire est élevé au-dessus du plan de flottaison, quantité constante ; le calcul donne ensuite la correction invariable θ que chaque hauteur observée doit éprouver. Chaque navire a sa valeur de x, qui donne celle de θ, et varie avec elle.

Nos éq. donnent en outre la distance k où l'on est d'une côte, quand on commence à apercevoir le rivage.

Pour les besoins de la navigation, on convertit ces formules en *tables de dépression*, d'où l'on tire à vue les valeurs de k et de θ, lorsqu'on a celle de x (*voy. l'Astron. pratique*).

(*) On a $H = 10'',70438$: Delambre trouve $H = 10'',651$; mais il a pris $m = 0{,}0783$ (*voy. Astron.*, T. III, p. 604).

269. Si l'on a bien saisi l'ensemble de la théorie des nivellemens, on comprend qu'on peut obtenir les différences de niveau de toutes les stations d'un réseau géodésique, les unes par rapport aux autres, à l'aide de leurs distances zénithales, qu'on rendra, s'il se peut, réciproques, et même simultanées. En conduisant la chaîne des triangles jusqu'en un lieu d'où l'on puisse apercevoir le niveau de la mer, on trouve l'élévation de ce point au-dessus de la marée moyenne, et l'on en conclut ensuite celle de toutes les autres sommités. Ainsi l'on peut connaître les trois coordonnées qui fixent la position de chaque point sur la surface du globe terrestre. C'est ainsi que M. Coraboeuf a pu conclure, contre l'opinion qu'on s'était formée d'après des circonstances physiques peu concluantes, que les niveaux de l'Océan et de la Méditerranée sont les mêmes. Une grande triangulation faite par cet ingénieur sur toute la chaîne des Pyrénées, a mis ce fait hors de doute. Le même savant avait trouvé 4811 mètres pour l'altitude du Mont-Blanc.

Il est vrai que toute cette théorie suppose que la terre est sphérique; mais on démontre (*voy.* la *Géodésie de Puissant*) que cette hypothèse n'ôte rien à la rigueur des résultats, pourvu que dans les éq., au lieu du rayon terrestre R, on substitue la valeur de la normale qui convient aux localités et à l'aplatissement de la terre (*voy.* p. 173).

270. Les vapeurs qui s'élèvent à la surface de la mer ajoutent aux incertitudes relatives à la valeur du coefficient m de la réfraction; il est donc préférable, pour trouver la hauteur d'un sommet au-dessus de la mer de se servir d'un nivellement topographique, plutôt que de la théorie du n° 264. On cherchera donc cette élévation par une succession d'opérations faites avec le niveau à bulle d'air de Chézy (fig. 41, n° 52), en prenant d'ailleurs les précautions qui rendent le choix des localités et les opérations propres à simplifier ce travail. (*Voy. la Théorie du nivellement topographique*, n° 48.)

Nivellement barométrique.

271. La différence de niveau de deux stations peut encore être trouvée par le secours du baromètre. Au même moment, s'il se peut, on note les hauteurs de la colonne de mercure aux deux stations, tant sur le baromètre, que sur le thermomètre; et comme il arrive souvent que le premier de ces instrumens n'est pas resté assez long-temps sur les lieux pour en prendre la température, on note aussi l'indication d'un autre thermomètre logé dans la monture, et qui se met par conséquent toujours à l'unisson de température avec le baromètre. On fait donc six observations, savoir H et T hauteurs du baromètre et du thermomètre centigrade, à l'air libre à la station inférieure; puis les hauteurs h et t à la station supérieure, enfin les températures des baromètres tant en bas qu'en haut. Soit θ cette dernière température à la station inférieure moins celle d'en haut (cette différence θ est négative quand celle-ci surpasse la 1re, ce qui arrive quelquefois). On suppose que H et h sont rapportées à la même unité quelconque (pouces, lignes, centimètres, etc). l désigne la latitude du lieu, qu'il n'est pas nécessaire de connaître avec précision, parce que le facteur α est un très petit nombre; R le rayon terrestre, x la différence de niveau demandée, exprimée en la même unité que la constante a. La formule de Laplace est (*voy.* ma *Mécanique*, n° 368 et celle de *M. Poisson*, n° 619).

$$x = a\text{P}[1 + 0{,}002\,(\text{T} + t)]\,(1 + \alpha\cos 2l)\left(1 + \frac{x}{\text{R}}\right),$$

$$\text{P} = \log \text{H} - \log h - 0{,}00008.\theta.$$

α est un nombre inconnu; on a $\log\alpha = \bar{3}.45287$.

272. Pour déterminer la constante a, on a mesuré avec un grand soin, par des procédés géodésiques (n° 259) la différence x de niveau entre deux sommités; et l'on a procédé ensuite aux mesures barométriques, des quantités T, t, H, h et θ. Alors tout se trouve connu dans la formule, excepté a,

dont on tire ensuite la valeur. On peut répéter ensuite cette détermination sur diverses autres sommités, et dans des conditions atmosphériques différentes. Chacune de ces opérations doit donner pour a la même valenr; et l'on trouve qu'en effet ces résultats sont sensiblement égaux. On efface les erreurs d'observations en prenant une moyenne entre eux. C'est ainsi que Ramond a trouvé que

$$a = 18336^m, \quad \log a = 4.2633046.$$

Le second membre de l'éq. contient l'inconnue x, que cette formule est précisément destinée à faire connaître. Mais comme le rayon terrestre R y entre au diviseur de x, la fraction $\frac{x}{R}$ est extrêmement petite. On la négligera d'abord, et l'on obtiendra une 1re approximation de x; et substituant ce nombre dans le dernier facteur de l'éq. on aura un second résultat plus approché, qu'on pourra, si l'on veut, corriger de même une 2e fois. C'est la méthode que nous avons souvent employée (*voy.* p. 147 et 187).

273. Au reste, Ramond a conclu d'un très grand nombre d'épreuves, qu'il est permis de négliger ce facteur, toutes les fois que les sommités ne sont pas considérablement élevées. Seulement il faut alors accroître un peu le coefficient a, en le faisant de 18393^m. La formule se réduit ainsi à

$$x = a\,(\log H - \log h - 0{,}00008.\theta)[1 + 0{,}002(T + t)](1 + \alpha\cos 2l)$$
$$a = 18393^m, \quad \log a = 4.2646526, \quad \log \alpha = \bar{3}.45287.$$

Voici la marche des opérations et des calculs.

Deux observateurs, placés chacun à l'une des stations qu'on veut niveler, notent (à la même heure, s'il est possible) les hauteurs du baromètre, et de deux thermomètres, l'un à l'air libre, l'autre fixé au baromètre ; on connaît ainsi H, T, h, t et θ. On peut même répéter les observations plusieurs fois, et prendre pour ces nombres des valeurs moyennes. On applique ensuite la formule précédente.

274. Voici, par ex. des observations de M. de Humboldt au Pérou.

Baromètres.	*Therm. libres.*	*Th. des barom.*	
$H = 3^{mm},15$	$T = 25^{o},3$	$25^{o},3$	latit. $l = 21^{o}$
$h = 600 \quad ,95$	$t = 21 \;,3$	$21 \;,3$	
	$T + t = 46 \;,6$	$4 \;,0 = \theta$	

H........	2.88261	α	$\bar{3}.45287$	a.........	4.26465
h	—2.77884	cos 2 l	$\bar{1}.87107$	1,0932......	0.03870
8θ	—32		$\bar{3}.32394$...	1,00211.....	92
P........	0.10345		....	....	$\bar{1}.01473$,
		hauteur demandée	$x = 2084^{m},50$	....	3.31900.

Il est inutile de dire que les instrumens doivent être construits avec soin, et que leur marche doit être absolument la même lorsqu'on les compare dans un même lieu.

275. Selon Mrs Littrow et de Lindenau, on peut trouver l'élévation d'une sommité au-dessus du niveau de la mer, sans avoir besoin de faire d'autres observations du baromètre et du thermomètre près du rivage. Si l'on en croit les assertions de ces savans, on arrive à une approximation suffisante pour la pratique, dans la plupart des cas ordinaires, en adoptant pour hauteurs des deux instrumens placés sur le rivage de la mer, les valeurs

$$H = 760^{mm},247, \quad T = 66^{o}25' + t - 0,09235.h.$$

Ces formules, qui dispensent des observations à la station inférieure seraient fort commodes, si elles étaient exactes. Mais il ne paraît pas qu'on puisse y avoir confiance, et nous ne présentons ici cette remarque que comme un sujet de recherches.

CHAP. V. — DU PENDULE.

276. Comme la durée des oscillations d'un pendule varie avec les lieux, on peut en conclure la forme du sphéroïde terrestre. C'est ce que nous nous proposons ici de mettre en évidence. Rappelons d'abord quelques propositions empruntées à la mécanique. (*V.* mon *Traité de Mécanique*, n° 194.)

Un *pendule simple*, c.-à-d. un point matériel pesant Q, suspendu à un point fixe O (fig. 91) par un fil sans poids et inextensible, emploie à faire une *oscillation* (de Q en Q′) la durée

$$t = \pi \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\left[1 + \frac{b}{8r}\right] \ldots\ldots \quad (1)$$

r est la longueur OQ du pendule, exprimée par la même unité que la pesanteur g qui le meut (g est le double de l'espace que décrit en la 1re seconde un corps tombant dans le vide); $b =$ AD, sinus verse de l'arc parcouru QA; enfin π est le nombre 3,14159..., ou le rapport de toute circonférence à son diamètre. L'expression (1) n'est que le commencement du développement d'une série; mais le 2e terme est toujours tellement petit, que les termes suivans sont négligeables sans aucune erreur sensible.

277. Quand l'excursion QA est infiniment petite, b devient nul, et l'on a

$$t = \pi \sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \ldots\ldots \quad (2)$$

Donc 1°. *les temps des oscillations de deux pendules d'égales longueurs sont les mêmes, quels que soient les arcs décrits, pourvu que ces arcs soient fort petits.*

2°. Pour deux pendules de longueurs différentes r et r', les temps des oscillations t et t' sont donnés par l'éq. (2), d'où l'on tire $t : t' :: \sqrt{r} : \sqrt{r'}$,

ou, *les temps des oscillations de deux pendules inégaux, sont entre eux comme les racines carrées des longueurs de ces pendules :* ou bien, en carrant, *les longueurs des pendules, sont comme les carrés des temps de leurs oscillations.*

3°. Si dans un temps T, un pendule fait N oscillations, puisque la durée de chacune est t, on a

$$T = Nt = N\pi\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)} \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Pour un autre pendule de longueur r', le nombre des oscillations, dans le même temps T, et N'; et une éq. semblable existe entre r' et N' : d'où l'on tire

$$rN^2 = r'N'^2 \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

les longueurs des pendules sont en raison inverse des carrés de leurs nombres d'oscillations, dans le même temps : ou bien le produit rN^2 est constant.

278. Pour avoir la longueur r d'un pendule qui bat la seconde de temps moyen, en un lieu, on fera $N = 60$, et l'on cherchera par expérience combien N' un autre pendule simple de longueur connue r', fait, dans le vide, d'oscillations en une minute ; et l'éq. (4) où tout est connu excepté r, donnera cette longueur r. Par ex., si l'on a trouvé qu'à Paris, un pendule long de $r' = 0^m,797$ fait 67 oscillations par minute, ou $N' = 67$, on verra que la longueur du pendule à seconde de temps moyen à Paris est

$$r = 0^m,9938267 \quad = 3^{pi},059439 \quad = 440^{li},5593$$
$$\log r = \bar{1}.9973106 \ldots\ldots 0.4856419 \ldots\ldots 2.6640044.$$

Les données ne sont ici qu'approchées, mais les résultats sont exacts.

279. L'éq. (3) donne $g = \dfrac{\pi^2 rN^2}{T^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$

On pourra donc trouver par l'expérience du pendule, la valeur de la pesanteur, ou du nombre g, en un lieu déterminé.

On comptera le nombre N d'oscillations que fait un pendule simple connu r, dans un temps donné T, et le calcul fera connaître g. S'il s'agit d'un pendule à secondes de temps moyen, lequel fait une seule oscillation en une seconde, T et N seront 1, et l'on aura

$$g = \pi^2 r. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

C'est ainsi qu'on a trouvé qu'à Paris, on a

$$g = 9^m,808672 \qquad = 30^{pi}, 19546, \; e = \tfrac{1}{2} g t^2,$$

$$\log g = 0.9916103 \ldots\ldots\ldots \; 1.4799416, \quad v = gt.$$

g *est l'accroissement de vitesse d'un corps qui tombe dans le vide pendant une seconde, ou le double de la hauteur de sa chute dans la* 1re *seconde;* e est l'espace décrit en t secoudes, et v la vitesse que le corps a reçue au bout de ce temps.

280. La pesanteur g varie selon les lieux, parce que cette force est la résultante de deux autres dont une seule est constante, savoir la *gravité* G, ou l'attraction qui tend à précipiter les corps au centre de la terre ; l'autre force est *centrifuge* et produite par la rotation diurne, et variable avec les lieux.

Soit C (fig. 94) le centre de la terre ellipsoïdale, point où réside la force attractive de sa masse; M un point dont la latitude est l; NMZ la normale en ce lien, dont le zénith est Z, direction du fil-à-plomb. L'attraction agit selon CM. Mais la rotation diurne de la terre imprime à tous ses points une force centrifuge, qui, en M, agit selon MF, prolongement du rayon OM$=x$, du parallèle à l'équateur décrit par le point M. Cette force centrifuge F est, comme on sait, $F = \frac{v^2}{x}$, v étant la vitesse de rotation de M. La rotation terrestre conserve en tout temps une vitesse constante; mais comme x décroît en allant vers le pôle, aussi bien que v, pour un autre point M, on aurait $F' = \frac{v'^2}{x'}$, et $x : x' :: v : v'$; donc $F : F' :: \frac{v^2}{x} : \frac{v'^2}{x'}$ $:: v : v' :: x : x'$. Ainsi la force centrifuge varie comme les

rayons des circonférences décrites; elle est *maximum* à l'équateur, nulle au pôle, et change avec la latitude. Nommons f la force centrifuge à l'équateur, nous avons

$$F : f :: x : A, \quad F = \frac{f \cos l}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 l)}},$$

à cause de la valeur de x', éq. 4, p. 173.

Or, la pesanteur en un lieu M s'exerçant selon la verticale ZMN, est la résultante de la gravité G qui agit selon le rayon CM, et de la force centrifuge F selon MF. Décomposons ces puissances selon la normale MN et la tangente kMt : les premières composantes se retrancheront l'une de l'autre pour produire la pesanteur g, selon MN; les deux autres, dirigées en Mk et Mt, devront se détruire et seront égales. Ainsi, i étant l'angle CMN de la verticale MN avec le rayon MC (*voy.* n° 178), on a

$$g = G \cos i - F \cos l, \quad G \sin i = F \sin l.$$

Éliminant G, il vient

$$g = F\left(\frac{\sin l}{\tang i} - \cos l\right) = F\left(\frac{1}{e^2 \cos l} - \cos l\right),$$

en remplaçant tang i par sa valeur $e^2 \sin l \cos l$ (*), limitée au 2ᵉ ordre, qui suffit à nos recherches.

281. Substituant pour F sa valeur, et développant.... $(1 - e^2 \sin^2 l)^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$g = f\left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 l + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 l\right)\left(\frac{1}{e^2} - \cos^2 l\right),$$

ou $$g = f\left[\frac{1}{e^2} - 1 + \frac{3}{2} \sin^2 l - \frac{1}{8} e^2 \sin^2 l (4 - 7 \sin^2 l) \ldots\right].$$

(*) En ne prenant que le premier terme de la valeur développée de tang i (p. 174), et remplaçant $\frac{2}{p}$ par e^2 (n° 175), on trouve tang $i = e^2 \sin l \cos l$, aux termes près du 4ᵉ ordre en e.

En négligeant les termes où e^2 est facteur, on a $g=f(H+\frac{3}{2}\sin^2 l)$: ainsi *la pesanteur* g *varie très sensiblement comme le carré du sinus de la latitude : il en est de même de la longueur* r *du pendule à secondes*, puisque $g=\pi^2 r$. On suppose ici les quantités g et r réduites au niveau des mers, comme il sera expliqué ci-après (n° 294).

282. La théorie de l'attraction (*Méc. cél.*, T. II, p. 102) démontre que l'aplatissement du sphéroïde terrestre est lié à la longueur du pendule à secondes. Puisqu'on sait que cette longueur peut être exprimée par la formule $r = A + B\sin^2 l$, on pourrait trouver les constantes A et B en mesurant les longueurs r' et r'' du pendule à secondes sous deux latitudes l' et l'', et l'on aurait deux éq. entre les inconnues A et B :

$$r' = A + B\sin^2 l', \quad r'' = A + B\sin^2 l''.$$

L'élimination donnerait ensuite A et B, et par conséquent la longueur de ce pendule à toute autre latitude l, $r=A+B\sin^2 l$, et la pesanteur g en ce lieu, puisque $g=\pi^2 r = \pi^2(A+B\sin^2 l)$.

283. Mais comme les erreurs d'observations influeraient sur les valeurs des constantes A et B, il faudra répéter les expériences en un grand nombre de lieux, et en déduire autant d'équations entre A et B, qu'on emploiera concurremment à leur détermination, par la méthode des moindres carrés. C'est ce qui est exposé dans notre *Astronomie pratique*, n° 295, un Mémoire de M. Mathieu (*Connaiss. des Tems* de 1816), la *Géodésie* de Puissant, T. II, p. 338, et l'*Astr. physique* de M. Biot, T. III, p. 166. Nous donnerons plus loin les valeurs des constantes des éq.

$$r = A + B\sin^2 l, \quad g = C + D\sin^2 l, \qquad (7)$$

dans lesquelles on a $C = \pi^2 A$, $D = \pi^2 B$. (8)

Comme $l = 0$ donne $r = A$, $g = C$, on voit que A est la longueur du pendule à secondes sous l'équateur, et C la pesanteur en ces lieux ; quand $l = 90°$, on a $r = A+B$, $g = C+D$: ainsi B est l'excès du pendule polaire sur le pendule équato-

rial ; D est l'excès de pesanteur quand on passe de l'équateur au pôle.

284. Il suit de la théorie de l'attraction (n° 34, T. II, *Méc. cél.*) que l'aplatissement terrestre $\frac{1}{p} = \frac{5}{2}$ *du rapport de la force centrifuge sous l'équateur à la pesanteur, moins l'excès* B *de la longueur du pendule polaire sur celle* A *du pendule équatorial, divisé par cette même quantité* A. Et comme la force centrifuge est démontrée être sous l'équateur le 289ᵉ de la pesanteur en ce lieu, on a l'éq.

$$\frac{1}{p} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{289} - \frac{B}{A} = 0,0086505 - \frac{B}{A}; \qquad (9)$$

d'où l'on conclut que l'aplatissement terrestre sera connu, dès que, par des observations du pendule, on aura les valeurs des constantes A et B. C'est ce qui sera calculé plus tard.

285. Réciproquement, si l'aplatissement est connu, l'équation (9) sert à éliminer B de la valeur générale de r, où il ne s'agit plus que de déterminer la constante A, savoir :

$$r = A\left[1 + \left(0,0086505 - \frac{1}{p}\right)\sin^2 l\right].$$

Une seule expérience qui fera connaître r et l, suffira donc pour trouver A, et par suite B, C et D.

Prenons pour exemple le pendule de Borda (p. 256), et l'aplatissement $\frac{1}{p} = \frac{1}{305} = 0,0032787$. D'abord l'éq. ci-dessus devient

$$r = A\,(1 + 0,0053718 \sin^2 l).$$

Or l'expérience a été faite à l'observatoire royal de Paris, où la latitude est 48° 50′ 14″, et à 63ᵐ au-dessus de la mer, on trouve que le rayon terrestre, pour cet aplatissement (p. 194), est R = 6 366 698ᵐ. Et comme il faut réduire la valeur de r

(p. 259) à ce qu'elle serait au niveau des mers, par une théorie que nous exposerons bientôt, on trouve que r se réduit à $0^m,9940234$. On en tire donc ces valeurs

$$A = 0^m,9910062, \quad C = 9^m,780837,$$
$$\log B' = \bar{3}.7261962, \quad \log D = \bar{2}.7204959.$$

Ces résultats diffèrent peu de ceux que nous trouverons plus tard.

Au reste, on trouverait la valeur de A avec plus de sureté, en faisant intervenir, dans le calcul, un grand nombre d'observations du pendule, par la méthode des moindres carrés.

Venons-en maintenant aux procédés suivis pour observer la longueur du pendule et lui faire subir les réductions exigées par les conditions mêmes des expériences.

286. Le pendule simple ne peut avoir qu'une existence théorique, puisqu'il est physiquement impossible de faire osciller un point matériel pesant, à l'extrémité d'un fil inextensible et sans poids, dans un arc infiniment petit et dans le vide. Le pendule est toujours un corps figuré, qui se meut dans l'air à une densité et une température variables, et dans un arc fini. Voyons donc à dégager l'expérience des circonstances qui en altèrent les résultats.

On démontre (*Voy.* ma *Mécanique*, n° 261) que lorsqu'un corps de forme et de nature quelconques oscille autour d'un axe horizontal, parmi les différens points matériels qui le composent, les uns se meuvent plus vite et les autres plus lentement que s'ils étaient isolés et indépendans de la masse : mais il existe un point dont le mouvement n'est nullement altéré par sa liaison aux autres, c.-à-d. qui se meut précisément comme s'il était seul. Ce point, appelé *centre d'oscillation*, est donc un véritable pendule simple ; et l'on peut, par la pensée, supposer que toute la masse du corps y est concentrée. Ce point est situé sur la ligne qui va du centre de gravité perpendiculairement à l'axe de rotation; et il y est au-delà du centre de gravité ou plus bas que ce centre. Quand le corps a

une figure régulière et géométrique, on peut même, par le calcul, déterminer la place du centre d'oscillation : ainsi quand le pendule est une sphère ou une lentille, suspendue à un fil, ou à une ou plusieurs tiges parallèles, on trouve, par la mécanique, la longueur r du pendule simple équivalant au *pendule composé* qu'on a mis en expérience : et cela quels que soient les métaux qui forment ce corps, pourvu que chacun soit homogène et de densité connue. On donnera bientôt le moyen de se rendre indépendant de cette dernière condition.

287. On risquerait beaucoup de se tromper si l'on voulait compter les oscillations une à une, sans parler de l'ennui d'une semblable pratique. Voici comment on opère : on fait d'abord en sorte que le pendule d'épreuve ait une telle longueur qu'il accomplisse les oscillations dans un temps peu différent d'une seconde. On dispose en arrière une horloge parfaitement réglée et à compensation, qui marque le temps moyen avec une précision presque rigoureuse, ou du moins dont la marche régulière soit assez connue, pour qu'on sache combien son pendule fait d'oscillations en 24 heures moyennes. La lentille est vernie en noir, et porte au centre une mouche blanche en papier.

Les deux appareils sont disposés l'un en avant de l'autre, de manière que quand les deux pendules se trouveront ensemble dans la verticale, la mouche soit cachée par un index que porte le pendule d'épreuve. On dispose à quelques mètres en avant une lunette, qui permet à l'observateur de reconnaître cette coïncidence.

On met le pendule d'épreuve en mouvement dans le même sens que celui de l'horloge, et l'on se rend attentif à l'instant où, retombant ensemble dans la verticale, la coïncidence a lieu. On note l'heure, la minute et la seconde que marque alors l'horloge. Comme les pendules marchent presque ensemble, ils ne paraissent se séparer qu'après quelqnes secondes : on prend pour le moment de la coïncidence, la moyenne entre les instans où on la voit commencer et finir.

L'un des deux pendules devance l'autre de plus en plus, et bientôt atteint sa limite d'excursion d'un côté, quand le 2e mobile atteint la sienne du côté opposé : ils marchent ensuite en sens contraire ; et quand ils retombent ensemble dans la verticale, l'un des pendules a fait une oscillation de plus que l'autre. On ne tient pas compte de cette observation, qui serait trop difficile à faire avec précision, à cause des vitesses en sens contraires. En laissant continuer l'expérience, il arrive un moment où une nouvelle coïncidence se produit, les pendules allant dans le même sens. On note l'heure, comme la 1re fois ; alors l'un des pendules a gagné deux oscillations sur l'autre.

Ainsi l'horloge a fait n oscillations, et le pendule d'épreuve $n \pm 2$ dans le même temps ; on fera donc cette proportion

si n *oscil. répondent à* n $\pm$ 2, 86400 *répondent à* $\dfrac{86400(n+2)}{n}$.

Telle est la quantité N d'oscillations du pendule d'épreuve, pendant que l'horloge marque 24^h (en supposant qu'elle marche comme le temps moyen) : et si l'horloge avance de i secondes en 24^h,

$$N = \frac{n \pm 2}{n}(86400 + i)$$

est le nombre d'oscillations du pendule d'épreuve en un jour de temps moyen. On fait i négatif dans le cas d'un retard.

Supposons que la coïncidence ait lieu à 1′ 17″ et à 9′ 40″ ; il y a 503″ écoulées : pendant ce temps le pendule d'épreuve fait 501 excursions, et si l'horloge retarde de 4″5 en 24^h, on trouve que ce pendule, dans cette durée, fait 86051,98 oscillations.

L'expérience doit être continuée en notant les heures précises des coïncidences ; et l'on en conclut d'autres résultats peu différens du précédent. Après avoir fait les corrections dont on va parler pour l'amplitude des arcs, la réduction au vide, etc., on prend une moyenne, et l'on obtient enfin le nombre d'oscillations du pendule simple dans le vide, en un jour moyen.

Il ne faut pas que la marche du pendule d'épreuve soit beau-

coup plus lente ou plus rapide que celui de l'horloge ; on évalue à 53o″ la plus grande durée entre les coïncidences. Comme les résistances diminuent beaucoup les arcs d'oscillation, on ne laisse durer l'expérience que 34 à 40 minutes sans l'interrompre (5 coïucidences). On a vu des pendules osciller encore après 30 heures d'observation, sans aucune force réparatrice des pertes, quoique l'excursion ne fût pas de plus de 2 degrés dans l'origine. Mais il est tout-à-fait inutile de pousser très loin l'expérience; l'excursion devient petite et lente, et il est difficile de saisir la coïncidence.

288. Voyons à réduire les oscillations à être infiniment petites. Soit φ (fig. 91) le demi-arc décrit par le pendule dans son excursion; $b = \text{AD}$; on a $\text{OD} = r - b = r\cos\varphi$, d'où $b = r(1 - \cos\varphi) = 2r\sin^2\frac{1}{2}\varphi$. Ainsi l'éq. (1) devient

$$t = \pi\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{2}\varphi\right).$$

Désignons par θ le temps que le même pendule emploie à faire une oscillation infiniment petite, $\theta = \pi\sqrt{\left(\frac{r}{g}\right)}$; on en conclut que

$$t = \theta.(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi).$$

L'observation fait connaître t et φ; on a donc θ.

Ou plutôt, n étant le nombre d'oscillations finies faites par le pendule, dans l'arc 2φ, et n' étant le nombre d'oscillations infiniment petites pendant le même temps, comme φ est un petit arc, on a $\sin^2\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}\sin^2\varphi$, et

$$n' = n(1 + \tfrac{1}{16}\sin^2\varphi). \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

Ainsi, après avoir mesuré l'arc d'excursion 2φ d'un pendule, et compté le nombre d'oscillations accomplies dans un temps quelconque, et par suite celui n qu'il fait dans la durée des 24^h, cette formule servira à calculer n', c.-à-d. combien le pendule en exécute d'infiniment petites dans le même temps.

On voit qu'il ne s'agit que d'ajouter à n la quantité $\frac{1}{16}\, n \sin^2 \phi$.

Chaque période de coïncidence ne durant guère plus de dix minutes, l'excursion totale 2ϕ se conserve entière : mais si l'on remarquait qu'elle fût 2ϕ en commençant et $2\phi'$ à la fin, et que ces deux arcs fussent peu différens, on supposerait l'excursion constante, et l'on prendrait $\frac{1}{2}(\phi+\phi')$ au lieu de ϕ.

Si l'expérience a quelque durée, les résistances diminuent continuellement les excursions du pendule, et même on reconnaît qu'elles décroissent en progression géométrique : elles sont donc successivement $\phi, \frac{\phi}{q}, \frac{\phi}{q^2}, \ldots \frac{\phi}{q^{n-1}}$, $\frac{1}{q}$ étant la raison de cette progression. La formule que Borda a donnée pour calculer les effets de ce décroissement a été démontrée par M. Mathieu (*Connaissance des Tems*, 1826).

La durée de chaque oscillation étant un peu plus longue que si l'arc était infiniment petit, le nombre total, après un temps donné, serait n, dans ce premier cas, et dans le 2ᵉ il serait accru de $\frac{1}{16}\, n\, \phi^2$, en remplaçant le sinus par l'arc, et supposant ϕ constant. Appliquons cette correction aux oscillations 1ʳᵉ, 2ᵉ, 3ᵉ... nᵉ, successivement : la correction totale sera

$$S=\frac{1}{16}\left(\phi^2+\frac{\phi^2}{q^2}+\frac{\phi^2}{q^4}+\ldots\frac{\phi^2}{q^{2n-2}}\right)=\frac{\phi^2}{16}\cdot\frac{q^{2n}-1}{(q^2-1)\cdot q^{2n-2}}.$$

L'observation donne les excursions terminales ϕ et ϕ' ; q est inconnu, et il faut l'éliminer à l'aide de

$$\phi'=\frac{\phi}{q^{n-1}},\quad \text{ou}\quad q^{n-1}=\frac{\phi}{\phi'}\ldots\ldots\quad (A)$$

le carré $\phi'^2 q^{2n-2}=\phi^2$ donne d'abord

$$S=\frac{\phi^2}{16}\left(\frac{\frac{q^2\phi^2}{\phi'^2}-1}{(q^2-1)\frac{\phi^2}{\phi'^2}}\right)=\frac{q^2\phi^2-\phi'^2}{16\,(q^2-1)}.$$

Or, (p. 36), $10^z=1+kz+\frac{1}{2}k^2z^2\ldots$ Si z est le log. de

q^2, $z = 2 \log q$, et qu'on se borne aux 1res puissances de z, attendu que deux excursions successives du pendule sont presque égales, et q très voisin de 1, d'où $\log q$ très petit; on a

$$\text{io}^2 = q^2 = 1 + 2\,k \log q,$$

$$S = \frac{(1 + 2\,k \log q)\,\varphi^2 - \varphi'^2}{32\,k \log q} = \frac{M\,(\varphi^2 - \varphi'^2)}{32 \log q} + \frac{\varphi^2}{16},$$

M étant le module qui $= \frac{1}{k}$ (p. 36). Comme on a d'ailleurs $(n - 1) \log q = \log \varphi - \log \varphi'$, on trouve

$$S = \frac{M\,(n-1)\,(\varphi^2 - \varphi'^2)}{32\,(\log \varphi - \log \varphi')} + \frac{\varphi^2}{16}.$$

Or, $\frac{1}{16}\varphi^2$ est la correction de la 1re oscillation; donc le 1er terme est celle des $n - 1$ suivantes : changeons-y $n - 1$ en n, et ce terme comprendra toutes les corrections. De plus, pour la commodité des calculs, nous remettrons les sinus pour les arcs, et nous aurons enfin

$$S = \frac{Mn}{32} \cdot \frac{\sin(\varphi + \varphi') \sin(\varphi - \varphi')}{\log \sin \varphi - \log \sin \varphi'}.$$

Telle est la *correction d'amplitude*, ou la petite quantité qu'il faut ajouter au nombre n d'oscillations dans des arcs finis décroissans de φ à φ', pour avoir le nombre d'oscillations infiniment petites correspondantes.

Par ex., si l'on a compté 9016,695 oscillations, et si les arcs ont été

$\varphi = 3°\ 7'19''$, $\quad \varphi + \varphi' = 3°57'31''$........, sin........ $\bar{2}.83907$
$\varphi' = 0.50.12$, $\quad \varphi - \varphi' = 2.17.\ 7$........ sin........ $\bar{2}.60070$

sin φ... $\bar{2}.73609$ $\qquad$ $\frac{1}{32}$ M........ $\bar{2}.13263$
sin φ' — $\bar{2}.16441$ $\qquad$ 9016,7...... 3.95506
dén. $= 0.57168$ log $= \bar{1}.75715$ $\qquad$ num......... $\bar{1}.52746$
dénom....... $\bar{1}.75715$
0,589........ $\bar{1}.77031$.

Ainsi la correction est 0,589, et le nombre des oscillations dans des arcs infiniment petits est 9017,284.

289. L'éq. (3) donne le temps T qu'un pendule simple met à faire N oscillations; mais si ce corps est ramené à la température zéro, au lieu d'avoir r, il a r' pour longueur, et fait alors N' oscillations dans le même temps T. Ainsi

$$T = N\pi\sqrt{\frac{r}{g}},\quad T = N'\pi\sqrt{\frac{r'}{g}},\quad N' = N\sqrt{\frac{r}{r'}}.$$

Soit α la dilatation linéaire du pendule pour un degré centigrade (voy. p. 125), la longueur r' deviendr $r'\alpha t$ pour t degrés, et l'on aura $r = r' + r'\alpha t$, d'où $N' = N\sqrt{(1+\alpha t)}$. En développant et se bornant au 1er ordre, attendu que α est très petit, on trouve pour la correction qui ramène N à des oscillations sous une température plus basse de t degrés

$$N' = N\,(1 + \tfrac{1}{2}\,\alpha t)$$

290. La théorie démontre que la résistance de l'air retarde la descente du pendule ce qui accroît la durée de la demi-oscillation. Mais la même cause s'oppose aussi à l'ascension, dont elle diminue la durée d'une égale quantité. Ainsi l'oscillation s'accomplit dans le même temps que si elle se faisait dans le vide : seulement l'étendue des excursions décroît sans cesse. Mais d'un autre côté le poids du mobile est diminué dans l'air, du poids d'un volume d'air égal au sien. Il faut donc corriger la valeur de g qui entre dans nos formules.

Soit g' la pesanteur dans le milieu où l'on se trouve, et p' le poids du pendule dans ce milieu : g la pesanteur et p le poids du mobile dans le vide, enfin m la masse de ce corps. On a

$$p' = g'm,\quad p = gm,\quad p'g = pg',\quad g' = \frac{p'g}{p}.$$

Telle est la valeur qu'il faut prendre pour g dans nos éq. Ces formules donnent pour la longueur r du pendule à secondes, en fonction de la durée ou du nombre de ses oscillations infiniment petites, des expressions de la forme $r = gK$, qui deviennent ainsi

$$r' = g'K = \frac{p'g}{p}K = \frac{p'r}{p},$$

r étant la longueur du pendule r' réduite au vide.

291. Soit v le volume du pendule, δ et δ' les poids spécifiques de l'air aux températures centigrades o et x, sous les pressions $0^m,76$ et h. Les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, relatives aux densités des gaz, apprennent que sous la pression h mètres de la colonne de mercure, et sous la température x, la densité de l'air qui était δ à o degrés et à $0^m,76$, devient

$$\delta' = \frac{\delta h}{0,76\,(1+mx)},$$

en faisant $m = 0,00375$. Ainsi le volume d'air v pèse $\delta' v$ dans les circonstances données, et le poids p' du pendule dans l'air, devient dans le vide $p = p' + \delta' v$, d'où $p' = p - \delta' v$. Donc

$$\frac{r'}{r} = \frac{p - \delta' v}{p} = 1 - \frac{\delta' v}{p},$$

d'où

$$r = r' \times \left(1 - \frac{\delta' v}{p}\right)^{-1} = r' + \frac{r'\delta' v}{p}.$$

Rapportons les poids spécifiques à celui de l'air qui est à 0° et 0^m76 pris pour unité. Le volume d'air qui pèse 1 dans ces circonstances, est le même que celui de la matière dont est formé le pendule qui pèse π; on a $\frac{\delta v}{p} = \frac{1}{\pi}$; ainsi

$$r = r' + \frac{r'h}{0,76\pi\,(1+mx)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Telle est la formule qui indique de combien il faut augmenter la longueur d'un pendule r' oscillant dans l'air, pour la changer en celle d'un pendule oscillant dans le vide.

292. On préfère souvent, pour combiner plus facilement les résultats, calculer le changement que produit, dans le nombre des oscillations du pendule, la diminution de poids causée par la présence de l'air. Voici comment on s'y prend.

Le pendule va plus vite dans le vide que dans l'air, et dans un temps t, il fait plus d'oscillations, puisqu'il pèse plus. Soient n le nombre d'oscillations dans l'air, et n' dans le vide,

pendant la durée t, g et g' les intensités correspondantes de la pesanteur; les temps d'une demi-oscillation infiniment petite sont respectivement $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ et $\pi\sqrt{\frac{r}{g'}}$; ainsi l'on a dans le même temps t,

$$t = n\sqrt{\frac{r}{g}} = n'\pi\sqrt{\frac{r}{g'}},$$

d'où
$$n' = n\sqrt{\frac{g'}{g}}.$$

Si v est le volume du pendule, D sa densité, δ celle de l'air, dans les circonstances où l'on opère; les forces g' et g étant entre elles comme les poids du pendule dans le vide et dans l'air, o na

$$\frac{g'}{g} = \frac{v\text{D}}{v(\text{D}-\delta)} = 1 + \frac{\delta}{\text{D}-\delta}.$$

En substituant ci-dessus, il vient

$$n' = n\sqrt{\left(1 + \frac{\delta}{\text{D}-\delta}\right)} = n\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta}{\text{D}-\delta}\right),$$

en se bornant au 1er ordre qui suffit ici, parce que δ est très petit par rapport à D. Donc *la réduction au vide est*

$$\frac{1}{2}n \cdot \frac{\delta}{\text{D}-\delta}.$$

C'est la quantité qu'il faut ajouter au nombre n d'oscillations dans l'air pour avoir celui n' des oscillations dans le vide, pendant le même temps.

Désignons, comme ci-devant, par h la hauteur du baromètre réduite à la température zéro, par x la température centigrade de l'air lors de l'expérience : la densité de l'air sera donnée par la valeur ci-dessus, δ étant sa densité à zéro et $0^{\text{m}},76$; ainsi la réduction au vide est

$$\frac{1}{2}n\frac{\delta}{\text{D}-\delta} \cdot \frac{h}{0^{\text{m}},76\,(1+mx)}.$$

Comme $\delta = \frac{1}{770}$ de la densité de l'eau dans les mêmes conditions en évaluant D par comparaison avec ce liquide, multipliant haut et bas par 770, la *réduction au vide* est donc

$$\frac{1}{2} n \left(\frac{1}{770\,D - 1}\right) \cdot \frac{h}{0^m,76\,(1 + mx)} \ldots\ldots \quad (12)$$

On calculera donc cette expression en prenant pour D la densité du pendule comparée à celle de l'eau à zéro : on ajoutera à n le nombre donné par cette formule, et l'on aura le nombre n' d'oscillations qui seraient faites dans le vide, par le même pendule, dans la même durée que n.

Par ex. un pendule en cuivre dont la densité est D$=8,287$ fait 90173,6 oscillations infiniment petites dans l'air à $12°,66 = x$, d'où $770\,D - 1 = 6380$; le baromètre est à $0^m,75146$, d'où

n	4.9550794	6380	3.8048207
h	$\bar{1}$.8759059	$0^m,76$	$\bar{1}$.8808136
numér.	4.8309853	2	0.3010300
dénom.	—4.0068183	1,0475	0.0201540
	0.8241670	dénom.	4.0068183

réduction $= 6,671$; ajoutant à n, on a $n' = 90180,27$.

C'est le nombre d'oscillations dans le vide faites en 24^h moy.

Nous ne devons pas dissimuler que cette théorie conduit à des résultats qu'on ne trouve pas conformes aux faits observés. M. Bessel a le premier signalé ce désaccord, et même il en a expliqué la cause. Le pendule contracte une adhérence avec l'air qui touche sa surface, et une couche de cet air est entraînée par ce corps dans ses oscillations : la masse du pendule, et son moment d'inertie en sont changés, et la formule (12) manque d'exactitude. Ce savant trouve même que la couche d'air adhérent varie avec la figure et la substance du pendule, et qu'on ne peut nullement en calculer l'influence. Pour réduire les oscillations au vide, il propose de rempla-

cer la correction (12) par la formule $\frac{Ch}{1+mx}$, C étant une quantité variable avec les pendules, et dont on devra déterminer la valeur pour chaque corps oscillant. A cet effet, on fera mouvoir le pendule dans l'air, puis dans le vide, et comptant les oscillations dans les deux cas, on déterminera combien il y en a de plus en 24^h, dans l'un des cas que dans l'autre : ce sera la correction dont on a donné ci-dessus l'expression algébrique; et comme les conditions de l'expérience ont fait connaître h et x, on en tirera la valeur de C : ce sera celle qu'on devra attribuer à ce coefficient dans toutes les expériences qu'on fera avec le même pendule, lorsqu'on voudra les réduire au vide. M. Bessel a reconnu que le facteur C peut donner une correction double de celle qu'indique l'expression (12). (*Voy.* un *Mémoire de M. Baily, Trans. Philos.* 1832.).

293. Il suit de cet exposé que voici la succession d'expériences et de corrections qu'exige la détermination qui nous occupe.

On fait osciller librement un pendule dans une cage de verre, où l'on mesure la température et la pression barométrique. Si ces données varient dans la courte durée de l'observation, on les suppose constantes, en prenant la valeur moyenne. On en fait autant de l'arc d'excursion du pendule. En comparant le mobile à une horloge dont la marche sur le temps moyen est bien régulière et bien connue, on juge, par l'intervalle entre les coïncidences des deux pendules, du nombre *n* d'oscillations effectuées en 24^h moyennes par le pendule d'épreuve ; et il s'agit de réduire ce nombre, à la température $0°$, à des vibrations infiniment petites et au vide. Les éq. précédentes indiquent les corrections que doit éprouver *n* pour ramener ce nombre à cet état hypothétique. On connaît ainsi quel est le nombre d'oscillations que ferait le pendule en 24^h moyennes dans le vide, si ses excursions étaient infiniment petites : il ne reste plus qu'à trouver la distance entre

les centres de suspension et d'oscillation pour avoir les élémens du problème relatif à la figure de la terre.

294. Il y a encore une considération qu'il ne faut pas négliger. Comme la pesanteur décroît à mesure qu'on s'élève au-dessus du sol, c'est toujours au niveau des mers que les expériences doivent êtres faites, ou réduites. Cette réduction se fait par le calcul suivant.

Soient g et g' la pesanteur au niveau des mers, et à une élévation h au-dessus de ce niveau : comme la pesanteur varie en raison inverse des carrés des distances au centre de la terre, on a la proportion (où R est le rayon du sphéroïde)

$$g : g' :: (R+h)^2 : R^2.$$

Ainsi $$g' = g\left(1+\frac{h}{R}\right)^{-2} = g\left(1-\frac{2h}{R}\right), \ldots \quad (12)$$

en négligeant le 2ᵉ ordre de h, qui est toujours excessivement petit par rapport à R. Réciproquement

$$g = g'\left(1+\frac{2h}{R}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

donne la pesanteur g au niveau des mers, quand on la connaît sur une sommité. Ainsi les durées d'une oscillation infiniment petite sont $\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$ au niveau de la mer, et $\pi\sqrt{\frac{r}{g'}}$ à la station. Les nombres correspondans N et N' d'oscillations dans le même temps t, sont donc

$$t = N\pi\sqrt{\frac{r}{g}} = N'\pi\sqrt{\frac{r}{g'}}, \quad N = N'\sqrt{\frac{g}{g'}},$$

et comme $$\sqrt{\frac{g}{g'}} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R},$$

on a $$N = N'\left(1+\frac{h}{R}\right).$$

$$\textit{Réduction au niveau de la mer} = \frac{N'h}{R} \ldots \quad (14)$$

C'est ce qu'il faut ajouter au nombre d'oscillations observées pour trouver combien le même pendule en accomplirait au niveau des mers dans les mêmes circonstances.

Et si le pendule r au niveau des mers est *synchrone* avec le pendule r' sur une sommité, c.-à-d. fait des oscillations de même durée, l'éq. (4) $rN^2 = r'N'^2$ devient $rN'^2\left(1+\frac{h}{R}\right)^2 = r'N'^2$, d'où

$$r\left(1+\frac{2h}{R}\right) = r', \quad r = r'\left(1-\frac{2h}{R}\right)\ldots \quad (15)$$

Ainsi l'on peut toujours calculer la longueur r du pendule synchrone, au niveau des mers, quand on connaît celle r' sur une sommité, et réciproquement.

Le Dr Young dans les *Trans. phil.* de 1819, considérant l'attraction des couches terrestres sur le pendule, introduit dans la formule (14) un facteur qu'il estime de 0,50 à 0,75. M. Baily le fait de 0,666. Ce sujet mérite d'être examiné avec plus d'attention. Il existe encore une cause d'incertitude sur l'influence des couteaux de suspension. Les petites corrections qu'appellent ces circonstances sont encore dans le vague.

Il nous reste à dire comment on trouve la longueur r d'un pendule mis en expérience. Sans doute, lorsque la forme en est géométrique, on peut facilement recourir aux formules de la Mécanique, pour assigner la position du centre d'oscillation. Ainsi la distance entre ce centre et la suspension est un simple résultat de calcul.

Mais comme les pendules sont souvent d'une forme très composée, que d'ailleurs les métaux dont on les fait sont rarement homogènes, on ne peut guère se fier à ce procédé pour déterminer une distance que la plus petite cause d'erreur peut altérer au point de jeter du doute sur les résultats. Ainsi on a dû renoncer le plus souvent à ce procédé.

296. *Pendule de Borda.* Cet appareil consiste en une sphère de platine pesant environ 5,2 hectogr. suspendue à un fil de métal très délié d'à peu près 4 mètres de long, et battant presque la double-seconde. La densité du platine étant très grande,

les pertes dues à la résistance de l'air sont faibles, et le mouvement oscillatoire se conserve très long-temps. La correction due au poids du fil, sur le lieu du centre d'oscillation est à peine sensible. Une calotte mince en métal, de même rayon que la sphère, adhère à la surface de celle-ci, par simple juxta-position, à l'aide d'une légère couche grasse qu'on interpose. Le fil tient au sommet de la calotte par une vis de pression. Comme on peut changer la calotte de place sur la boule, par la réitération des expériences, on se rend indépendant du défaut d'homogénéité du métal. On prend le fil très fin pour diminuer la résistance de l'air, et l'on n'y emploie pas le fer, pour éviter les attractions magnétiques. On pèse une grande longueur de ce fil, et l'on en conclut le poids et le diamètre de la partie qu'on a mise en expérience.

La suspension se fait par un prisme triangulaire en acier, dont la tranche, ou *couteau*, pose sur un plan d'agate, qu'on a rendu très solide, et qu'on a mis exactement horizontal, à l'aide d'un niveau à bulle d'air. Le support est fortement scellé dans la muraille. On donne à ce prisme d'acier la forme qui rapproche le plus possible son centre de gravité de l'arête servant de couteau ; et l'on fait en sorte que son centre d'oscillation soit tellement disposé, que la durée de ses excursions soit à peu près la même que celle du pendule même, afin que les mouvemens de celui-ci n'en soient pas influencés.

Un arc gradué qu'on fixe vers le bas du fil, et dont le centre est sur le couteau, sert à mesurer l'arc 2ϕ d'excursion.

Lorsqu'on a compté le nombre d'oscillations accomplies dans la durée des deux coïncidences, pour en déduire ce nombre en 24 h. moy., on fait les réductions dont nous avons parlé, pour obtenir le nombre d'oscillations infiniment petites, dans le vide, pendant le même temps. Il reste à mesurer la longueur du pendule.

297. L'appareil est pourvu d'un plan d'acier horizontal, qui est mobile de bas en haut, par degrés insensibles, à l'aide

d'une vis de rappel. On met le pendule en repos, on élève ce plan jusqu'à ce qu'il touche la boule, sans la soulever. Puis, avec le *comparateur,* on évalue avec une extrême précision, la distance D de ce plan au couteau de suspension. Si cette mesure est prise à une température différente de celle de l'expérience, on la réduit à celle-ci; comme aussi l'étalon du comparateur, qui a dû lui-même être divisé à une autre température (ordinairement à zéro). Ce calcul se fait par la théorie du n° 130.

Si de D on retranche le rayon ρ de la sphère, $D-\rho$ est la distance de son centre au plan de suspension. Le centre d'oscillation de cette sphère est, comme on sait, au-dessous de ce point de la quantité $\frac{2\rho^2}{5(D-\rho)}$. Ainsi, en ne considérant que la boule, le centre d'oscillation a pour distance au couteau $l = D-\rho+\frac{2\rho^2}{5(D-\rho)}$: mais le poids du fil et celui de la calotte ne doivent pas être négligés, ce qui apporte une petite correction à cette longueur du pendule simple synchrone. Le centre de gravité de la calotte étant fort près de sa surface se confond sensiblement avec son centre d'oscillation. Ce centre est pour le fil, qui est un cylindre, ou plutôt une ligne droite pesante de longueur λ, son moment d'inertie par rapport au milieu, qui en est le centre de gravité, est $\frac{1}{24}\lambda^3$, et la distance de son centre d'oscillation à l'axe est... $l'' = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{12}\lambda^2$.

Or, on sait (*voy.* ma *Mécanique*, n° 364) que si trois poids P, P′, P″, liés ensemble, oscillent autour d'un axe horizontal, leurs centres de gravité respectifs étant aux distances respectives h, h', h'' de cet axe, et leurs centres d'oscillation aux distances l, l', l'', la distance du centre d'oscillation du système au même axe, est

$$L = \frac{Phl + P'h'l' + P''h''l''}{Ph + P'h' + P''h''} = l - \frac{\frac{P'h'}{Ph}(l-l') + \frac{P''h''}{Ph}(l-l'')}{1 + \frac{P'h'}{Ph} + \frac{P''h''}{Ph}}.$$

Ce 2ᵉ terme est la petite correction que doit subir la longueur l propre au centre d'oscillation de la sphère, pour avoir égard à la calotte et au fil de suspension. On fait $l' = D - 2\rho$, $l'' = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{12}\lambda^2$.

298. *Pendule invariable.* Les petites incertitudes et les soins multipliés qui doivent accompagner les mesures et les calculs, ont fait préférer au pendule de Borda, un corps fondu d'un seul jet sous une forme très simple, tel qu'une règle quadrangulaire et mince, à l'un des bouts de laquelle on fixe le couteau de suspension. Ce corps d'un usage et d'un transport facile, offre beaucoup de facilité aux observations et aux calculs. Mais M. de Prony l'a perfectionné en lui donnant deux axes de suspension réciproques l'un de l'autre. (*Voy.* fig. 96.)

On connaît cette propriété du pendule composé, que les centres d'oscillation et de suspension sont réciproques; c.-à-d. que si l'on fixe des couteaux à ces deux points, la durée des oscillations sera la même exactement, que l'on prenne l'un ou l'autre pour axe de rotation. Cela a lieu quelle que soit la figure et les substances qui composent le pendule. C'est le *pendule invariable réciproque* qui a servi à faire les belles observations les plus récentes.

Ainsi l'on fait fondre d'un seul jet, on écrouit et l'on répare une règle de cuivre, et l'on y fixe, vers l'un des bouts, un couteau en acier. Puis au centre d'oscillation, on en adapte un semblable; un petit mouvement ménagé à ce dernier couteau permet de lui assigner, par des expériences, la place nécessaire pour la réciprocité de ces deux axes de suspension. On conçoit que rien n'est plus aisé que de mesurer exactement l'intervalle des couteaux, qui est la distance des centres de suspension et d'oscillation.

299. Maintenant que nous savons trouver la longueur du pendule simple à secondes, dans le vide, à oscillations infiniment petites, en un lieu quelconque, et réduit au niveau des mers, appliquons les nombreuses expériences qu'on a faites à la recherche des constantes des éq. (7) et (8) et de l'aplatisse-

ment de la terre. Les plus exactes de ces expériences sont rapportées dans la table VI, à la fin de l'ouvrage, extraite d'un travail étendu que M. Saigey a inséré dans le *Bulletin mathém.* de M. Férussac, p. 32, T. VII.

La 1[re] page contient les lieux d'observation, leur altitude ou l'élévation au-dessus de la mer, la latitude, la longitude, enfin les noms des observateurs; la 2[e] page donne les longueurs du pendule simple à secondes réduit au vide et à des oscillations infiniment petites; la colonne suivante, la réduction au niveau des mers; puis celle qui vient après, le résultat du calcul donné par la formule générale que nous allons exposer.

Enfin la dernière colonne M indique le nombre de secondes de temps moyen dont le pendule observé avance ou retarde en 24 h. moy. sur le pendule calculé.

Quant à la réduction au niveau des mers, elle n'a point été faite par les formules qui ont été données ci-devant, mais par celle du cap. Kater (*Trans. phil.* 1819). Ce savant veut qu'on tienne compte de l'attraction de la couche terrestre comprise entre la station et le niveau de la mer, ce qui le conduit à cette formule de *réduction*

$$\alpha hr(1 + \zeta \sin^2 l).$$

h est l'altitude, r le pendule, l la latitude du lieu, α et ζ des coeff. constans $\log \alpha = \bar{7}.4971679$, $\log \zeta = \bar{3}.4923028$.

Les résultats numériques obtenus par les savans anglais ont été ramenés aux mesures françaises en prenant le mètre $= 39,37079$ pouces anglais (*Transac. phil.*, 1818) et la longitude de Greenwich 2° 20′ 24″ à l'ouest du méridien de Paris.

300. M. Saigey a traité tous les nombres précédens par la méthode des moindres carrés, et est arrivé aux conséquences suivantes.

La longueur r *du pendule simple à secondes sexagésimales de temps moyen dans le vide, par oscillations infiniment petites, réduit au niveau de la mer, et la pesanteur* g, *en un lieu*

quelconque dont la latitude est $\mathfrak{l}$, sont donnés par les éq. suivantes

$$r = A + B\sin^2 l, \qquad g = C + D\sin^2 l,$$

en (*) mètres $\begin{cases} A = 0^m{,}99102557, & \log B = \bar{3}.7061690, \\ C = 9^m{,}781097; & \log D = \bar{2}.6994687, \end{cases}$

en pieds. $\begin{cases} A = 3^{pi}{,}050817, & \log B = \bar{2}.1935003, \\ C = 30^{pi}{,}11035; & \log D = \bar{1}.1878000. \end{cases}$

Donc *pendule à l'équateur* $= 0^m{,}99102557 = A,$
pendule au pôle $= 0^m{,}99609745 = A + B,$

gravité, ou force d'attraction au pôle $= 9^m{,}831089 = C + D$

pesanteur à l'équateur $= 9^m{,}781097 = C$

et puisque

force centrifuge à l'équateur $= 0{,}0339097,$

en admettant, avec Delambre, que le rayon équatorial... $= 6\,376\,984^m$, et que le jour sidéral soit composé de $86164''$ de temps moyen; on a

gravité, ou force d'attraction à l'équateur $= 9^m 814939$.

Rapport de la force centrifuge, sous l'équateur à la force d'attraction $= \dfrac{1}{289{,}44}$.

D'après le théorème de Clairaut (éq. 9, p. 156, n° 184)

$$\frac{1}{p} = \frac{5}{2}\cdot\frac{0{,}0339097}{9{,}781029} - \frac{0{,}00507188}{0{,}99102557}$$
$$= 0{,}0086672o4$$
$$- 0{,}0051178 10,$$
$$\frac{1}{p} = \frac{1}{282} \text{ à peu près.}$$

(*) On trouve dans le *Philos. magaz.*, décembre 1322, p. 123, sept à neuf expériences du capitaine Leutke, qui conduisent à un résultat un peu différent de celui-ci.

Telle est donc la valeur de l'aplatissement donnée par les nombreuses expériences du pendule. Alors en prenant

rayon équatorial $= 6\,376\,984^m = 1432$ lieues,
le rayon polaire est $= 6\,354\,349^m = 1427$ lieues,

ce qui donne l'aplatissement de $22\,635^m = 5$ lieues.

301. Pour trouver la longueur du pendule en un lieu désigné, on emploiera la formule ci-dessus, qui repose sur les observations les plus certaines : et bien que l'aplatissement soit un peu trop fort pour l'usage de la Géodésie, qui doit préférer $p = 309{,}65$, ou de l'Astronomie, où p est 305, cependant on devra prendre $p = 282$, quand il s'agira du pendule. Mais après avoir appliqué ces éq., on n'aura pas encore la longueur demandée, et il faudra faire les corrections inverses dues à l'altitude du sol, et à ce que les oscillations ne sont ni infiniment petites, ni dans le vide.

302. On peut remplacer dans nos éq. $\sin^2 l$ par $\frac{1}{2}(1 - \cos 2l)$, et l'on a

$$r = 0^m{,}99356151 - \tfrac{1}{2} B \cos 2l,$$
$$g = 9^m{,}806055 \quad - \tfrac{1}{2} D \cos 2l.$$

303. Plusieurs savants ont cherché par expérience la longueur du pendule à Paris ; ils ont trouvé

$0^m{,}994$ par Picard,
0,99393.... Godin,
0,99418.... Bouguer,
0,99403.... Mairan,
0,993896... Borda,
0,9942..... Richer et Huyghens,
0,993877... Sabine et Whiterust,
0,993915... Biot et Mathieu,
0,993998... Kater et Sabine,
0,993781... Bessel et Müffling.

304. On avait présumé que les deux hémisphères boréal et austral ne sont pas symétriques. On a donc calculé à part l'aplatissement qui résulte des observations du pendule dans les

régions australes, et l'on a trouvé $p = 311,6$, valeur aussi voisine qu'on peut l'espérer de $p = 305$. Il n'y a donc pas lieu d'admettre un aplatissement différent pour les deux pôles; et si l'on considère que les erreurs d'observations du pendule se reportent fortement sur la valeur de p, et que les attractions locales doivent exercer une grande influence, on est fondé à conserver l'aplatissement $\frac{1}{305}$ que donne la théorie de la Lune, et que confirment souvent les opérations géodésiques.

305. Si un pendule de longueur R fait $(N + n)$ oscillations, réduites au vide et à l'infiniment petit, et qu'on veuille que, dans le même temps, il n'en accomplisse que N, il faut porter sa longueur à r, en se conformant à l'éq. (4) qui devient

$$rN^2 = R(N + n)^2,$$

d'où
$$r - R = R\left(\frac{2n}{N} + \frac{n^2}{N^2}\right) \ldots \quad (16)$$

Telle est la correction qu'on doit faire subir à un pendule pour lui faire battre la seconde de temps moyen, lorsqu'il avance sur ce temps, et qu'il l'indique à peu près. Par ex., on trouve qu'il faut allonger le pendule de $0^{mm},023$ pour chaque seconde d'avance diurne. On néglige toujours les n^2, qui sont insensibles. Dans le cas d'un retard, il faut au contraire accourcir d'autant le pendule.

M. Poisson a examiné, par l'analyse, l'influence de la résistance de l'air et de l'extensibilité infiniment petite du fil de suspension; et comme il a trouvé que l'effet en était insensible, nous ne nous en sommes pas occupé. Il en faut dire autant d'un mouvement de rotation que la boule peut prendre sur le fil de suspension.

306. Dubuat, par une série de belles expériences, et depuis lui, dans les derniers temps, M. Bessel, ont prouvé que la perte de poids que la présence de l'air faisait éprouver au pendule était soumise à une correction trop faible, en se servant de l'éq. (12). M. Bessel a reconnu qu'une couche no-

table d'air reste adhérente au mobile, accroît le volume, diminue la densité moyenne, et augmente le moment d'inertie. En sorte qu'il faudrait, selon ce savant, multiplier le 2ᵉ membre de l'éq. (12) par un coefficient qu'il évalue, par sa théorie et ses expériences, à 1,946, et à 1,625. (*Acad. Berlin*, 1826).

Dans les *Transactions philosophiques* de 1832, M. Baily fait l'examen d'une multitude d'expériences qu'il a suivies, dans le vide et dans l'air, sur environ 80 pendules, de formes et de natures différentes; et il prouve que le vêtement d'air que le pendule entraîne dans sa marche, dépend, non pas de la substance et de la densité du mobile, mais de sa forme. D'où résulte que le facteur $\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{770D-1}\right)$ de la formule (12) varie avec les pendules mis en expérience de 1,5 à 2,8, selon les cas. Les corrections s'élèvent jusqu'à 52″ en un jour. Ainsi pour obéir aux conditions du problème, lorsqu'on veut réduire un pendule au vide, il faut, ou soumettre le pendule d'expérience aux épreuves propres à en déduire le coefficient qui convient à ce mobile en particulier, en le faisant osciller dans l'air et dans le vide; ou du moins chercher parmi les pendules que M. Baily a mis en expérience celui qui est analogue au pendule proposé, et employer le facteur que ce savant a obtenu par ses expériences.

307. Les Anglais, pour fixer les bases de leur système métrique, ont voulu les tirer de la nature, et ont pris pour terme de comparaison la longueur du pendule à Londres. Mais ce terme, quoique plus facile à trouver que l'arc de méridien, est moins propre à cet usage; car

1°. On y fait entrer le *temps* qui est une considération étrangère;

2°. On suppose le jour moyen divisé en 24^h, l'heure en 60′, la minute en 60″, circonstances tout-à-fait arbitraires;

3°. On ignore si la pesanteur n'est pas variable avec les siècles;

4°. Des mesures prises à Londres, ne sont pas propres à

fixer les incertitudes des autres nations, que leur orgueil doit repousser (*voy. Syst. Métr.*, T. III, p. 461);

5°. Les mesures qu'on fait du pendule à secondes exigent des expériences très délicates; mais il faut ensuite y appliquer les calculs de réduction. Or les auteurs, fondés sur des expériences attentives, ne sont pas d'accord sur la quotité rigoureuse de ces réductions.

308. Nous terminerons cette exposition en parlant d'un très beau travail de M. Baily, sur les expériences du pendule faites par feu le capitaine Foster; ce Mémoire est inséré parmi ceux de la Société astronomique de Londres, T. VII. Ce Mémoire, du plus haut intérêt, rapporte les diverses expériences faites par l'illustre voyageur en 14 lieux différens du globe; la durée des heures d'observation est de 3184. Le soin particulier qu'il a mis à les faire, leur nombre, l'habileté du calculateur, tout se réunit pour donner un grand poids aux résultats. M. Baily, par une discussion éclairée des diverses expériences, est conduit à trouver

$$p = 298,34 = 293,99 = 293 = 289,48.$$

M. Baily analyse aussi les observations de Mrs Kater, Goldingham, Hall, Brisbane, Sabine, Fallows, Freycinet, Duperrey et Leutke; il conclut enfin de tous ces travaux, $p = 285,26$. On remarque combien ces résultats sont voisins de 305, nombre déduit des observations lunaires, et qui doit inspirer plus de confiance que toutes les autres déterminations.

Chap. VI. — Cartes géographiques.

309. La surface terrestre n'étant pas *développable*, on n'en peut représenter sur un plan la disposition des lieux, qu'en altérant plus ou moins leurs distances, l'étendue des surfaces, les valeurs angulaires des lignes, la figure des rivages, les crêtes des montagnes, les sinuosités des routes, etc,

Tantôt on en fait la *perspective*, c'est-à-dire qu'on imagine l'œil d'un spectateur placé en un lieu arbitraire, mais déterminé, duquel il envoie des rayons à tous les points qu'on veut figurer : une glace interposée entre l'œil et les objets, coupe ces droites en des points qu'on suppose conserver l'empreinte des lieux ; cette glace offre leur image, telle que les voit le spectateur dont il s'agit. Tantôt on choisit, sur un plan un système arbitraire de lignes droites ou courbes pour représenter les méridiens et les parallèles, et l'on place chaque localité sur ce réseau, au point qui a la longitude et la latitude convenables : c'est ce qu'on appelle *une projection*. Les cartes des royaumes sont construites de la sorte ; les *mappemondes* sont des perspectives.

310. Lorsqu'on veut tracer une carte par projection, l'art consiste à choisir pour méridiens et parallèles des lignes faciles à tracer, et dont l'ensemble altère peu les distances des lieux, et les surfaces. Il y a mille manières de varier le système de projection ; nous nous bornerons à décrire ici celles qui sont en usage, les seules qu'il soit nécessaire de connaître, renvoyant pour le surplus au *Traité de Topographie* de M. Puissant, p. 61 et 99, et à l'*Introduction* de M. Lacroix à la *Géographie de Pinkerton*. De plus, l'aplatissement terrestre est trop faible pour être pris ici en considération, en sorte que la terre sera censée sphérique.

Mappemondes.

311. La mappemonde est la perspective d'un hémisphère terrestre, sur un plan passant par le centre, l'œil du spectateur étant situé au point de la surface où elle est rencontrée par le rayon perpendiculaire au plan central. Cette perspective est appelée *projection stéréographique*.

Ainsi, l'on suppose l'œil du spectateur placé en un point quelconque de la surface, et qui en voit toutes les parties à travers la masse, comme si elle était transparente. Le plan de perspective passe par le centre de la sphère, et est perpendi-

culaire au rayon qui va à l'œil. C'est l'hémisphère opposé à ce plan qu'on représente. On imagine des lignes dirigées de l'œil aux différens points remarquables de cet hémisphère, et que ces droites laissent leurs empreintes sur le plan central. L'ensemble de tous ces points sera la projection stéréographique, ou la mappemonde.

Ainsi, dans la fig. 97, le demi-cercle AOB est horizontal, et AQB relevé verticalement au-dessus de AB. L'œil est en O, CO étant perpendiculaire sur AB se rabat au centre C. Le demi-cercle AQB tournant autour de AB se rabat sur l'horizon, et complète le cercle AOB : et de même AOB tournant autour de AB, va continuer, sur le plan vertical, le demi-cercle AQB. Un point P′ de l'horizon a sa projection en p' sur la direction du diamètre AB. Le point P a de même la sienne en p : en sorte que si PP′ est l'axe terrestre, P et P′ les pôles, situés sur le cercle horizontal, p et p' en seront les projections.

312. Avant tout, il faut démontrer ce théorème fondamental : *quelles que soient les positions d'un cercle tracé sur la sphère, et de l'œil situé en un point de la surface, la perspective sera toujours un cercle, sur le plan perpendiculaire au rayon mené par l'œil.*

En effet, si le plan du cercle NN′ (fig. 97) est perpendiculaire au plan horizontal AOB, contenant l'œil O, les rayons visuels menés à cette courbe formeront un cône oblique NON′ à base circulaire, dont l'axe Oc aboutit au centre c de ce cercle. Le plan vertical AB coupe ce cône selon une courbe nn', qui est la perspective demandée, et qu'il s'agit de prouver être un cercle. Or, si l'on fait tourner les lignes NO, N′O, autour de l'axe Oc, elles reproduiront ce cône NON′, passant successivement par tous les points du cercle NN′ et de sa perspective nn'. Une demi-révolution amène le point n en m, et n' en m', en sorte que la droite nn' prend la position mm' qui est l'axe de la section transposée. Mais l'angle $N = n'$, puisque l'un a pour mesure $\frac{1}{2}AN' + \frac{1}{2}AO$, et l'autre

$\frac{1}{2}$ AN' + $\frac{1}{2}$ OB, valeurs égales : ainsi l'angle N'NO = *mm'*O ; *mm'* est parallèle à NN', et le cône est coupé par un plan parallèle à sa base ; la section *mm'*, et par conséquent aussi *nn'*, est dont un cercle (*).

313. La même chose arrive quand le plan du cercle NN' a une direction quelconque par rapport au plan horizontal AOB (fig. 98). En effet, menons au centre *c* du cercle NN' la droite C*c* ; cette droite sera perpendiculaire à son plan et en mesurera la distance au centre C de la sphère. Le plan CO*c* mené par l'axe O*c* du cône et la droite C*c*, est perpendiculaire au plan NN', puisqu'il passe par C*c* ; il coupe la sphère suivant l'arc QL, et le plan de perspective selon CL ; cette perspective est la courbe *nn'*. On voit que le cercle NN' et sa perspective *nn'* sont, à l'égard du plan OC*c*, précisément dans les conditions de la fig. 97. Il suffira de faire tourner le plan QNO autour de QO, et de le rabattre sur QOA, pour ramener tout au même état que ci-devant.

314. Exprimons analytiquement les relations du cercle NN' (fig. 97) et de sa perspective *nn'*. Soit l'arc PN = Δ, distance de ce cercle à son pôle P, et l'arc PQ = D, distance de ce pôle au point Q diamétralement opposé à l'œil. La perspective sera le cercle *nn'* dont le centre est en *i*, le rayon $ni = \rho$, la distance $Ci = \alpha$ des deux centres C et *i*. La construction qui donne ces élémens est fort simple. On mène les droites ON, ON', qui coupent AB en *n* et *n'*, et donnent le diamètre *nn'*, dont le milieu *i* est le centre du cercle de projection.

Cherchons les valeurs des quantités α et ρ ; car cette construction cesse d'être possible, quand le cercle NN' est situé de manière à donner des lignes ON, ON', si divergentes, que les points *n* et *n'* sortent des limites de la feuille. Or, on a

$$N'Q = N'P + PQ = D + \Delta, \quad NQ = D - \Delta,$$

(*) Lorsqu'un cône oblique NON', à base circulaire NN', est coupé par un plan *nn'*, tel que l'angle N' = *n*, la section appelée *anti-parallèle* ou *sous-contraire*, est un cercle. *Voy.* mon *Cours de Math. pures*, n° 640.

le rayon CO étant $=1$, Cn, Cn', sont les tangentes des angles COn, COn', mesurés par les moitiés des arcs NQ, N'Q, d'où

$$Cn'=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D+\Delta)=\mathcal{C}',\quad Cn=\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D-\Delta)=\mathcal{C},\quad (1)$$
$$\alpha=Ci=\tfrac{1}{2}(Cn'+Cn),\quad \rho=\tfrac{1}{2}(Cn'-Cn);$$

$$\text{or}\quad Cn'\pm Cn=\frac{\sin\frac{1}{2}(D+\Delta)}{\cos\frac{1}{2}(D+\Delta)}\pm\frac{\sin\frac{1}{2}(D-\Delta)}{\cos\frac{1}{2}(D-\Delta)},$$

$$\mathcal{C}'\pm\mathcal{C}=\frac{\sin\frac{1}{2}(D+\Delta)\cos\frac{1}{2}(D-\Delta)\pm\sin\frac{1}{2}(D-\Delta)\cos\frac{1}{2}(D+\Delta)}{\cos\frac{1}{2}(D+\Delta).\cos\frac{1}{2}(D-\Delta)}.$$

Lorsqu'on préfère le signe +, le numérateur se réduit à sin D; dans le cas du signe —, il devient sin Δ : quand au dénominateur, il est $=\frac{1}{2}(\cos D+\cos\Delta)$, en vertu de l'éq. (11) p. 35. Donc

$$\alpha=\frac{\sin D}{\cos D+\cos\Delta}=\frac{\sin D}{2\cos\frac{1}{2}(D+\Delta)\cos\frac{1}{2}(D-\Delta)}\ldots\quad(2)$$

$$\rho=\frac{\sin\Delta}{\cos D+\cos\Delta}=\frac{\sin\Delta}{2\cos\frac{1}{2}(D+\Delta)\cos\frac{1}{2}(D-\Delta)}\ldots\quad(3)$$

d'où $\alpha:\rho::\sin D:\sin\Delta$.

315. Ces éq. renferment toute la théorie des projections stéréographiques. Pour projeter un cercle donné sur la sphère, il ne s'agit que de prendre les valeurs de D et Δ qui résultent de la position de ce cercle sur la sphère. Et quand le cercle NN' (fig. 98) qu'on veut projeter n'est pas perpendiculaire au plan horizontal AOB, la section n est encore circulaire; mais son centre i est situé sur la droite CL d'intersection du plan vertical AQB avec le plan CQN'O. C'est ce qui sera développé.

316. *Projection stéréographique sur l'horizon.* Si le centre C de la carte (fig 95) est la place d'une ville, telle que Paris, ce lieu occupera sur la sphère le point Q diamétralement opposé à l'œil O; l'axe PP' de la terre fera avec AB l'angle PCA égal à la latitude l du lieu; PQ sera la colatitude. Le plan vertical élevé sur AB sera celui de la perspective; et comme le plan

tangent en Q est parallèle à celui-ci et est l'horizon du lieu, on conçoit la cause de la dénomination de cette projection.

Tirez de l'œil O (fig. 97) les droites OP, OP', aux deux pôles P et P', vous aurez en p, p', intersections avec AB, les projections p et p' de ces pôles, et celle pp' de l'axe PP'.

Les parallèles à l'équateur sont des cercles tels que NN' perpendiculaires à PP' et au plan AOBQ; leurs projections sont des cercles dont on obtient le diamètre nn' en tirant les droites ON, ON'; le milieu i de nn' est le centre ; $in = in'$ est le rayon de ce parallèle. Ainsi dans la figure 95, qui est celle de la mappemonde dont il s'agit, après avoir tracé le cercle AOBQ, les diamètres rectangles AB, OQ, l'axe PP' faisant l'angle PCA égal à la latitude l du lieu, on marque les projections des pôles en p et p', en tirant OP et OP'. Le pôle p est ici seul utile, parce que la mappemonde ne représentant qu'un hémisphère, ne montre qu'un seul pôle p.

Les lignes ON, ON' menées à des points N, N', à égales distances de P donnent le diamètre nn' d'un parallèle, dont NP est la colatitude. La figure montre tous ces parallèles tracés pour des latitudes croissantes de 15 en 15 degrés. QkO est l'équateur qui passe évidemment par les points Q et O, car ce cercle étant perpendiculaire à PP', et passant en C, sa circonférence perce le tableau en O et Q. La difficulté de concevoir les constructions tient beaucoup à ce qu'ici le demi-cercle AQB représente à la fois le plan vertical de perspective, soit debout sur AB, soit recouché sur l'horizon, et aussi le prolongement du demi-cercle horizontal AOB.

317. Lorsque les rayons deviennent très grands, comme pour les latitudes australes, cette construction devient très incommode ; elle est d'ailleurs sujette au défaut de précision dû à l'obliquité des lignes menées de O sur AB. Calculons donc pour chaque parallèle le rayon ρ de sa projection, la place qu'occupe son centre i, $\alpha = Ci$, et les distances $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ du centre C aux points d'intersection n et n' des cercles.

Faisons dans les éq. (2) et (3)

$D = PQ =$ colatitude du lieu central de la carte (fig. 97 et 95), $D = 90° -$ latitude l, constante pour tous les parallèles :

puis donnons successivement à Δ les valeurs de PN, ou les distances polaires des divers parallèles, mesurées sur PN′AOB ; d'où

$$\alpha = \frac{\cos l}{\sin l + \cos\Delta},$$
$$\rho = \frac{\sin\Delta}{\sin l + \cos\Delta},$$
$$C = \text{tang}\,(45° - \tfrac{1}{2}l - \tfrac{1}{2}\Delta).$$

Et d'abord, si l'on fait $\Delta = 0$ ou $= 180°$, les petits cercles se réduisent à un point p ou p' ; on a $\rho = 0$, et l'on trouve pour les projections des pôles

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \dfrac{\sin D}{\cos D + 1} = \text{tang}\,\dfrac{1}{2}D = Cp, \\ \alpha' = \dfrac{\sin D}{\cos D - 1} = -\cot\dfrac{1}{2}D = Cp'. \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (4)$$

La projection de l'arc PP′, ou la distance pp' entre celles des pôles, est

$$\left.\begin{array}{l} pp' = \text{tang}\,\dfrac{1}{2}D + \cot\dfrac{1}{2}D = \dfrac{\sin\frac{1}{2}D}{\cos\frac{1}{2}D} + \dfrac{\cos\frac{1}{2}D}{\sin\frac{1}{2}D} \\ = \dfrac{\sin^2\frac{1}{2}D + \cos^2\frac{1}{2}D}{\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D} = \dfrac{2}{\sin D}; \end{array}\right\} \ldots (5)$$

donc le milieu F de pp' est donné par

$$CF = pF - pC = \frac{1}{\sin D} - \text{tang}\,\frac{1}{2}D = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D} - \frac{\sin\frac{1}{2}D}{\cos\frac{1}{2}D}$$
$$= \frac{1 - 2\sin^2\frac{1}{2}D}{2\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D} = \frac{\cos D}{\sin D} = \cot D = \text{tang}\,l \ldots\ldots \quad (6)$$

318. En faisant croître Δ de 0 à 180°, on obtient les valeurs de α, ρ et C propres à déterminer la projection de chaque parallèle. Pour la partie australe, $\Delta > 90°$, et cos Δ prend le signe $-$; α et ρ sont très grands, les cercles ont peu de cour-

bure. Ces formules sont assez commodes à employer. Au reste, nous donnerons pour ces cercles un procédé plus facile encore. Pour l'équateur $\Delta = 90°$, et l'on a

$$\alpha = \frac{\sin D}{\cos D} = \tang D = \cot l, \quad \rho = \frac{1}{\cos D} = \frac{1}{\sin l} \cdot\cdot \quad (7)$$

Si l'on veut marquer les tropiques et les cercles polaires, on fera $\Delta = 23° 28'$, $66° 32'$. Ainsi le tracé des parallèles n'offre plus aucune difficulté. On a coutume de diviser la circonférence AOBQ de 5° en 5° : nous avons pris ici des arcs de 15°, pour éviter la confusion.

319. Venons-en aux méridiens. Ces cercles passent tous par les pôles P et P′ (fig. 97), et leurs projections par p et p'; pp' est une corde qui leur est commune, et leurs centres respectifs sont par conséquent situés sur H′FH, perpendiculaire au milieu de pp'. Ce point F vient d'être déterminé (éq. 6) : il est d'un usage plus commode que le point p', qui est souvent trop éloigné du centre C de la figure. Tous les points de H′FH sont les centres de circonférences passant en p et p', lesquelles sont les projections d'autant de méridiens terrestres. Déterminons celui de ces cercles qui est la projection du méridien incliné de θ sur le plan OBQ, c.-à-d. dont θ est la longitude.

Le cercle NN′ (fig. 98) dont le pôle est en R, est situé d'une manière quelconque sur la sphère ; les éq. (2) et (3) s'y appliquent, dans le plan OCc perpendiculaire au cercle NN′. Ainsi la perspective est un cercle nn', dont le centre i est sur la ligne LC oblique à AC : la distance $Ci = \alpha$, et le rayon $\rho = in$ sont déterminés par la position de NN′ sur la sphère, c.-à-d. par la distance RQ de son pôle R au point Q, et par l'angle AQL que font les plans RCO et AQBO. Pour que ce cercle NN′ devienne un méridien, il faut faire $\Delta = 90°$, parce que tout grand cercle est à 90° de son propre pôle R. Quant à D, qui représente l'arc PQ (fig. 97), cette lettre n'a plus la valeur $90° - l$, car le cercle ou méridien NN′ (fig. 98) n'est plus perpendiculaire à l'axe terrestre, et passe au contraire par cet axe. Rem-

plaçons D par ψ, qui représente cet arc RQ, attendu que nous voulons conserver à D la valeur $90° - l$.

Ainsi
$$\alpha = \tan\psi, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$
$$\varrho = \frac{1}{\cos\psi} = \sec\psi; \ldots\ldots \quad (10)$$

donc le centre i du cercle de projection est, sur la droite CL, distant de α du centre C, L étant le point où l'arc QRL, de 90°, coupe le plan horizontal AOB, cet arc passant par le pôle R du cercle NN'. On décrira de ce centre i un cercle avec le rayon ϱ. Mais il faut connaître $AL = \varphi$ qui détermine la direction de CL et l'arc $RQ = \psi$, en fonction de θ.

320. Le cercle PMP' (fig. 99) est un méridien vu en perspective; TT' est l'équateur. En faisant tourner PMP' autour de PP', le méridien prend toutes les inclinaisons θ sur le plan AOB, le pôle R de ce cercle le suit dans sa révolution et décrit l'équateur, parcourant des arcs égaux à ceux de ce méridien : le triangle sphérique RQT, rectangle en T, comprend

$$TR = 90° - \theta, \quad RQ = \psi, \quad QT = 90° - D, \quad \text{et} \quad AQL = \varphi,$$

puisque Q est le pôle de l'arc AL. Ainsi l'on trouve

$$\cos\psi = \sin D \sin\theta, \quad \cot\varphi = \tan\theta \cos D \ldots \quad (11)$$

Chaque méridien a sa longitude θ, inclinaison de ce plan sur AOBQ ; on en tire les valeurs correspondantes de ψ et de φ. La 1re donne ψ, et par suite, les éq. (9) et (10) donnent α et ϱ, qui déterminent le cercle de projection, dont le centre est sur la droite FH (fig. 97). La 2e éq. (11) donne la direction φ du rayon Ci sur lequel on doit porter α.

321. Mais ces éq. fournissent une construction très simple. Dans le triangle pFa' (fig. 101), où a' est le centre de l'une des projections de méridien, et pa' son rayon ϱ, on a

$$pF = \varrho \times \cos Fpa', \quad \cos Fpa' = \frac{Fp}{\varrho} = \frac{\cos\psi}{\sin D} = \sin\theta.$$

Ainsi l'angle Fpa' est le complément de la longitude θ du méridien, dont la projection a son centre en a'. Donc; du centre p, décrivez un quart de cercle FS avec un rayon arbitraire (on l'a pris ici égal à Fp) : divisez ce quadrans de 5° en 5°, par ex., à partir de S (on n'a pris ici les arcs que de 15° pour éviter la confusion); et marquez les divisions des n°s 5, 10, 15... de S vers F. Pour chaque point, tel que a, tirez pa, qui marquera le centre a' sur FH du méridien dont la longitude est $Sa = 90° - Fa$.

La droite AB doit visiblement couper la projection en deux parties symétriques ; chaque centre a', b'... a son correspondant a'', b''... à même distance de F, du côté H', et a en outre le même rayon.

La figure 102 est la mappemonde complète formée de la réunion des figures 95 et 101 ; l'une représentant les parallèles, l'autre les méridiens.

322. On est dans l'usage de tracer aussi l'écliptique sur les cartes de géographie : mais c'est faire une chose vide de sens, et propre à donner des idées fausses de ce cercle. Si l'on voulait composer une carte céleste, alors il faudrait le marquer. Cette projection s'obtiendrait facilement par les principes qu'on vient d'exposer. Les astres seraient rapportées à leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. Quand on veut que les coordonnées soient les longitudes et les latitudes, l'écliptique tient lieu d'équateur dans la projection, qui d'ailleurs s'obtient par les mêmes principes.

323. Lorsque les centres des cercles sont très éloignés, les plus grands compas ne suffisent plus pour décrire les arcs. On se procure alors trois de leurs points A, B, C (fig. 104) et l'on trace la courbe, soit par un système de coordonnées rectangles (*voy*. n° 350), soit par la propriété de l'angle inscrit. L'arc, dans ce dernier cas, est décrit par le sommet B d'un angle constant ABC, assujetti à passer sans cesse par deux points A et C, et qu'on fait tourner; le sommet devant passer par B dans l'une de ces positions, cette condition détermine cet angle B mobile.

Comme alors les arcs ont peu de courbure, il suffit d'en marquer quelques points.

324. La recherche des trois points A, B, C se fait comme il suit :

1°. *Pour les parallèles.* Soit NN′ un arc perpendiculaire à l'axe terrestre PP′ (fig. 100); le centre de la projection est supposé très éloigné de C. Le plan NN′ rabattu donne la circonférence NgN′, et élevant la perpendiculaire fg sur le diamètre NN′, fg est l'ordonnée verticale du point de la projection qui est soit au-dessus, soit au-dessous de f. Ainsi portant fg de f en h et en h', h et h' seront deux points de la projection circulaire; et comme on a déjà le point n, par la valeur (1) de $Cn = \zeta$, ou par la construction indiquée, les trois points h, n et h' sont ceux qu'on demande pour tracer l'arc de projection.

2°. *Pour les méridiens.* Le grand cercle qui est incliné de θ sur le plan horizontal AOB (fig. 103), et va de P en P′ dans l'espace, est celui qu'on veut mettre en perspective. L'œil est en O et le plan vertical élevé sur AB est celui de projection. Or, ce cercle PGP′ va percer le plan AGB en deux points qui sont leurs perspectives particulières : cherchons ces points. L'un d'eux, tel que G, détermine un triangle sphérique AGP′ rectangle en A ; on y connaît l'angle P′ qui est celui d'inclinaison, ou la longitude du méridien P′GP, AP′ $= 180° - l$; AG $= x$ est l'arc demandé. Ce triangle donne

$$\tang x = \sin l \tang \theta.$$

On peut donc trouver par le calcul l'arc x qui va de A (fig. 101) aux points G et I; où chaque méridien GI coupe en G et I le cercle AOBQ dans lequel la mappemonde est enfermée.

325. On en tire une construction fort simple pour trouver ces points G et I de chaque méridien. D'un point quelconque F de AB (fig. 107), celui, par exemple, dont on s'est déjà servi (fig. 101), abaissez la perpendiculaire FM sur l'axe PP′ de la terre, et portez FM de F en K ; faites l'angle FKL $= \theta$, et la

droite KL coupera la verticale FH en un point L, par lequel tirant le diamètre LCG, cette droite coupera le cercle de projection aux points cherchés G et I, auxquels il est croisé par la projection du méridien dont la longitude est θ.

En effet, on a $FM = CF.\sin l = FK$,
$FL = FK.\tang\theta = CF.\sin l \tang\theta$

d'où $$\tang LCF = \frac{FL}{CF} = \sin l \tang\theta = \tang x;$$

donc $x = LCF$. On décrit du centre K un quadrans qu'on divise de 5° en 5°, et l'on mène par ces points des rayons KL, dont chacun est incliné sur FK d'un arc θ, et donne un point L, un diamètre LG, et les points G et I. La droite GI est une corde de la projection du méridien dont la longitude est θ.

326. *Projection sur le méridien.* Appliquons notre théorie au cas où l'œil O (fig. 97) est en un point de l'équateur, et où par conséquent le plan du tableau de perspective AQB est un méridien : le plan vertical QO est l'équateur; et le plan de projection, tournant autour de AB, de vertical qu'il était, se rabat sur AOQB. Dans le cas actuel, l'axe PP' des pôles se confond avec AB.

Projection des parallèles (fig. 105). La construction indiquée p. 287, s'applique ici. PP' est l'axe des pôles; l'équateur est projeté selon le diamètre OQ; divisez le demi-cercle OPQ de 5° en 5°, et opérez pour chaque point de division, comme nous allons le faire pour les deux points correspondans N et N' (nous n'avons pris ici que des arcs de 15°, pour éviter la confusion des traits). Tirez ON et ON', qui coupent l'axe PP' en M et M'; MM' est le diamètre de l'arc NMN' qui figure un parallèle. Et si l'on ne veut pas se servir du point M', qui peut être fort éloigné, on trouvera le point M, et l'on fera passer une circonférence par les trois points N, M et N', ainsi qu'on l'a expliqué n° 324.

On peut encore trouver le rayon ρ de chaque cercle, et les distances du centre C au point M et au centre du cer-

cle de projection, savoir, $\mathcal{C}$ et α, en posant $D = 90°$ dans les éq. (1), (2) et (3), p. 286,

$$\varrho = \tan \Delta = \cot \text{ latitude } l \text{ du parallèle},$$

$$\alpha = \frac{1}{\cos\Delta} = \frac{1}{\sin l}, \quad \mathcal{C} = \tan \frac{1}{2} l.$$

Nous donnons ci-après ces valeurs. On peut faire résulter la construction précédente de ces éq.; car on a

l'angle $\quad NOQ = \frac{1}{2} l, \; CM = \tan \frac{1}{2} l,$

$$CM' = \tan \tfrac{1}{2}(180° - l) = \cot \tfrac{1}{2} l,$$

d'où $\quad CM' + CM = 2\alpha = \dfrac{2}{\sin l}.$

La symétrie des cercles de part et d'autre de l'équateur OQ, fait trouver à la fois les deux parallèles à même latitude boréale et australe.

327. *Projection des méridiens* (fig. 106). On se sert des mêmes divisions de la circonf., et l'on raisonne comme nous allons le faire pour N et N', la longitude du méridien étant donnée par les arcs QN, ON'. On tire le diamètre NN', et du pôle P', les cordes P'N, P'N', qui coupent l'axe QO en f et f'; ff' est le diamètre du cercle, passant en P et P'; le milieu i de ff' est le centre. Un autre cercle symétrique à celui-ci, a même rayon, et son centre en i' à même distance que i. Cette construction est une modification de celles de la p. 287. On peut d'ailleurs la tirer des éq. suivantes. On fait $\Delta = 90°$ et $D = \theta$ dans les éq. 1, 2, 3, p. 286, et l'on a

$$\mathcal{C} = Cf = \tan(45° - \tfrac{1}{2}\theta), \quad \mathcal{C}' = Cf' = \tan(45° + \tfrac{1}{2}\theta)$$

$$\varrho = \frac{1}{\cos\theta},$$

$$\alpha = \varrho - Cf = \varrho + Cf' = \tan\theta.$$

La figure 109 est une mappemonde complète, formée de la réunion des parallèles de la figure 105 et des méridiens de la figure 106. C'est cette espèce de mappemonde qui est la plus usitée.

TABLE *des valeurs de* α, *de* ρ *et de* ζ, *tant en longitude qu'en latitude, de* 5° *en* 5°, *le rayon de la mappemonde étant* 1.

l ou θ	PARALLÈLES.			MÉRIDIENS.		
	$\alpha =$	$\rho =$	$\zeta =$	$\alpha =$	$\rho =$	$\rho =$
5°	11,47371	11,43005	0,04366	0,08749	1,00382	0,91634
10	5,75877	5,67128	0,08749	0,17633	1,01543	0,83910
15	3,86370	3,73205	0,13165	0,26795	1,03528	0,76733
20	2,92380	2,74748	0,17633	0,36397	1,06418	0,70021
23.28′	2,51120	2,30351	0,20770			
25	2,36620	2,14451	0,22169	0,46631	1,10338	0,63707
30	2,00000	1,73205	0,26795	0,57735	1,15470	0,57735
35	1,74345	1,42815	0,31530	0,70021	1,22077	0,52057
40	1,55572	1,19175	0,36397	0,83910	1,30541	0,46631
45	1,41421	1,00000	0,41421	1,00000	1,41421	0,41421
50	1,30541	0,83911	0,46631	1,19175	1,55572	0,36397
55	1,22077	0,70021	0,52057	1,42815	1,74345	0,31530
60	1,15470	0,57735	0,57735	1,73205	2,00000	0,26795
65	1,10338	0,46631	0,63707	2,14451	2,36620	0,22169
66.32	1,09016	0,43412	0,65604			
70	1,06418	0,36397	0,70021	2,84748	2,92380	0,17633
75	1,03528	0,26795	0,76733	3,73205	3,86370	0,13165
80	1,01543	0,17633	0,83910	5,67127	5,75876	0,08749
85	1,00382	0,08749	0,91633	11,43005	11,47371	0,04366

328. *Projection polaire.* L'œil O (fig. 97) est placé à l'un des pôles de la terre, Q est l'autre pôle : le plan vertical de projection étant rabattu donne l'équateur AOBQ, parce que ce plan élevé sur AB produit le cercle équatorial. D'après cela l'équateur (fig. 110) est AOBQ, et le centre est le pôle P. Si l'on divise la circonférence de 5 en 5 degrés (ici de 15 en 15), et que par les points de division, on tire des diamètres NN′, il est évident que ces droites seront les perspectives des méridiens.

Quant aux parallèles, étant dans des plans perpendiculaires à l'axe terrestre, confondu avec OQ, ils seront les bases des cônes optiques dont le sommet est en O. Ces cônes coupés par le plan du tableau AQB, parallèlement à leurs bases, donnent pour section des cercles, dont le centre est en P au pôle. Tirez ON à l'un des points de division de la circonférence; le

point a de rencontre avec AB donne Pa pour rayon de la projection du parallèle dont la latitude est mesurée par l'arc AN : et ainsi des autres.

329. Pour trouver la valeur analytique du rayon ρ d'un parallèle, il faut faire $D = o$ dans l'éq. (3), et l'on trouve

$$\rho = \tang \tfrac{1}{2}\Delta = \tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}l),$$

l étant la latitude de ce parallèle. On a évidemment $\alpha = 0$. Les valeurs que prend ρ de 5 en 5°, sont comprises dans la colonne des valeurs de ζ pour les méridiens, dans le tableau précédent.

On fait peu d'usage de cette projection, si ce n'est pour les cartes célestes, lorsqu'on veut montrer la figure des constellations polaires, car il n'y a guère que les régions voisines du centre de cette carte qui ne soient pas fort altérées. En géographie, comme les pays près des pôles sont inhabitables et inconnus, on n'a aucune raison de se servir de cette projection.

330. *Projection anglaise.* Comme les bords de la mappemonde présentent des configurations singulièrement altérées, on a imaginé d'imiter celles des figures 109 et 110, en ordonnant les cercles de manière à être coupés par parties égales. Mais cette projection est toute conventionnelle et n'a rien de commun avec la perspective.

Dans la figure 111, on divise en parties égales les diamètres rectangles du cercle, ainsi que sa circonférence ; nous les avons coupés ici en 9, pour que chaque arc soit de 10 degrés. On fait ensuite passer des circonférences par trois des points ainsi déterminés. Ainsi les méridiens passent par les deux pôles A et B, et par les points successifs de division du diamètre horizontal ; les parallèles passent par les points de division correspondans de la circonférence et du diamètre vertical.

331. Il est facile de faire passer chaque cercle par les trois

points dont il s'agit, même quand le centre est fort loin (*voy.* n° 323). Mais on peut trouver la longueur ϱ de chaque rayon de méridien, et la distance CK $= \mathcal{C}$ de C à son point K de section avec l'équateur NN'. En effet le centre cherché est situé sur le diamètre horizontal NN', et l'éq. de ce cercle, l'origine étant en C, est par conséquent

$$(x + \varrho - \mathcal{C})^2 + y^2 = \varrho^2,$$

et puisque ce cercle passe aussi en A et B, on a $\varrho^2 = r^2 + (\varrho - \mathcal{C})^2$, r étant le rayon AC de la mappemonde. Ainsi

$$\varrho = \frac{r^2}{2\mathcal{C}} + \frac{1}{2}\mathcal{C};$$

mais $\mathcal{C}$, ou CK, est toujours une fraction connue de r, savoir

$\mathcal{C} = \dfrac{r}{n}$, d'où $\qquad \varrho = \dfrac{1}{2}nr + \dfrac{1}{2}\dfrac{r}{n}$.

Cette éq. fait connaître le rayon ϱ du méridien qui passe par le point K de division du diamètre horizontal.

Par ex., si l'on a coupé NC et AN en 9 parties égales, pour tracer le méridien qui passe aux $\frac{5}{9}$, ou à la 5ᵉ division K, on fera $n = \frac{9}{5}$, d'où $\varrho = \frac{106}{90}r = r + \frac{8}{45}r$.

Raisonnons de même pour les parallèles. Un cercle FHF' dont le centre est sur l'axe des y, a pour éq. (le rayon étant ϱ)

$$x^2 + (y - \mathcal{C} - \varrho)^2 = \varrho^2,$$

en faisant CH $= \mathcal{C}$. Les points de section avec le cercle de la mappemonde se trouvent en posant $x^2 + y^2 = r^2$, et éliminant x et y; si donc on fait CD$=\gamma$, on trouve $2\mathcal{C}\gamma - \mathcal{C}^2 + 2\varrho(\gamma - \mathcal{C}) = r^2$,

d'où $\qquad \varrho = \dfrac{r^2 + \mathcal{C}^2 - 2\mathcal{C}\gamma}{2(\gamma - \mathcal{C})}$.

Les données sont ici $\mathcal{C} =$ CH, $\gamma =$ CD; et l'on trouve le rayon ϱ du parallèle. Comme CH est une fraction connue du rayon r, on a $\mathcal{C} = \dfrac{r}{n}$, et l'arc NF est la même fraction du quadrans NA; on a $\gamma = r\sin\left(\dfrac{90^\circ}{n}\right)$. Par ex. si $\mathcal{C} = \dfrac{4}{9}r$, on a....

$\gamma = r \sin 40^\circ$, ou $= r.0,6428$; le calcul donne $\varrho = r.1,578$. On ouvre donc le compas de cette quantité, et posant une pointe sur la 4ᵉ division du rayon vertical, à partir de C, l'autre pointe ira marquer le centre du parallèle sur le prolongement de ce même rayon au-delà de C.

332. On construit encore une projection polaire sur le même principe. Les méridiens sont encore représentés par des diamètres également inclinés l'un sur l'autre, et les parallèles par des cercles concentriques avec la mappemonde, précisément comme dans la figure 110; mais ces cercles sont ici également distans entre eux (fig. 112), c.-à-d. qu'ils divisent tous les rayons en parties égales.

Ainsi dans la figure 112, on a coupé chaque quadrans en 9 arcs égaux, et mené des diamètres par les points de division; on a partagé un rayon en 9 parties égales et tracé des circonférences passant par ces points, et dont le centre est celui de la mappemonde.

333. *Projection de Lorgna*. On y a pour objet de conserver aux contours leurs étendues superficielles, mais de négliger les distances et les configurations. Ainsi étant donnée une demi-sphère de rayon R, la mappemonde présente un cercle de même surface; et il faut en outre que si l'on considère une étendue sur la sphère, cette aire soit égale à celle de sa projection. C'est sur ce principe qu'est construite la carte polaire de l'*Uranographie*.

Cette projection offre l'apparence de la figure 110; les méridiens sont encore des diamètres également inclinés, et les parallèles des cercles concentriques, mais les rayons de ces cercles observent une loi qui emporte comme conséquence la condition prescrite que les aires sur la sphère soient égales à leurs projections. Voici comment on y satisfait.

D'abord le cercle de la mappemonde doit avoir même surface que l'hémisphère qu'il représente : soient r et R les rayons, on a πr^2 et $2\pi R^2$ pour les aires; et puisqu'elles sont égales,

$$r^2 = 2R^2, \quad r = R\sqrt{2}, \quad R = \tfrac{1}{2} r\sqrt{2},$$

expressions qui donnent r quand on connaît R, ou réciproquement. On tracera donc à volonté un cercle pour représenter la projection de l'hémisphère; la sphère devra avoir pour rayon $\frac{1}{2}r\sqrt{2}$, ou $R = 0{,}7071 . r$. Si l'on divise r en 1000 parties égales, la sphère aura pour rayon 707 de ces parties.

Soit CA = R (fig. 113) le rayon de la sphère, A le pôle, M'M un parallèle dont la distance au pôle est l'arc AM= Δ, compl. de la latitude de ce parallèle. La surface de la calotte M'AM est $= 2\pi Rk$, en faisant la flèche AB = k : d'un autre côté si CI = ρ est le rayon de la projection du parallèle, sa surface $= \pi\rho^2$. On veut que ces deux aires soient égales, savoir $\rho^2 = 2Rk$. Ce rayon ρ est donc moyen proportionnel entre le diamètre 2R de la sphère et la flèche AB de la calotte sphérique M'AM. Et comme la corde AM est aussi moyenne proportionnelle entre AB et 2R, il s'ensuit que le rayon CI de la projection du parallèle MM' est égal à cette corde AM.

Donc les rayons des parallèles sur la projection sont les cordes des arcs terrestres qui en sont les distances polaires.

334. D'après cela, on décrira un cercle à volonté pour représenter la mappemonde; on cherchera ensuite le rayon R de la sphère qui est les 0,707 du rayon adopté: ou bien on tracera sur ce rayon r un triangle isoscèle et rectangle; l'hypoténuse sera R; on décrira, avec ce rayon R, un cercle CM'AM, dont on divisera un quadrans de 5 en 5 degrés, et l'on mettra aux divisions les n[os] 5, 10, 15... à partir d'un point A pris pour pôle. Chacune de ces divisions aura une corde, et l'on tracera, avec des rayons égaux à ces cordes, une suite de cercles concentriques qui seront les projections des parallèles dont les distances polaires des colatitudes sont marquées par les n[os] correspondans. La corde de l'arc de 90° sera le rayon de la mappemonde. Cid sera la projection du parallèle $m'm$; Cd = Am; et ainsi des autres.

335. Il est évident que les calottes sphériques étant égales en surface à leurs projections, les zones comprises entre les parallèles sont dans le même cas. Et comme les méridiens ont

leurs projections en lignes droites diamétrales, tout espace sphérique compris dans le quadrilatère curviligne formé par deux méridiens et deux parallèles sera égal aussi à l'aire de sa projection ; c'est ce qu'on voulait obtenir.

336. La construction précédente est facile, mais elle a moins de précision que le calcul. Cherchons les valeurs numériques des rayons des projections, étant donné le rayon r de la mappemonde.

Pour un parallèle, celui de 15° de latitude par ex., l'arc AM est de 75°, et sa corde est $2 \sin\left(\frac{75^\circ}{2}\right)$, prise dans le cercle de rayon R, ou $2R\sin\left(\frac{75^\circ}{2}\right)$ le rayon étant 1. Ainsi pour le parallèle dont la latitude est l, le rayon de la projection est

$$\rho = r\sqrt{2}.\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}l).$$

C'est ainsi que pour le parallèle de 40°, on a $l = 40$, et $\rho = 0{,}59767.r$. Le rayon de la projection est donc formé de 598 parties de celui de la mappemonde divisé en 1000. La table suivante donne les valeurs de ρ pour tous les parallèles de 5° en 5°, le rayon r étant 1.

l	ρ	l	ρ	l	ρ
$l=$ 5°	$\rho=$0,95543	$l=$35°	$\rho=$0,65301	66° 32′	$\rho=$0,28759
10	0,90904	40	0,59767	70	0,24557
15	0,86092	45	0,54120	75	0,18459
20	0,81116	50	0,48369	80	0,12326
23.28′	0,77575	55	0,42526	85	0,06169
25	0,75986	60	0,36602	90	0,00000
30	0,70711	65	0,30609		

On remarquera que la projection du parallèle de 30° de latitude a précisément pour rayon celui de la sphère.

337. Sur une carte ainsi construite, on peut aussi dessiner un pays, en plaçant au centre C, non plus le pôle, mais une

ville quelconque. Car en imaginant le diamètre de la sphère terrestre qui passe par cette ville, et une suite de plans perpendiculaires à cette droite, on recomposera un système semblable à celui que nous avons considéré, où les cercles étaient des méridiens et des parallèles à l'équateur. Il est vrai que pour donner à chaque ville la position qui lui convient, dans la nouvelle disposition de la mappemonde, les diamètres et les cercles concentriques représentent, non plus des longitudes et des latitudes, mais des arcs verticaux et horizontaux, ce qu'on appelle en astronomie des *azimuts* et des *almicantarats*, et qu'on ne connaît pas ces nouvelles coordonnées pour les divers lieux. Il faut donc calculer celles-ci, connaissant les longitudes L et latitudes l.

Soit P le pôle (fig. 114), APCD le 1[er] méridien, B un lieu de la terre, C le lieu sur l'horizon duquel on veut faire la projection, et qui doit occuper le centre de la mappemonde. En conduisant les arcs de grands cercles PB, CB, on forme le triangle sphérique PCB, qu'il s'agit de résoudre. On y connaît l'angle $P=L$, $PC=90°-$ latit. λ du point central, $PB=90°-l$.

Il s'agit de trouver $CB=y$ et l'azimut $C=z$. y est le complément de la hauteur du lieu B.

Les éq. 1, 5 et 9, page 77, deviennent ici

$$\tang\varphi=\cos L\cot\lambda,$$

$$\cos y=\frac{\sin(l+\varphi)}{\cos\varphi}\sin\lambda,\quad \sin z=\frac{\sin L}{\sin y}\cos l.$$

Ainsi pour chaque lieu dont on a la latitude et la longitude, on calculera les valeurs de y et z qui déterminent la place de la projection de B sur la carte. De la sorte, on rendra la projection de Lorgna propre à représenter l'hémisphère terrestre, à peu près comme nous l'avons obtenu en perspective (fig. 102).

338. *Projections orthographiques.* Les perspectives que nous avons exécutées peuvent être considérées comme des projections à l'aide de lignes divergentes d'un point fixe (l'œil O du spectateur) sur un plan central. Mais si ce point

est situé à l'infini, les lignes deviennent perpendiculaires à ce plan, et la projection est appelée orthographique. Le procédé n'est qu'une application des règles de la géométrie descriptive. Les cercles de la sphère sont projetés chacùn par une système de parallèles qui forment un cylindre, dònt l'intersection par le plan central donne une ellipse. Comme ce mode de construction est compliqué et d'un usage difficile, nous ne nous y arrèterons pas.

Projections coniques.

339. Les mappemondes ont été imaginées par Ptolomée. Ce mode de construction peut convenir à la représentation d'un hémisphère terrestre, mais il n'est pas propre à figurer un état limité, qui n'est qu'une petite partie de la terre, ni même une grande étendue, comme l'Europe, l'Asie ou l'Afrique, parce que vers les parties éloignées du centre de la carte, les configurations éprouvent des déformations intolérables. Ainsi, l'on ne pourrait pas, sans de graves inconvéniens, représenter les territoires dont on demande la carte particulière, en isolant et agrandissant la portion de mappemonde où ils se trouvent. Tous les modes de projections ont à cet égard des défauts plus ou moins marqués, qui tiennent à la nécessité de figurer sur un plan, une portion de sphère; on altère les distances entre les points, les figures des limites, les étendues superficielles. On a beaucoup varié les procédés; nous nous contenterons de décrire ici ceux qui sont en usage.

340. Pour commencer par la *projection conique,* imaginons qu'on demande la carte d'un royaume, tel que la France, renfermé entre des cercles donnés en longitude et en latitude. On suppose le globe terrestre enveloppé d'un cône tangent au cercle du parallèle du milieu, entre les limites nord et sud, et l'on considère ce cône comme coïncidant sensiblement avec ce parallèle et ceux qui en sont voisins. Ensuite on développe ce cône sur le plan de la carte, en un secteur circulaire; les

méridiens sont des droites convergentes au sommet du cône, centre du secteur; les parallèles sont des arcs de cercle qui ont pour centre commun ce même sommet, et sont également distans pour des graduations égales en latitude.

Ainsi, dans la figure 118, SMN est le développement d'une portion de surface conique; MN, *mn* sont les parallèles extrêmes de la carte, AB celui du milieu; M*m*S, N*n*S les méridiens extrêmes, ODS celui du milieu.

Calculons les élémens de cette figure, pour en faire le tracé exact.

Soit *ab* (fig. 115) le diamètre du parallèle moyen sur le globe F*a*P*b*G; les tangentes *sa*, *sb*, et l'axe *sc* déterminent, par leur révolution autour de *s*C, le cône dont il s'agit; en sorte que SA (fig. 118) doit être pris égal à *sa* (fig. 115); de plus l'arc AB doit avoir pour longueur celle de l'arc décrit par *ac* entre les limites des longitudes extrêmes de la carte. Ces remarques suffiraient pour faire l'opération graphique de la figure 118; mais pour plus de précision, il convient d'y appliquer le calcul.

Soit FG l'équateur (fig. 115), P le pôle; $aF = l$ la latitude du parallèle moyen, $ac = \cos l$, en faisant le rayon $aC = 1$. Si D est le nombre de degrés en longitude que doit contenir la carte, c.-à-d. sa largeur; et si de plus S désigne l'angle au sommet (en degrés) ASB du secteur développé; on a AB = développement de D degrés de la circonférence *ac*; d'où

$$180^\circ : \pi \times ac \ (\text{ou } \pi \cos l) :: \mathrm{D} : \frac{\pi \mathrm{D} \cos l}{180^\circ} = \mathrm{AB}$$

= la longueur développée sur l'arc moyen du secteur.

Mais dans le triangle *sa*C, comme $sa = \mathrm{SA}$, on a.... $sa = \text{tang}\, aCs$ (fig. 118), ou $\mathrm{SA} = \cot l$, puis

$$180^\circ : \pi \times \mathrm{SA} \ (\text{ou } \pi \cot l) :: \mathrm{S} : \mathrm{AB} = \frac{\pi \mathrm{S} \cot l}{180^\circ}.$$

En égalant ces deux valeurs de AB, on trouve $\mathrm{D}\cos l = \mathrm{S}\cot l$, ou

$$\text{angle } \mathrm{S} = \mathrm{D} \sin l.$$

341. Ainsi, l'on tracera un angle MSN d'autant de degrés que le veut cette expression, et l'on aura l'angle S du segment développé. On prendra $SA = \cot l$, ce sera le rayon de l'arc qui représente le parallèle moyen : puis on portera, de A en M et m, les longueurs développées en ligne droite du méridien F a P entre les limites de latitudes extrêmes. Si la carte doit comprendre d degrés en latitude, Mm sera $= \frac{\pi d}{180^\circ}$, et l'on prendra les longueurs $AM = Am = \frac{\pi d}{90^\circ}$ (*voy.* la valeur de μ° page 37); puis partageant AM et Am en autant de parties égales qu'on voudra, on décrira du centre S des arcs qui figureront les parallèles de la carte. Quant aux méridiens, ce seront des droites partant du sommet S, et passant par des points également distans pris sur MN. Pour les régions éloignées du pôle, le centre S est trop loin pour se prêter à cette construction (*voy.* ce qui sera dit n° 350).

Il ne restera plus qu'à placer dans ce réseau chaque ville en son lieu, d'après la longitude et la latitude connues, à figurer les rivages, les montagnes, les sinuosités des rivières, etc. Cette construction est si simple qu'on la préfère souvent à toute autre, et la plupart des cartes particulières des états sont tracées d'après ce système.

342. Pour plus de précision, au lieu de faire le cône tangent à la sphère, on a imaginé de l'y inscrire, en le faisant passer par les deux cercles parallèles extrêmes, ce qui ne présente pas plus de difficulté. En effet, soit FG l'équateur (fig. 116), P le pôle, aa' l'arc de méridien du milieu de la carte, ac, $a'c'$, les rayons des deux parallèles extrêmes dont les latitudes l et l' sont Ga, Ga' : la corde aa' prolongée est sur la génératrice sL du cône. Ainsi en faisant tourner Ls autour de Cs, axe des pôles, aa' engendrera la surface conique qu'on doit développer, et qui formera la carte.

l'angle s a pour mesure $\frac{1}{2}$ (Oa — Pa') ; $Oa = 90^\circ + l$,

$$Pa' = 90° - l';$$

ainsi $s = \frac{1}{2}(l + l')$;

et comme le triangle rectangle *sca* donne $ac = as \sin s$,

on a $\cos l = as . \sin \frac{1}{2}(l + l')$;

d'où

$$as = \frac{\cos l}{\sin \frac{1}{2}(l + l')}, \quad a's = \frac{\cos l'}{\sin \frac{1}{2}(l + l')}.$$

Nous connaissons donc les élémens du secteur développé; le reste est comme ci-devant.

343. On peut encore faire en sorte que le cône soit dirigé par deux parallèles situés à mi-distance du parallèle moyen et des extrêmes; ce cône se trouve alors, partie interne, partie externe à la sphère. On place les points a et a' de la fig. 116, non plus aux limites de la carte en latitude, mais au quart et aux trois quarts de l'arc de méridien du milieu. C'est ainsi que Delisle a construit sa grande carte de Russie qui embrasse 33 degrés de latitude, et qui a son parallèle moyen à 55 degrés de l'équateur.

Maintenant on préfère à la projection conique celle de Flamsteed modifiée, dont on va traiter; cette construction est plus exacte et ne présente pas plus de difficulté.

Projection de Flamsteed.

344. Dans cette projection (fig. 123) la verticale AB du milieu de la carte représente un méridien, que traversent, à égales distances, une série de droites perpendiculaires figurant les cercles parallèles à l'équateur. Ainsi après avoir tiré la verticale AB, méridien moyen, on y portera des parties égales ab, bc, cd... destinées à représenter chacune un degré de latitude, et par les points de division, b, c, d,... on tirera des perpendiculaires MN, PQ, RS,... qui seront les parallèles

à l'équateur. Cela fait, on cherchera la longueur du degré de ces parallèles sous les latitudes successives MN, PQ... (*voy.* ci-après), et l'on prendra $am, bp, cr, \ldots$ respectivement égales à ces longueurs. Pour cela, on remarque que ab est la longueur de l'arc de 1° du méridien, ou de l'équateur, grand cercle de la sphère; construisant une échelle de parties égales sur cette longueur de ab, on saura combien de parties de cette échelle doivent être comprises dans am, dans $bp, \ldots$ d'après les latitudes respectives de ces parallèles; et l'on prendra ces longueurs avec le compas, pour les porter de a en m, de b en $p \ldots$ Joignant ensuite les points $m, p, r \ldots$ par une courbe, ce sera un nouveau méridien de la carte.

Prenant ensuite $mo = am$, $pq = bp$, $lr = rc, \ldots\ldots$ la courbe $oql\ldots$ sera encore un méridien; et ainsi des autres.

Bien entendu que, selon l'étendue de la carte, les parallèles pourront être tracés, si l'on veut, de 2° en 2°, ou de 5° en 5°; ou de 30′ en 30′, etc., en observant la même règle de construction.

345. Venons-en maintenant au calcul de la longueur des arcs am, $bp \ldots$ des parallèles. Soient BD, B′D′ (fig. 117) les rayons de deux de ces cercles sur le globe terrestre; les circonférences sont comme les rayons; et comme BD est le sinus de l'arc AB, étant A le pôle, ou le cosinus de la latitude l du lieu B, on a $\frac{\text{circ. BD}}{\text{circ. B'D'}} = \frac{\cos l}{\cos l'}$. Ainsi *deux arcs de parallèles qui ont mêmes graduations, sont entre eux comme les cosinus de leurs latitudes.* Prenons l'un de ces arcs sur l'équateur; à cause de $\cos l' = 1$, on a

$$\text{arc de D degr. de paral.} = \cos l \times \text{arc d'éq. de D degr. de mér.};$$

et comme sur notre carte on a pris, à volonté, la distance ab pour représenter cet arc de D degrés de l'équateur, dont on a fait une échelle, par exemple, de 1000 parties, on voit qu'il faut multiplier par 1000 les cosinus des latitudes l des cercles qui doivent entrer dans la projection.

346. Nous donnons ici, pour une échelle de 1000 parties, comprises dans *ab* (fig. 123), le nombre de parties qui forment *am*, *bp*, *cr*, etc.... Ainsi l'on reconnaît que si MN est le cercle de 60° de latitude, la distance *am* est moitié de *ab*, parce que le degré de parallèle = 500. Celle de *bp* pour 61° est 484,81; celle de *rs* pour 62° est 469,47 etc., ces longueurs étant prises sur l'échelle dont *ab*, *bc*, *cd*... contient 1000 parties égales. Ce sont tous les cosinus pour le rayon 1000.

Table des degrés de latitude, le degré de l'équateur étant 1000.

LATIT.	COSINUS.	LATIT.	COSINUS.	LATIT.	COSINUS.	LATIT.	COSINUS.
0°	1000,00	23°	920,51	45°	707,11	67	390,73
1	999,85	24	913,55	46	694,66	68	374,61
2	999,39	25	906,31	47	682,00	69	358,37
3	998,63	26	898,79	48	669,13	70	342,02
4	997,56	27	891,01	49	656,06	71	325,57
5	996,20	28	882,95	50	642,79	72	309,02
6	994,52	29	874,62	51	629,32	73	292,37
7	992,55	30	866,03	52	615,66	74	275,64
8	990,27	31	857,17	53	601,82	75	258,82
9	987,69	32	848,05	54	587,79	76	241,92
10	984,81	33	838,67	55	573,58	77	224,95
11	981,63	34	829,04	56	559,19	78	207,91
12	978,15	35	819,15	57	544,64	79	190,81
13	974,37	36	809,02	58	529,92	80	173,65
14	970,30	37	798,64	59	515,04	81	156,43
15	965,93	38	788,01	60	500,00	82	139,17
16	961,26	39	777,15	61	484,81	83	121,87
17	956,31	40	766,04	62	469,47	84	104,53
18	951,06	41	754,71	63	453,99	85	87,16
19	945,52	42	743,15	64	438,37	86	69,76
20	939,69	43	731,35	65	422,62	87	52,34
21	933,58	44	719,34	66	406,74	88	34,99
22	927,18	45	707,11	67	390,73	89	17,45

347. Sans plus de difficulté, on peut, dans cette projection, tenir compte de l'aplatissement de la terre. On ne divise plus le méridien du milieu AB (fig. 123) en parties égales, mais on prend ces parties de mêmes longueurs croissantes vers le pôle que les arcs de 1° du méridien. Ainsi en France cet arc *ab* sera de 57012 toises, ou 111120 mètres à 45° de latitude : près de Dunkerque, on fera *dc* de 111266 mètres, etc.

En outre, on prendra les nombres qui expriment les arcs de 1° de parallèle dans la table II à la fin du livre, qui donne les longueurs de ces arcs à différentes latitudes.

Il reste ensuite à placer, sur ce réseau, chaque ville au point qu'indique sa longitude et sa latitude, à figurer les côtes, les rivières, les montagnes, etc.

Cette carte, dont Flamsteed a fait usage pour dessiner ses planisphères, a l'inconvénient de déformer beaucoup les régions eloignées du méridien du milieu AB : c'est ce qui a fait donner la préférence à la modification suivante, où les parallèles sont représentés par des arcs de cercle concentriques, comme dans la projection conique, p. 302.

Projection française, ou *du dépôt de la guerre.*

348. Après avoir tiré la droite verticale SO (fig. 118) au milieu de la carte, pour représenter le méridien moyen, on prendra sur cette ligne des longueurs *ab*, *bc*,... d'autant de parties d'une échelle arbitraire, que chaque degré du méridien contient d'unités métriques (par ex. environ 57012^tot ou 111120^m à 45° de latitude). On prend ensuite *a*S, comme n° 341, égal à la cotangente de la latitude du lieu central *a*. ou plutôt, pour avoir égard à l'aplatissement de la terre, on fera *a*S égal à la tangente du méridien elliptique au point qui a cette latitude centrale, tangente terminée à l'axe des pôles. (Cette longueur est KM, fig. 78.) Du centre S, on décrira les arcs *mn*, AB, MN, etc., par tous les points de division du méridien moyen SO; ce seront les représentations des parallèles. Sur chacun de ces arcs, on portera des parties égales aux longueurs respectives de l'arc de 1° sous les latitudes correspondantes. Par ex., si MN est le parallèle de 60 degrés, on prendra les parties égales, des deux côtés du point O, chacune de 28616 toises, ou 55774 mètres, qui est la longueur de l'arc de 1° de parallèle à cette latitude. (*Voy.* table II.)

On joint enfin les points de division de même rang sur ces arcs parallèles, par des lignes, et l'on obtient les méridiens, tant à droite qu'à gauche. Ces lignes forment une courbe qui

se présente ici avec la forme polygonale; mais comme on peut espacer les parallèles et les méridiens seulement de 40′ ou 30′ ou moins encore, ces petites lignes mises bout à bout se réunissent en forme de courbe. Dans les cartes qui représentent les lieux sur une grande échelle, on espace même les cercles de minute en minute, sauf à effacer ensuite ceux des arcs qu'on ne croit pas nécessaire de conserver.

349. A proprement parler, l'espace *ab* du méridien, qui sépare deux parallèles est arbitraire; il n'est déterminé que lorsque le rayon *sa* l'est lui-même : mais comme ce rayon est donné par la cot l, on a coutume de prendre à volonté l'arc *ab*, qui représente une longueur métrique connue; on prend cette distance sur une échelle de parties égales, appropriée à l'objet. Mais ensuite le rayon *sa* est déterminé, et $=\cot l$, qu'on trouve sur la même échelle, d'après la valeur numérique de ce rayon.

Pour tracer une carte selon la projection de Flamsteed modifiée, il est bon de calculer l'amplitude de l'arc moyen AB, par la formule *angle* $S = D \sin l$, p. 303, D étant le nombre de degrés de longitude que la projection doit embrasser, et l la latitude du parallèle moyen dont il s'agit; et l'on divise ensuite cet arc en parties égales, pour obtenir les points de section des méridiens. On évite ensuite les petites erreurs dues à ce qu'on regarderait l'arc de 1° comme égal à sa corde. Au reste, ce qu'on va dire de l'application du calcul à cette projection lève toutes les difficultés.

350. On est arrêté dans ces constructions par l'impossibilité de décrire des cercles d'un très grand rayon; car les régions qu'on veut figurer sont si étendues, le plus ordinairement, que le centre S se trouve trop éloigné pour que les plus grands compas puissent y suffire; cet inconvénient se rencontre surtout dans les basses latitudes. Il est donc préférable de déterminer les arcs de cercle par points, à l'aide du calcul : c'est ce que nous allons exposer.

On tracera, au milieu de la feuille, les perpendiculaires

indéfinies CA, N'N (fig. 119); N'AN représente le parallèle moyen de la carte; on connaît le rayon $CA = R \cot l$, R étant le rayon terrestre, et l'on suppose que la distance $CA = r$ est trop grande pour que le parallèle puisse être décrit d'un mouvement continu. La carte doit embrasser D degrés de longitude; ainsi l'angle $N'CN = C$ est connu et $= D \sin l$, l étant la latitude du parallèle N'AN. Faisons la corde $N'N = 2\alpha$, et la partie $CI = \mathfrak{C}$; ces lignes sont connues, car le triangle rectangle NCI donne

$$NI = \alpha = r\sin\tfrac{1}{2}C, \quad CI = r\cos\tfrac{1}{2}C = \mathfrak{C}, \quad AI = r(1 - \cos\tfrac{1}{2}C),$$
$$AI = 2r\sin^2\tfrac{1}{4}C \text{ (éq. 6, p. 35).}$$

On a donc les limites N, N' de l'arc en longitude, et son point A de rencontre avec le méridien principal. L'éq. du cercle dont l'origine est en C est $x^2 + y^2 = r^2$; pour la porter en I, il faut changer x en $x + \mathfrak{C}$, et l'on trouve $(x + \mathfrak{C})^2 = r^2 - y^2$,

$$x = \sqrt{(r+y)(r-y)} - \mathfrak{C}.$$

Pour un point M de l'arc, $IP = y$, $PM = x$. On divisera IN en parties égales, et pour chaque point de division, on trouvera l'x correspondant; en sorte qu'on obtiendra autant de points qu'on voudra de l'arc AN, et par conséquent de AN', qui lui est symétrique.

351. Si l'on veut tracer les droites NC, N'C tendantes au point éloigné C, on se servira du théorème suivant.

Lorsque deux lignes ba, dc (fig. 120) concourent en C, on peut, sans connaître ce point C, tirer d'un point f donné, une droite fg qui concoure en ce même point C. En effet, menez ac, bd, parallèles quelconques, puis la droite fd, et par le point c, sa parallèle indéfinie ch; vous aurez les proportions

$$Cd : Cc :: bd : ca, \quad Cd : Cc :: df : cg;$$

on a donc $bd : ca :: df : cg$. Portez donc sur ch la longueur cg,

quatrième proportionnelle à bd, ca et df, la ligne fg ira concourir au point C.

352. Il ne reste plus qu'à diviser en parties égales l'arc NAN′ (fig. 119) pour avoir les points de section des méridiens avec ce parallèle ; et même s'il s'agissait ici de la projection conique, on tracerait ces méridiens, puisqu'ils sont, dans ce cas, des droites concourantes en C. Il en est autrement dans la projection de Flamsteed modifiée.

A partir de A, milieu de la carte, on portera sur AC, tant en haut qu'en bas, des longueurs égales à l'arc de 1° de méridien, et il restera à tracer, par points, chacun des parallèles passant par ces divisions et dont les rayons r', r''... sont visiblement connus. On pourra donc, pour chacun de ces arcs, se servir des mêmes formules, en y prenant r', r'',... au lieu de r.

Mais comme nous faisons abstraction, dans ce qui précède, de l'aplatissement de la Terre, il convient de généraliser cette théorie.

353. *Étant données la longitude* Λ *et la latitude* λ *d'un lieu, trouver les coordonnées rectangles* x *et* y *du point de la carte où ce lieu est situé* (fig. 121).

Soit C le centre de la projection, AK le parallèle du milieu, dont la latitude est l; BM un autre parallèle dont la latitude est λ; M le point dont il s'agit, dont les coordonnées sont $AP = x$, $PM = y$; AX étant tangent en A et perpendiculaire au méridien principal CA, on a $AB = s =$ distance en latitude des deux parallèles ; cette longueur s est connue par l'éq. (19), p. 186, et représente un arc de méridien de $(\lambda - l)$ degrés. Le rayon $CA = r$ du parallèle moyen est aussi connu : c'est la longueur KM (fig. 78) qui, dans le triangle rectangle KMN, où $MN = N$ est la normale, a pour valeur $r = N \cot l$.

Soit encore θ l'angle ACM que font les deux rayons CB, CM, le triangle CQM donne, en faisant $CM = \rho$,

$$QM = x = \rho \sin\theta, \quad CQ = \rho \cos\theta,$$

$$y = PM = BQ + s = s + BC - CQ = s + \rho - \rho\cos\theta;$$

donc $x = \varrho \sin\theta$, $y = s + \varrho(1 - \cos\theta) = s + 2\varrho \sin^2\frac{1}{2}\theta$.

On peut même éliminer ϱ de cette dernière éq. à l'aide de la 1re

$$x = \varrho \sin\theta, \quad y = s + x.\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta} = s + x \tang\frac{1}{2}\theta.$$

ϱ est connu, puisque $\varrho = r - s$; ainsi il ne reste plus qu'à trouver θ, et l'on aura pour chaque point M de l'arc BM les deux coordonnées x et y. Bien enteudu qu'il faut prendre s en signe contraire pour les parallèles situés au-dessous de AK, c'est-à-dire quand la latitude λ du point M est $< l$.

La longitude donnée est Λ, c'est un arc d'équateur. Si l'on prend un arc de la graduation Λ sur le parallèle, la longueur de cet arc sera θ, puisqu'on détermine le point M sur la carte, en prenant BM d'autant d'unités métriques que cet arc de parallèle en contient sur la terre. Ainsi Λ et θ sont des arcs de même longueur, mais pris dans des cercles différens, dont les rayons sont ϱ pour θ, et x' pour Λ, x' ayant la valeur donnée p. 193 pour le rayon du parallèle, sous la latitude λ. (C'est OM, fig. 78.) On a donc $x' = N' \cos\lambda$, N' étant la normale en M, ou en B. Les nombres de degrés des arcs égaux Λ et θ étant entre eux en raison inverse de leurs rayons x' et ϱ, on a $\Lambda : \theta :: \varrho : x'$; d'où

$$\theta = \Lambda \cos\lambda.\frac{N}{\varrho}.$$

On peut donc marquer sur la carte tout point M dont on a la longitude Λ et la latitude λ : car on trouvera d'abord les normales N et N', les rayons r et ϱ, l'arc φ, et par suite les coordonnées x et y de ce point M.

354. Il est facile maintenant de comprendre comment on compose une carte, selon la projection dont il s'agit. On trace d'abord deux droites AC, AX perpendic. (fig. 126), passant par le milieu A de la feuille. Sur AC, à partir de A, on porte, tant en-dessus qu'en-dessous, des longueurs telles que AB, qu'on prend égales respectivement aux valeurs de s, c.-à-d. aux arcs de méridien répondant à 1°, 2°, 3°,... de distanec

de A, arcs qui vont en croissant vers le pôle, et qu'on a calculés préalablement sur la formule p. 193. (*Voy.* table II.)

On marque ensuite les points d'intersection des divers méridiens et parallèles, ou les angles des quadrilatères curvilignes formés par les incidences de ces arcs projetés. Pour cela on calcule toutes les normales N, N',... de degré en degré, les rayons ρ des parallèles projetés, enfin les amplitudes des angles θ qui répondent à des valeurs de A et λ, variant aussi par degrés; d'où résultent les longueurs des coordonnées x, y, correspondantes, qui fixent la position de chaque sommet de nos quadrilatères; et observez qu'en calculant r, et changeant ρ en r dans nos formules, elles s'appliquent aussi au parallèle moyen. Il ne reste plus qu'à porter ces longueurs sur la carte, en prenant les parties sur une échelle à volonté.

355. Par ex., pour la carte de France, le parallèle moyen étant à 45°, on fera, dans l'éq. (19), p. 186, $p = 309{,}65$, $l' = 45°$, $l - l'$ ou $\lambda = \varphi$, $l + l'$ ou $L = 90° + \varphi$, avec les constantes α, β, γ dont la valeur est donnée p. 19, et il viendra pour la différence φ en latitude,

$$S = 111\,119^m{,}2 \times \varphi + 30889^m{,}37 \sin^2\varphi - 15^m{,}437 \sin 4\varphi.$$

φ est négatif pour les arcs de 45° jusqu'à l'équateur. Donc

de 45° à 41°, $s = 444\,331^m{,}3$,		de 45° à 46°, $s = 111\,127^m{,}5$,
à 42...... 333 276, 0,		à 47...... 222 274, 0,
à 43...... 222 203, 0,		à 48...... 333 438, 8,
à 44...... 111 110, 9,		à 49...... 444 623, 0.

On cherche ensuite les rayons ρ en retranchant ces derniers arcs de r, puis les normales N consécutives. De là on évalue le rapport de chaque normale à ρ, et l'on cherche toutes les grandeurs θ relatives à un même parallèle, pour des quantités A variant de degré en degré. Enfin on calcule les nombres x et y correspondans.

Des tables étendues ont été calculées par Plessis, et servent

de base aux constructions des cartes du dépôt de la guerre. (*Voy.* ces tables à la fin de la *Topographie* de M. Puissant.)

356. Le territoire que l'on veut représenter sur la carte est ordinairement trop étendu pour être contenu dans une seule feuille : on est dans l'usage de former cette carte par la réunion bord à bord d'une série de feuilles dont les cadres sont de 8 décimètres sur 5. Chaque feuille est dessinée et gravée à part. Pour trouver les positions des angles des quadrilatères sur ces cartes, on transporte l'origine des coordonnées à l'un des angles du cadre, opération qui consiste simplement à ôter ou ajouter une, deux, trois fois,..., 8 décimètres aux x, et 5 aux y, selon la place que cette feuille doit occuper dans l'assemblage général.

Et quant à l'ordre qu'observent ces feuilles entre elles, on le marque par des chiffres qui désignent, l'un le rang horizontal, l'autre le vertical, en inscrivant ces chiffres sur les deux bords du cadre les plus voisins du centre A de la carte. C'est ce que montre la figure 122. Ainsi la carte $\overset{2}{\boxed{}}\,_3$ est celle qui est la 2ᵉ dans le sens horizontal et la 3ᵉ dans le sens vertical, à compter du centre A où se croisent le méridien et le parallèle moyens. Les chiffres sont inscrits sur les côtés qu'il faut coller pour réunir la feuille à celles qui, étant plus près qu'elle de A, ont été collées les premières.

Ces cartes, ainsi assemblées, forment une seule grande carte; et comme chacune contient une partie des arcs de méridiens et de parallèles, il faut qu'après l'assemblage ces courbes s'ajustent bout à bout sans jarrets, ni solution de continuité.

357. Quant au problème inverse de celui qui a été résolu ci-dessus : *trouver la longitude et la latitude d'un point donné sur la carte*, nous jugeons inutile d'en donner ici les formules. Comme les courbes des parallèles et des méridiens sont sensiblement des lignes droites, et que les quadrilatères formés par

ces lignes sont à fort peu près des parallélogrammes, on n'a point à craindre d'erreur notable, en menant par le point donné des parallèles aux côtés du quadrilatère où il est renfermé, et à évaluer sur l'échelle les fractions que ces lignes forment entre elles.

Nous remettons à traiter des cartes plates et réduites, lorsque nous parlerons des méthodes d'en faire usage dans la *navigation*.

Chap. VII. — Géomorphie Astronomique.

358. La Géomorphie n'a pas de procédés astronomiques qui lui soient particuliers; lorsqu'elle interroge les corps célestes pour déterminer l'heure, la longitude, la latitude, etc., elle se sert des méthodes ordinaires en Astronomie; seulement elle n'emploie que celles qui conduisent aux résultats qu'elle veut obtenir, qui ont le degré de précision qu'elle exige. Elle ne s'occupe pas de la marche des comètes et des planètes, de l'art de composer et de corriger les tables, de prédire les mouvemens célestes, et d'une foule d'autres sujets. Pour compléter ce qui a été exposé jusqu'ici, il convient de donner les procédés usités en Géomorphie pour résoudre les problèmes qu'on s'y propose. Mais avant tout, nous devons, pour nous faire comprendre, présenter une récapitulation des principes d'Astronomie dont nous ferons usage par la suite, et un aperçu des mouvemens du ciel, et de la marche propre de certains astres.

Sur les étoiles.

359. Les étoiles que nous voyons briller au firmament ont été appelées *fixes* parce qu'elles sont en effet immobiles dans l'espace, ou du moins les mouvemens qu'on observe dans quelques-unes sont si petits, qu'il faut un temps considérable pour que leurs déplacemens puissent être perceptibles : ces astres conservent donc leurs distances mutuelles. Les arcs que nous pouvons concevoir de l'une à l'autre affectent dif-

férentes figures géométriques que l'œil saisit et reconnaît aisément, et ces figures restent constamment les mêmes avec les mêmes dimensions. Lorsqu'on jette les yeux au ciel; on reconnaît bientôt que les étoiles paraissent toutes entraînées d'un mouvement commun, mais elles ne changent pas pour cela de lieu dans l'espace : c'est la terre qui, tournant sur son axe en 24 heures, d'occident en orient, produit cette illusion par laquelle le ciel entier nous paraît tourner autour de nous de l'est à l'ouest. Nous voyons les étoiles se lever, monter, et descendre, ainsi que le soleil, la lune et les planètes, parce que la rotation diurne de la terre sur son axe nous porte à attribuer à tous ces astres notre propre mouvement en sens contraire.

L'illusion de la rotation du ciel étoilé nous offre les mêmes apparences que si l'on supposait toutes les étoiles attachées, chacune en un lieu fixe, sur une sphère d'un immense rayon, au centre de laquelle la terre serait immobile, tandis que cette sphère tournerait en 24 heures autour de nous. Ce mouvement est parfaitement uniforme, et sa durée, pour un tour entier, est ce qu'on appelle le *jour sidéral* (*voy.* ci-après, n° 390). Le soleil, la lune et les planètes nous paraissent aussi entraînés par ce mouvement universel, avec cette exception importante à remarquer, que ces corps ne restent pas fixés, comme les étoiles, sur cette sphère mobile : ils y ont un mouvement propre, chacun dans un cercle et avec une vitesse particulière; toutes ces directions vont d'occident en orient. Le soleil décrit sa circonférence en un an ; la lune parcourt la sienne en 27 jours $\frac{1}{3}$, etc. Mais il ne faut pas oublier que cette sphère mobile sur laquelle nous venons de considérer les astres comme placés en un lieu fixe ou variable, n'est qu'une conception propre à donner une idée du mouvement diurne du ciel, et que cette conception est fausse en elle-même, puisque c'est réellement l'effet de la rotation de la terre sur son axe.

Puisque les étoiles conservent les configurations géométriques qu'elles forment entre elles, il est bien facile de les re-

connaître à ces figures, à leurs alignemens, et à l'éclat de leur lumière : car ces choses restent invariables, à quelque instant qu'on jette la vue sur le firmament, et quelle que soit la position générale de cette sphère étoilée, ou le lieu de la terre d'où nous la voyons. L'astronome doit être capable d'assigner à chacune de ces étoiles qu'il aperçoit, le nom qu'on lui a donné, et même d'en indiquer la place actuelle le jour, la nuit, ou derrière les nuages.

Cet éclat que jettent les étoiles les a fait distinguer les unes des autres par *leurs grandeurs*. Ce n'est pas qu'en effet nos instrumens nous apprennent que plusieurs soient plus grandes ou plus petites ; car, vues dans les lunettes à fort grossissement, ce ne sont que des points étincelans, sans dimensions apparentes : le degré de vivacité de leur lumière est seul différent, et permet de les classer en *primaires*, *secondaires*, *tertiaires*, etc., ou de 1re, 2e, 3e... grandeur. Jusqu'à la 6e grandeur, on peut les apercevoir à l'œil nu, quand le ciel est très serein et que la nuit est profonde ; moins brillantes, il faut des lunettes pour les voir ; et il en est qui sont de la millième grandeur, et même d'un éclat encore moindre. L'observation ne porte guère que sur les plus brillantes, excepté dans quelques cas. Du reste, on comprend que la mesure de l'éclat est bien incertaine, et que n'étant que l'effet d'une sensation, il n'est pas rare que l'étoile qui est primaire pour l'un ne soit que secondaire pour un autre.

Cette lueur diffuse qui forme au ciel une ceinture irrégulière, et que nous voyons dans les nuits sereines, la *voie lactée*, n'est qu'un effet produit par une multitude d'étoiles imperceptibles même avec des télescopes assez forts, mais qu'on distingue bien quand on se sert de moyens optiques plus puissans. Chacun de ces astres ne donne pas assez de lumière pour nous rendre sa présence sensible, et il résulte de l'ensemble de cette myriade d'étoiles la teinte laiteuse que nous remarquons. Aucun de ces corps lumineux n'est l'objet de nos observations spéciales, non plus qu'une multitude d'autres; l'attention ne doit donc se porter que sur ceux que

leur éclat rend faciles à observer, et le nombre en est très peu considérable. L'astronome doit s'exercer à reconnaître ces derniers.

360. Pour dénommer les étoiles, on a imaginé de les grouper, et de donner un nom à chacun de ces groupes, appelés *constellations*, *astérismes*. On a imaginé de dessiner sur chaque constellation un animal, ou une autre image tout-à-fait arbitraire; il reste ensuite à indiquer la place que chaque étoile y occupe. C'est ainsi qu'on dit, la Queue du Lion, le Cœur du Scorpion, l'OEil du Taureau, etc. Il n'y a aucune ressemblance entre les configurations dont on se sert pour réunir les étoiles et ces images, et il ne faudrait pas chercher à reconnaître au ciel les constellations, en essayant de lier les étoiles par des arcs imitant la forme de ces animaux. L'origine de ces figures vient des usages religieux et des allusions astrologiques des anciens peuples; la tradition nous a transmis ces dénominations, que nous avons conservées, et qui ne sont pour nous que des symboles arbitraires.

On a donné des noms propres à plusieurs étoiles dont l'éclat est très remarquable, tels que Sirius, Regulus, Antarès, etc.; d'autres sont dénommées par leur place sur la figure, comme on vient de le dire; mais toutes le sont par une lettre grecque, ou italique, ou romaine, ou par un chiffre désignant l'ordre des passages au méridien. On comprendra donc aisément ce que les astronomes entendent par α de la Grande Ourse, β du Taureau, 3, 4, 5 d'Orion, etc. En jetant les yeux sur un planisphère ou un globe céleste, rien ne sera plus facile que de comprendre ce système de nomenclature, qui offre l'avantage de donner un nom à chaque étoile, sans charger la mémoire d'un immense vocabulaire. (*Voy.* l'*Uranographie.*)

Voici les noms des étoiles de première grandeur.

Sirius, l'Épaule droite d'Orion, son pied gauche, ou *Rigel*, l'OEil du Taureau, ou *Aldébaran*, la Lyre, ou *Wega*, *Arcturus*, la Chèvre, le Cœur du Scorpion, ou *Antarès*, l'Épi de

la Vierge, le Cœur de l'Hydre, *Regulus* ou le Cœur du Lion, sa queue, *Canopus*, *Fomalhaut* et *Achernar*. Des auteurs ajoutent *Ataïr*, *Procyon*, *Castor*, la Queue du Cygne. La *Connaissance des Tems* se sert de neuf principales étoiles pour les distances lunaires (*voy*. n° 523), savoir : Regulus, Fomalhaut, α Pégase, α Bélier, Aldébaran, Pollux, Antarès, *Ataïr* et l'Épi de la Vierge. Leur position près de l'écliptique d'une part et d'une autre leur éclat, qui permet de les voir dans le crépuscule, en même temps que l'horizon de la mer, les rendent propres à donner au marin la longitude du lieu qu'il occupe sur le sphéroïde terrestre. Plusieurs planètes réunissent aussi ces conditions (n° 523).

On doit considérer les étoiles comme des corps lumineux par eux-mêmes, comme de véritables soleils, trop éloignés de nous pour nous éclairer et nous envoyer de la chaleur. Plongées dans les profondeurs de l'espace, leur éclat varie avec leur volume et leur distance ; et cette distance est véritablement immense, puisqu'une unité de 70 millions de lieues ne suffit pas pour la mesurer. Le soleil est une étoile beaucoup plus rapprochée de nous que les autres.

Il faut donc, avant tout, connaître les constellations et les principales étoiles qui les composent. Ne pouvant donner ici, à ce sujet les développemens nécessaires, nous renvoyons, pour plus de détails, à l'*Uranographie*. Contentons-nous de faire l'énumération des constellations les plus remarquables, et de donner le moyen de les distinguer. En se plaçant dans la direction du méridien, et suivant la progression du mouvement de la sphère céleste, on voit passer chaque étoile à son tour dans ce plan, ce qui suffit pour la reconnaître, à l'aide d'un catalogue, où ces astres sont rangés dans l'ordre même de leur passage par ce plan. (*Voy*. l'ouvrage cité et l'*Astronomie pratique*.) Mais on peut arriver plus promptement au but par la méthode des alignemens, dont nous allons présenter un aperçu.

361. Qu'on tourne le dos au sud durant une belle nuit, et

l'on verra plusieurs constellations faciles à reconnaître, et qui serviront ensuite à distinguer les autres.

La grande Ourse, appelée aussi le *Chariot*, est formée de six étoiles de seconde grandeur et d'une de troisième : de ces sept étoiles, quatre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, imitent un grand quadrilatère, et les trois autres forment la queue, ε, ζ, η, en ligne courbée selon le prolongement de la diagonale. Cette belle constellation est du nombre de celles qui ne se couchent pas, pour notre climat, et qu'on peut voir dans toute nuit sereine, ainsi que les deux suivantes. (*Voy*. fig. 108.)

La *petite Ourse* a la même figure à peu près que la grande, mais sous de moindres dimensions et dans une position tout-à-fait inverse ; ses étoiles ont un éclat faible, et trois sont de troisième grandeur, situées aux denx extrémités ; les quatre autres ne sont que quartaires. Ce qu'il faut surtout remarquer dans cette constellation, c'est l'*étoile polaire*, qui est si voisine du pôle qu'elle paraît immobile au ciel, et semble être le pivot fixe autour duquel tourne la voûte céleste. Les cercles diurnes parcourus par les étoiles s'agrandissent de plus en plus à mesure qu'elles s'écartent de la Polaire, qui semble être leur centre commun. (*Voy*. fig. 118.)

Prolongez le côté $\alpha\beta$ du quadrilatère de la grande Ourse, celui qui est opposé à la queue, vous arrivez sur la polaire α, ce prolongement ayant à peu près pour longueur celle de la Grande Ourse entière. Comme la Polaire est la seule remarquable dans cette partie du ciel, elle est fort aisée à reconnaître. Tous les cercles horaires viennent se croiser près d'elle : le pôle en est à 1°36′ de distance, sur l'arc qui va de la Polaire à l'étoile ε, la première de la queue de la grande Ourse ; ou sur le prolongement de l'arc qui va de la Polaire à γ Cassiopée.

Cassiopée est de l'autre côté du pôle par rapport à la Grande Ourse, l'une à l'est, l'autre à l'ouest ; ou bien l'une près de l'horizon boréal, quand l'autre est vers le zénith, selon l'heure ou la saison. C'est un groupe d'étoiles de 3ᵉ et 4ᵉ grandeur, qu'on reconnaît à sa forme en *y*, à queue courbée. Quelques personnes y trouvent aussi la figure d'une *chaise*

renversée. Une fois qu'on a vu cette constellation, il est impossible de l'oublier, et on la reconnaît sur-le-champ. Comme les étoiles font un tour entier autour du pôle, chaque jour, elles prennent diverses positions relatives, par rapport à l'horizon ; la Chaise est debout, couchée, ou renversée, selon les heures et les saisons ; mais dans les soirées d'hiver, elle a cette dernière position.

Toutes les constellations que nous allons décrire se voient au sud, ou à l'est, ou à l'ouest, selon l'instant où on les observe ; et ce n'est plus vers le nord qu'il faut tourner ses regards pour les apercevoir.

En s'éloignant du pôle, on rencontre trois constellations qui semblent n'en composer qu'une seule très étendue, parce que les étoiles s'y réunissent en une figure assez facile à saisir.

Pégase, ou la *Grande Croix.* L'arc de α à β de la Grande Ourse qui a conduit sur la Polaire, étant prolongé d'une quantité égale, passe près de Cassiopée, et va traverser Pégase. C'est un grand carré α, β, α, γ, formé de quatre belles étoiles secondaires, près duquel deux tertiaires η, ζ sont sur une parallèle au côté α β. Le carré de Pégase et celui de la Grande Ourse sont de côtés opposés du pôle, et viennent passer au sud à 12 heures d'intervalle l'un de l'autre.

Prolongez la diagonale α α de Pégase, vous rencontrez trois étoiles secondaires α, β, γ d'*Andromède*, dont la première α fait partie du carré de Pégase. Prolongez encore cette même ligne, et vous arrivez sur α de *Persée*, aussi de seconde grandeur, située au milieu d'un arc oblique δ α γ η.

Voilà donc sept étoiles secondaires imitant à peu près la forme de la Grande Oruse, savoir, un carré et une queue dirigée selon le prolongement de la diagonale ; mais ici la queue est presque droite et se termine par l'arc de Persée. Ces étoiles, moins proches du pôle que la Grande Ourse, occupent aussi une étendue baucoup plus considérable.

Le *Cocher* forme un grand pentagone irrégulier α β θ β ι, où se trouvent trois belles étoiles en triangle isoscèle α β β. L'une d'elles est la *Chèvre*, une des plus brillantes du ciel. A de cer-

taines heures elle rase l'horizon boréal; 12 heures après elle passe près du zénith de Paris. On remarque près de la Chèvre un triangle isoscèle très allongé, formé de trois petites étoiles quartaires; ce triangle, facile à remarquer, sert à faire distinguer la Chèvre de toutes les étoiles primaires. En prolongeant l'arc de Persée, on voit deux files divergentes de petites étoiles, dont l'une, vers l'orient, va à la Chèvre, l'autre au sud, formant d'abord une courbure opposée, se dirige sur les *Pléïades.*

En prolongeant la queue courbe de la Grande Ourse, on va sur le *Bouvier,* dont l'étoile α est *Arcturus,* belle étoile de première grandeur.

La Lyre, ou *Wega,* est une belle étoile primaire, opposée à la Chèvre par rapport au pôle; quand l'une est en haut sur nos têtes, l'autre est près de l'horizon nord. Au sud-est de Wega est un triangle formé par trois étoiles tertiaires.

L'*Aigle* est une constellation au sud-est de la Lyre; on y remarque trois belles étoiles voisines et en ligne droite, dont celle du milieu est de première grandeur; on la nomme *Altaïr,* ou *Ataïr.*

Le *Cygne* est entre la Lyre et Pégase, et forme une grande croix de cinq étoiles assez belles, surtout celle de la tête de la croix, qui est appelée la Queue du Cygne; elle vient passer à notre zénith.

362. Les douze constellations du zodiaque sont celles que le Soleil et les planètes traversent successivement, par un mouvement constant dirigé de l'ouest à l'est; elles forment une zone circulaire et oblique sur la voûte céleste, et la moitié à peu près est au-dessus de l'horizon : mais participant au mouvement diurne général, ces constellations apparaissent successivement et s'élèvent plus ou moins selon leurs situations relatives sur cette zone. Deux vers latins les énoncent dans l'ordre de leur apparition;

Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.

Ces constellations ne sont pas toutes remarquables par de belles étoiles, et il suffit de savoir reconnaître les principales; on trouve bientôt la place des autres au ciel, d'après leur rang dans la série précédente, chacune étant toujours située à l'est de la constellation dont le nom précède le sien. On ne les voit que de l'est au sud et à l'ouest.

Le *Bélier* a deux étoiles tertiaires très voisines αβ, et une quartaire au-dessous du prolongement de la ligne qui joint celles-ci.

Le *Taureau* imite la forme d'un grand V. L'étoile qui termine la branche orientale est primaire; on la nomme *Aldébaran*. Les *Pléiades*, sont un groupe d'étoiles petites et serrées, qu'on voit au nord-ouest du Taureau.

Les *Gémeaux* forment au ciel un grand quadrilatère oblique et long. *Castor* et *Pollux* sont deux belles étoiles assez voisines, situées aux angles supérieurs.

Le *Lion* imite un grand trapèze formé par quatre belles étoiles; deux primaires sont à la base inférieure, *Regulus* à l'ouest, et la *Queue du Lion* à l'est; les deux autres sont de seconde grandeur.

La *Vierge* a cinq étoiles tertiaires disposées en V, dont les branches sont obliques et ouvertes à angle droit. L'*Épi* est un peu plus bas, au sud-est; c'est une belle étoile primaire.

La *Balance* a quatre étoiles principales, dont une est assez belle, et les trois autres de troisième grandeur; elles sont disposées en quadrilatère.

Le *Scorpion* s'élève très peu sur notre horizon; il est remarquable par une file d'étoiles courbées en *ſ*, ayant à sa pointe supérieure *Antarès*, belle étoile de première grandeur: un peu plus haut, vers la droite, on voit des étoiles disposées en arc dont la concavité regarde Antarès; une de celles-ci est secondaire.

Le *Sagittaire* est distingué par un petit quadrilatère oblique, et un arc vertical situé vers l'ouest; cet arc est croisé par une file en ligne droite; c'est l'image d'un arc et de sa flèche.

Le *Capricorne* est situé sous l'aigle.

Le *Verseau* a deux triangles dont les bases sont situées sur une même droite avec la file du Capricorne : ces triangles sont l'un grand et l'autre petit, et ont leurs sommets à peu de distance de leur base.

Les *Poissons* sont distingués par deux files sinueuses de petites étoiles, assez peu visibles ; l'une des files se perd à la ceinture d'Andromède, et l'autre s'étend sous le carré de Pégase. Ces deux files se joignent vers le sud-est, et l'on y voit une étoile de troisième grandeur qui est la seule remarquable dans cette constellation.

Il est utile de s'exercer à reconnaître ces douze constellations zodiacales, parce que les belles planètes, la Lune, et le Soleil se trouvent toujours situés en quelque lieu de cette zone.

Orion est la plus belle constellation du ciel : on le voit briller le soir et toute la nuit au sud, pendant l'hiver et le premier printemps. Il est placé un peu au-dessous d'Aldébaran, du Cocher et des Gémeaux. Il est formé de quatre belles étoiles dont deux α et β sont primaires, celle-ci est *Rigel ;* les deux autres sont secondaires : elles forment un vaste quadrilatère, qui est presque un parallélogramme. Au milieu, on voit trois belles étoiles de seconde grandeur, rapprochées et sur une ligne droite oblique ; c'est le *Baudrier ;* l'*Épée* est une traînée de petites étoiles.

En prolongeant la ligne des trois étoiles du baudrier d'Orion, du côté de l'horizon oriental, ou vers le sud-est, on est conduit sur *Sirius*, la plus belle étoile du ciel ; elle fait partie du Grand-Chien, qui a plusieurs étoiles secondaires qu'on voit près de l'horizon.

Au-dessous des Gémeaux est le Petit-Chien, formé de deux étoiles rapprochées, l'une primaire, qui est *Procyon*, l'autre tertiaire. Procyon, Sirius, et α d'Orion forment un grand triangle équilatéral.

L'*Hydre* est une immense file sinueuse d'étoiles sous le Lion et la Vierge. Le *Cœur de l'Hydre* est une étoile secondaire sur le prolongement du côté occidental du trapèze du Lion.

Fomalhaut est une étoile de première grandeur située très bas sur le prolongement du côté occidental du carré de Pégase : on ne la voit, dans nos contrées, qu'en automne et en hiver, près du sud.

Mouvement propre du Soleil.

363. Le Soleil est un corps 13 à 14 cents fois plus volumineux que la Terre, et lumineux par lui-même. A proprement parler, ce foyer de chaleur et de lumière, est une véritable étoile, immobile dans l'espace comme le sont les étoiles; mais le rapprochement en accroît le volume apparent : les dimensions du Soleil ne nous paraissent plus considérables que celles des étoiles, que parce que celles-ci sont immensément loin de nous.

Lorsqu'on compare le Soleil à quelque étoile brillante qui en est peu écartée, on reconnaît que le Soleil paraît changer de place à l'égard de l'étoile; elle s'en rapproche, si elle est à gauche. Ainsi, lorsque, vers le coucher du Soleil, nous voyons une belle étoile à l'occident, cette étoile, dans les jours suivans, nous semble se rapprocher de l'astre de plus en plus, puis se coucher peu après lui, puis se plonger dans les flots de sa lumière, et disparaître. Quelques jours après, on aperçoit de nouveau l'étoile, le matin, un peu avant le lever du Soleil, du côté de l'orient : puis dans les jours suivans, elle s'en éloigne de plus en plus, vers la droite, devançant le lever de l'astre, et s'écartant sans cesse.

Comme les étoiles sont immobiles sur la voûte céleste, ce ne sont pas elles qui se déplacent ainsi pour atteindre le Soleil, et le dépasser d'un mouvement de gauche à droite, quoique les constellations semblent participer toutes ensemble à cette marche annuelle apparente; c'est, au contraire, le Soleil qui paraît traverser ainsi toutes les constellations placées sur sa route, par un mouvement dirigé de l'ouest à l'est, en accomplissant la révolution entière dans le cours de l'année. Ces constellations, appelées *zodiacales*, sont in-

diquées p. 322, dans l'ordre où elles sont successivement traversées.

364. Cette progression du Soleil se compose avec la révolution diurne du ciel ; en sorte que voici l'effet apparent : la Terre étant immobile en un lieu de l'espace, la sphère étoilée fait chaque jour un tour entier sur l'axe des pôles (en 24 h. sidérales), pendant que le Soleil, quoique entraîné par cette révolution générale, décrit, en sens contraire, sur cette voûte un arc de grand cercle d'un degré environ, et se trouve avoir parcouru ce cercle entier en un an.

Dans la réalité, le Soleil est immobile comme toute étoile; c'est au contraire la Terre qui tourne chaque jour sur son axe, en même temps qu'emportée dans l'espace, elle accomplit autour du Soleil une révolution entière en un an; et nous attribuons à cet astre tous les mouvemens que nous faisons nous-mêmes. Par ex., au bout de six mois, nous rapportons le Soleil aux constellations diamétralement opposées à celles où il nous paraissait placé. La Terre changeant sans cesse de place au ciel, nous voyons à la même heure de nuit, des constellations différentes sur l'horizon, dans les différentes saisons : ce qui explique pourquoi le ciel d'hiver n'est pas le même que celui d'été.

365. La rotation diurne de la Terre, nous la traduisons de même par celle du ciel étoilé, ce qui produit la révolution des astres chaque jour, leur lever, leur coucher, leur passage au méridien. Ainsi, la translation de la Terre donne l'apparence du mouvement du Soleil d'occident en orient, selon un arc d'à peu près un degré chaque jour, traversant les constellations zodiacales; la rotation diurne de la Terre nous fait croire que le ciel fait un tour entier en 24 h. sidérales, autour de nous. L'*orbite* que nous parcourons, et que le Soleil nous semble parcourir en une année, est appelée *écliptique* : cette courbe fermée est une ellipse tracée sur un plan dans l'espace, et le Soleil réside immobile à l'un des foyers. L'axe diurne de rotation de la Terre est oblique à ce plan; l'équateur le coupe selon une ligne qui va d'un équi-

noxe à l'autre : ces deux plans font un angle de 23° 28', qu'on appelle *obliquité de l'écliptique*, angle qui est la cause de la succession des saisons. (*Voy.* l'*Uranographie.*)

366. Les réalités nous importent peu ici, puisque les apparences sont seules observées. Ainsi nous considérerons la Terre comme fixe et immobile dans l'espace, le ciel étoilé comme tournant autour d'elle de l'est à l'ouest, en un jour sidéral, entraînant tous les astres dans sa révolution; et, en même temps, le Soleil, la Lune, les planètes comme glissant sur la voûte céleste, et décrivant un petit arc chaque jour de l'ouest vers l'est.

La courbe que nous paraît décrire le Soleil autour de nous n'est pas un cercle, mais une ellipse, dont le plan est oblique à l'équateur. Cette ellipse, que la Terre décrit en effet autour du Soleil, a son foyer au centre de cet astre, et nous jugeons que ce foyer est au contraire au centre de la Terre. Nous sommes plus près du Soleil en janvier qu'en juin : le diamètre de l'astre nous semble un peu plus grand en hiver qu'en été, et nous paraît varier lentement de grandeur et de distance entre des limites fort étroites, attendu que l'ellipse est peu différente d'un cercle.

Mouvement propre de la Lune.

367. La Lune tourne réellement autour de la Terre, et son orbite est une ellipse, dont le foyer est au centre de la Terre. La Lune est si petite, qu'elle est fortement influencée dans sa marche par l'attraction solaire, qui déforme sans cesse cette ellipse, et même la déplace peu à peu dans l'espace; en sorte que le grand axe et les deux sommets tournent autour de nous, et que l'intersection de son plan avec celui de l'écliptique, appelée *ligne des nœuds*, change aussi de place.

La marche de la Lune est troublée par plusieurs inégalités, qu'on sait heureusement calculer et prédire. C'est en 27 jours $\frac{1}{3}$ à peu près que la Lune accomplit sa révolution autour de notre globe, décrivant environ 13° 10' par jour, de l'occident vers l'orient.

368. Le Soleil est à environ 35 millions de lieues de nous, à peu près 24096 rayons terrestres; mais la Lune n'est éloignée que de 60 de ces rayons, ou de 90 mille lieues, c.-à-d. 400 fois plus rapprochée que le Soleil; et pourtant nous jugeons que ces astres ont même volume; du moins la différ. apparente est fort petite, et l'un ou l'autre nous paraît tour à tour plus volumineux. On conçoit que le grand rapprochement de la Lune à notre égard, et les variations de sa distance causées par l'excentricité de son ellipse, suffisent pour expliquer ces apparences. La Lune n'a que 780 lieues de diamètre; celui de la Terre est de 3200 lieues; la 1re n'a que les $\frac{3}{11}$ du diamètre de la 2me. La Lune n'est donc qu'un très petit globe, quoiqu'elle nous semble égaler le Soleil; son volume n'est que le 49e de la Terre, qui n'est lui-même que les 13 millionnièmes de celui du Soleil.

369. La Lune ne brille que d'une lumière empruntée du Soleil : ses phases sont l'effet du mode de réflexion, et des lieux relatifs que ces astres occupent à notre égard. S'ils sont dans la même région du ciel, la Lune, qui se trouve à peu près entre nous et le Soleil, ne tourne de notre côté que la face obscure, que nous ne pouvons voir. Ils passent ensemble à peu près au méridien; c'est ce qu'on appelle la *néoménie*, la *nouvelle lune*, la *conjonction*. Au contraire, si la Lune est opposée au Soleil, tout le disque éclairé est tourné vers nous; nous la voyons sous la forme d'un cercle lumineux; c'est la *pleine lune*, l'*opposition*. Ces deux états sont désignés par le nom commun de *syzygies* : ils sont séparés par une succession de phases, croissantes d'abord, décroissantes ensuite. Le premier et le dernier quartier sont les époques où la Lune est en *quadrature*, ou à 90° du Soleil; elle ne nous montre que le quart de son disque. Il faut environ 29j $\frac{1}{2}$ pour accomplir cette période d'effets de lumière; qui se reproduisent sans cesse.

370. Quand la Lune se place directement entre nous et le Soleil, elle nous cache cet astre; il y a *éclipse de Soleil*, et par conséquent néoménie. Si la Lune se trouve directement op-

posée au Soleil, elle entre dans le cône d'ombre projetée par la Terre; il y a *éclipse de Lune*, et par conséquent pleine Lune. Il arrive souvent que la Lune s'interpose entre les étoiles et nous, et les cache par son opacité; c'est ce qu'on appelle une *occultation*.

Des tables astronomiques et de leur usage.

371. L'étude qu'on a faite des mouvemens célestes a permis d'en connaître, avec une extrême précision, les lois, la direction et la vitesse. Les formules qui expriment les mouvemens ont été réduites en tables, d'où l'on tire, par de simples additions, des nombres qui donnent la position de chaque astre à tout instant. C'est, par ex., à l'aide de ces tables que le Bureau des longitudes compose la *Connaissance des Tems*, ouvrage qui donne, pour tous les jours de l'année, les lieux occupés au ciel par le Soleil, la Lune, les planètes, les étoiles, l'instant de leur lever, de leur coucher, etc. Les Anglais, les Prussiens, les Italiens, les Danois, etc., publient aussi des *éphémérides* de ce genre. Comme c'est de ces livres qu'on tire les données des problèmes astronomiques, nous devons expliquer la composition de ces ouvrages.

372. La *déclinaison* d'un astre est l'arc abaissé de ce corps perpendiculairement à l'*équateur*, plan qui, passant par le centre de la Terre, est perpendiculaire à son axe des pôles. L'*ascension droite* est la distance du pied de cet arc au point équinoxial ♈, sur la ligne de section de l'équateur et de l'écliptique. La déclinaison est *boréale* ou *australe*, selon que l'astre est d'un côté de l'équateur ou de l'autre côté : elle se compte de zéro à 90 degrés, car les pôles sont à 90° de déclin. L'ascension droite se compte de l'ouest à l'est et de zéro à 360°, en faisant ainsi le tour entier du cercle équatorial. On voit que l'ascension droite et la déclinaison sont deux coordonnées circulaires, qui déterminent la position d'un astre, précisément comme les longitudes et latitudes terrestres fixent la position de chaque ville en géographie.

En rapportant les astres au plan de l'écliptique, on a de même deux coordonnées circulaires appelées *longitudes et latitudes*. Les 1[res] se comptent de zéro à 360°, en faisant le tour entier du cercle de l'écliptique. Seulement ici, pour éviter les grands nombres, on a composé une unité de 30 degrés appelée un *signe*. Ainsi au lieu de dire qu'une longitude est de 200 degrés, on la dit de 6 signes 20 degrés. Les latitudes sont boréales ou australes, de 0 à 90°.

373. Soit donc T (fig. 126) la Terre fixée au centre de la sphère céleste, CBDA l'équateur, FAEB l'écliptique; AB est la ligne des équinoxes, A celui du printemps ♈, est pris pour *origine* des asc. droites et des longitudes, comptées de droite à gauche, les 1[res] de A vers C, B..., les 2[mes] de A vers E, B... B est l'équinoxe d'automne ♎. Ainsi le Soleil décrivant le cercle AEBF, arrive en A le 21 mars, en B le 21 septembre, et procède de l'ouest à l'est.

Soit S un astre quelconque; abaissons de S deux arcs SP, SQ perpendiculaires l'un sur CAD, l'autre sur AEF. AP sera l'asc. droite et PS la déclinaison de l'astre S, coordonnées qui en fixent la place sur la sphère céleste; ou bien AQ sera la longitude, QS la latitude, déterminant aussi le lieu S. Connaissant les nombres de degrés des arcs AP et PS, ou bien AQ et QS, il est évident qu'on aura la position absolue de S, pourvu qu'on sache en outre si cet astre est dans la région boréale ou australe. On est dans l'usage de prendre les déclin. et latitudes positives quand elles sont boréales, et négatives quand elles sont austr.

En A, l'asc. droite et la longitude sont zéro; ces arcs sont de 90° en C et en E; de 180° en B, etc., et ainsi jusqu'à 360°, en faisant le tour entier des deux cercles.

Comme le ciel tourne autour de nous en 24 heures sidérales, l'origine A tourne en même temps, et parcourt tous les points de l'équateur céleste ACBD. Voilà pourquoi l'on change souvent les degrés d'asc. droite en temps, à raison de 360° pour 24 h. de 15 degrés par heure. L'arc d'équateur AP, qui a 72°, est dit avoir $4^h\ 48'$. (*Voy.* ci-après.)

374. L'angle ETC des deux plans est l'obliquité de l'écliptique, d'environ 23° 28'. Quand le Soleil arrive en A ou en B, il est dans l'équateur ; le jour est égal à la nuit pour toute la terre ; ce sont les *équinoxes*. Les *solstices* sont à 90° de ces points, en E et F, l'un d'été, l'autre d'hiver. L'écliptique est divisée en signes ou arcs de 30° chaque, comme l'équateur l'est en heures de 15°.

Comme le Soleil ne sort jamais de l'écliptique, sa latitude est toujours zéro, et il suffit d'en avoir la longitude pour en connaître le lieu. C'est ce qui fait ordinairement préférer ce système pour déterminer la place du Soleil. Souvent aussi la Lune et les planètes sont rapportées à l'écliptique. Mais, dans les *Éphémérides*, on donne aussi l'asc. dr. et la déclinaison de ces corps. Ordinairement les observations sont plus simples avec ces dernières coordonnées, et on les emploie de préférence.

375. Par la rotation diurne, l'équateur, l'écliptique et les équinoxes tournent en 24 h. sid. autour de l'axe pp' des pôles ; chaque astre S emporte avec lui les arcs SP, SQ, AP et AQ ; mais tout en se déplaçant pour le spectateur, cet astre conserve son asc. dr. AP, sa longit. AQ, sa déclin PS, sa latitude QS ; à moins cependant que, comme le Soleil et la Lune, il n'ait un mouvement propre ; car alors ces arcs varient eux-mêmes lentement, parce que S se déplace sur la sphère.

376. Il faut cependant dire que les plans CD, EF de l'équateur et de l'écliptique, ne restent pas liés l'un à l'autre en tournant ensemble. Outre que leur angle change d'une fort petite quantité avec le temps, la droite AB d'intersection, ou ligne des équinoxes, tourne très lentement, avec les siècles, autour du point T, dans le sens rétrograde de A vers F. C'est ce qu'on appelle la *précession des équinoxes*, mouvement du point A le long de l'écliptique, et qui est d'environ 50" par an. Ainsi toutes les longitudes des étoiles sont accrues de 50" chaque année, ce qui altère les asc. droites et les déclinaisons de certaines quantités. Enfin l'axe pp' de la Terre, par un balan-

cement appelé *nutation*, déplace aussi quelque peu les pôles p et p', et le point A.

Mais ces petits mouvemens sont si bien connus par leurs causes, qu'on en a pu calculer l'étendue : et il est indifférent que l'origine A ne soit pas constante, puisqu'on en sait assigner la place à chaque instant ; c'est ce qu'on fait par les tables destinées à cet usage.

Il est d'ailleurs inutile de s'en inquiéter quand on veut se servir de la *Conn. des Tems* pour trouver la place du Soleil, de la Lune, des planètes et même des plus belles étoiles, les seules qui soient en usage dans la Géodésie ; car les nombres donnés dans cet ouvrage ont été trouvés par les calculateurs, en ayant égard à ces circonstances. Nous renvoyons à notre *Astronomie pratique* les personnes qui voudraient connaître comment la *Conn. des Tems* est composée par le secours des tables astronomiques.

377. Il est vrai que la *Conn. des Tems* ne donne les positions du Soleil que pour midi, et de la Lune que pour midi et minuit, chaque jour de l'année. Mais lorsqu'on veut obtenir les coordonnées pour toute autre heure, il faut *interpoler*. Ce calcul se fait ainsi qu'il suit.

Par ex., si je veux trouver la déclin. du Soleil à $4^h\,18^m\,22^s$ le 1er septembre 1836, je prends dans la *Conn. des Tems* cette déclin. pour midi

le 1er septemb...	8° 11'.57",9B,	Différ. 21' 54",1,
le 2..............	7.50. 3,8.	

et je pose cette proportion : si 24 h. donnent 21'54",1 de différ., combien donnent $4^h\,18^m\,22^s$?

$$24^h : 21'54'',1 :: 4^h\,18'22'' : x.$$

On réduit tout en secondes, et l'on trouve par logarithmes.

Ct log 24h ou 86400" =	$\bar{5}$.0634863		
log 21'54",1 ou 1314",1 =	3.1186284	déclin. le 1.....	8°11'57",9
log 4h18'22" ou 15502" =	4.1903877	4e terme	− 3.55,8
235",8...	2.3725024		8. 8. 2,1

On retranche ici le 4ᵉ terme, parce que la déclin. va en diminuant à cette époque de l'année ; précisément comme lorsqu'on opère sur le log. des cos. et des cot. intermédiaires à ceux de la table.

Observez que la réduction des arcs en secondes se trouve toute faite dans deux colonnes des *Tables de Log*. de Callet, voisines de celle qui contient les nombres. Par ex., à côté du nombre 1556, on lit dans ces colonnes 0°25′56″ et 4°19′20″, parce que ces arcs équivalent à 1556″ et 15560″ ; en sorte que pour trouver les log. de ces arcs, il est inutile de les réduire en secondes.

378. Ce mode d'interpolation suppose que *les variations sont proportionnelles aux temps écoulés*, c.-à-d. que la marche de l'astre est faite d'un mouvement uniforme. Or c'est ce qui n'est vrai qu'à peu près, et même qui est tout-à-fait inexact dans certains cas. Alors il faut recourir aux différ. 2ᵐᵉˢ, 3ᵐᵉˢ,... C'est ce qui est indispensable lorsqu'on demande une grande précision, ou quand il s'agit des coordonnées de la Lune. Mais le procédé ci-dessus exposé est toujours suffisant pour obtenir la longitude du Soleil, son asc. dr., sa déclin., son demi-diamètre, celui de la Lune, sa parallaxe, l'équation du temps, etc., et en général toutes les fois que les différ. entre les nombres consécutifs sont minimes.

Nous renvoyons à l'*Astronomie pratique* (nº 78) les détails sur l'interpolation ; nous ne traiterons ici que le cas où l'on n'a égard qu'aux différ. secondes, parce qu'il est rare que les 3ᵐᵉˢ, 4ᵐᵉˢ... soient utiles. Supposons donc que les différ. 2ᵐᵉˢ soient faibles, ou presque constantes.

On tire de la *Conn. des Tems* quatre termes consécutifs pris dans la colonne des coordonnées qu'on veut calculer ; *deux de ces termes sont pour des époques antérieures, et deux pour des époques postérieures immédiatement à l'heure proposée : on en prend les trois différ. premières en retranchant chaque nombre de celui qui le suit, et donnant au reste le signe qui lui appartient.* La correction x que doit subir le nombre im-

médiatement antérieur est donnée par la formule

$$x = \left(\Delta^1 - \frac{1}{4}\Delta^2\right)\frac{t}{12^h} + \frac{1}{4}\Delta^2\left(\frac{t}{12}\right)^2.$$

Δ^1 représente la différ. intermédiaire entre les trois qu'on a trouvées, Δ^2 est la moyenne entre les deux différ. 2mes; t est le nombre d'heures, minutes et secondes à écouler depuis l'heure du terme antérieur jusqu'à l'instant proposé; x est ce qu'il faut ajouter *avec son signe* à ce même terme.

Quelle est, par ex., la longit. de la Lune le 14 novemb. 1836 à $t = 9^h 34^m 42^s$? Je trouve dans la *Conn. des Tems* de cette année

	Asc. dr. ☾	*Diff.* 1res.	*Diff.* 2es.
le 13 à minuit......	298°37′17″,9		
		+ 7° 10′23″,2	
le 14 à midi........	305.47.41,1		— 3′36″,0
		Δ^1 = 7. 6.47,2	
le 14 à minuit......	312.54.28,3		— 3.50,7
		7. 2.56,5	
le 15 à midi........	319.57.24,8		

Comme les différ. 2mes sont presque égales, j'en prends la moyenne.

$$\Delta^2 = -3'\,43'',35, \quad \text{d'où} \quad \tfrac{1}{4}\Delta^2 = -55'',84:$$

le 1er coeff. de la formule est donc

$$+7^\circ 6'\,47'',2 + 55'',84 = +7^\circ\,7'\,43'',04.$$

De là le calcul suivant :

C^t^ log 12^h......	$\bar{5}$.3645163.....	double.......	$\overline{10}$.72903	
t...............	4.5375924.....	double.......	9.07518	
coeffic..........	4.4093081	— 55″84........	1.74694—	
	4.3114168		1.55115—..	— 35″,58
1er terme......	5°41′24″,1			
2e.............	—35,58			
correction.....	5°40′48″,52			
le 6 à midi..	305.47.41,1			
long. ☾	311.28.29,6 le 14 novembre à 9^h^34′42″.			

Si l'on n'eût pas tenu compte des différ. 2mes, la correction eût été de 5° 40′ 39″,5, ou de 9″ de plus.

379. Souvent on a besoin du *mouvement horaire* d'un astre, c.-à-d., de sa marche pendant une heure : il faut encore distinguer ici les deux cas où l'on peut supposer les différences 1res constantes, et celui où l'on n'est pas en droit de le faire avec une suffisante exactitude.

Dans le 1er cas on suppose la marche uniforme, ce qu'on fait toujours quand il s'agit du Soleil; une proportion suffit pour donner le mouvement horaire. Ainsi dans l'ex. de la p. 332, on pose

Si 24^h donnent 21′54″,1 de diminution en déclin., combien 1^h? Or, en multipliant les deux 1ers termes par 2 $\frac{1}{2}$, le diviseur devient 60^h. Pour diviser le produit du 2e terme par 60, il suffira de changer les degrés en minutes, les minutes en secondes, etc. Le calcul est fait ci-contre et donne 54″45‴,25 = 54″,75, pour le mouvement horaire demandé.

21′ 54″,1
21 . 54, 1
10 . 57, 05
54″45‴,25

Ce procédé rend même l'interpolation facile; car dans l'ex. de la p. 332 il reste à multiplier le mouvement horaire en déclin. par 4^h 18^m 22^s = 4^h,306, ce qui donne le même résultat 235″,8.

380. Mais lorsqu'on ne veut pas supposer que l'arc est décrit uniformément, on doit, pour trouver le mouvement horaire, calculer la marche en ayant égard aux différ. 2mes, pour deux instans écartés d'une heure : la différ. entre les deux résultats est le mouvement par heure. Ainsi dans l'ex. p. 334 on obtient pour $t = 10^h 34^m 42^s$ que la variation de longitude est 16° 6′ 19″,29; en retranchant de ce nombre la correction 5° 40′ 48″,52 déjà obtenue pour l'heure précédente, on trouve que la longitude de la Lune est augmentée en une heure de 35′ 30″,77 : c'est le mouvement horaire à cet instant.

Des réfractions, parallaxes et demi-diamètres.

381. La lumière des astres se courbe pour arriver à nos yeux, en traversant les couches atmosphériques de densités variables : et comme nous rapportons les objets dans la ligne droite où ils nous apparaissent, nous leur attribuons une place un peu différente de leur lieu réel. Cet effet, appelé *réfraction*, est calculé d'après des tables construites sur les formules qui sont propres à la courbe ou *trajectoire* des rayons lumineux. C'est dans la direction tangente à l'élément de la courbe qui entre dans notre œil, que nous supposons les corps célestes, qui, par cet effet, nous paraissent un peu plus élevés sur l'horizon qu'ils ne le sont réellement, mais toujours dans le plan vertical où ils se trouvent.

La table de la *Conn. dès Tems* donne, par une interpolation semblable à celle du n° 377, la réfraction propre à toutes les hauteurs des astres ou leurs distances zénithales. Ainsi, lorsqu'on a observé qu'une étoile est à 10° 15′ 48″ d'élévation au-dessus de l'horizon, comme la réfraction est alors, d'après la table, de 5′ 11″,8, en retranchant, on trouve que, s'il n'y avait pas d'atmosphère, la hauteur n'eût été que de 10° 10′ 36″,2.

Mais la température et la pression de l'air agissent pour produire la réfraction, et la table suppose que le thermomètre centigrade marque 10°, et que la colonne de mercure du baromètre est à 760ᵐᵐ. Si donc l'état de l'atmosphère n'est pas tel, il faut faire éprouver à la réfraction de la table une correction dont l'ouvrage donne le calcul. C'est le nombre ainsi corrigé qui est *la véritable réfraction, et qu'il faut retrancher de la hauteur observée.*

Quand l'opération, au lieu de faire connaître la hauteur d'un astre, en donne le complément ou *la distance au zénith, il faut au contraire y ajouter la réfraction.*

382. Soit L (fig. 127) un astre observé d'un lieu O de la Terre CO; le spectateur le rapporte au point K de la sphère cé-

leste, où elle est rencontrée par le prolongement du rayon visuel OL. Un autre observateur ne jugerait donc pas l'astre au même point du ciel. Comme les éphémérides sont destinées à servir en tous lieux, on a dû supposer que l'observateur occupe une place déterminée : cette place est le centre même C de la terre. Ainsi les tables astronomiques supposent toujours que le spectateur occupe ce centre C, et il faut faire aux arcs observés les corrections propres à les ramener à ce que sont ces mêmes arcs pour l'observateur placé au centre C. On a donné le nom de *parallaxe* à l'angle L sous lequel un spectateur situé dans un astre L verrait le rayon terrestre OC.

Plus l'astre L est éloigné, et plus cet angle L est petit : il atteint à peine 8″ pour le Soleil ; mais il est tout-à-fait insensible pour les étoiles, à cause de leur immense éloignement. Et même on peut dire qu'une étoile, vue après six mois d'intervalle, c.-à-d. lorsque la terre est au point opposé de son orbite, dont le diamètre a 70 millions de lieues, nous paraît occuper le même point du ciel. Ainsi *la parallaxe des étoiles est nulle*, et il n'est nécessaire de faire aucune correction aux arcs observés de la surface de la terre, pour être rigoureusement en droit de les réputer observés du centre.

383. Mais il n'en est pas de même pour le Soleil, et surtout pour la Lune. Celle-ci n'est éloignée de nous que de 60 rayons terrestres ; elle paraît donc occuper des points du ciel très différens lorsqu'on la voit du centre de la terre ou des divers points de sa surface. Dans certains cas, la parallaxe est de plus d'un degré. Comme la distance CL est insensible, quand on la compare à celle des étoiles, l'angle ou parallaxe ILK est le déplacement apparent que l'astre L éprouve lorsqu'on le voit de O, au lieu de le voir de C. Ainsi 1°. *la parallaxe s'exerce entièrement dans un plan vertical, ainsi que la réfraction ; mais elle agit en sens contraire et paraît abaisser l'astre ; 2°. il faut l'ajouter aux hauteurs observées de O, pour obtenir celles qu'on observerait de C.*

384. Lorsque l'astre L est à l'horizon du spectateur O (fig. 128), l'angle L est appelé *la parallaxe horizontale* de cet astre. Et comme les rayons OC = R de la Terre sont un peu inégaux, plus le rayon R est grand et plus l'angle L l'est aussi. Lorsque le point O est sous l'équateur, l'angle L est la *parallaxe horiz. équatoriale*. C'est cet angle qui est donné pour chaque midi et chaque minuit dans la *Conn. des Tems*, et sert à l'obtenir pour les autres heures par interpolation. Cette parallaxe fait ensuite connaître celle qu'il faut prendre en tout autre lieu de la terre, et pour toutes les hauteurs de la Lune, ainsi que nous allons l'expliquer. Comme les distances lunaires varient rapidement, et même assez considérablement, ce qui résulte de l'excentricité de son orbite elliptique, il a été nécessaire de donner la parallaxe de 12 en 12 heures.

La parallaxe du Soleil est trop petite pour que l'inégalité des rayons terrestres la fasse varier sensiblement. On a des tables qui donnent cet angle pour toutes les hauteurs aux divers jours de l'année. (*Voy.* l'*Astr. pratique*, table XII.) Cette table est donnée dans la *Conn. des Tems*.

385. Soit H la parallaxe horizontale sous l'équateur, et P celle d'un lieu dont la latitude est l; p la parallaxe en ce lieu pour la dist. zénithale z, Δ la distance CL de l'astre L (fig. 127), enfin R le rayon terrestre OC. Le triangle OLC donne

$$\sin p : \sin(180^\circ - z) :: R : \Delta,$$

d'où $\Delta \sin p = R \sin z \ldots\ldots\ldots$ (1)

Pour $z = 90^\circ$, on a $\Delta \sin P = R, \ldots\ldots\ldots\ldots$ (2)

d'où éliminant Δ $\sin p = \sin P \sin z \ldots\ldots\ldots$ (3)

Comme, même pour la Lune, le plus rapproché des astres, P et p sont très petits, on peut substituer le rapport de ces arcs à celui de leurs sinus; d'où

$$p = P \sin z \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Cette éq. donne *la parallaxe* p *de hauteur*, ou ce qu'il faut re-

trancher de la distance zénithale z pour la réduire à ce qu'elle est quand on voit l'astre du centre de la terre. Quant à la parallaxe horizontale P, pour le lieu dont la latitude est l on a trouvé (p. 177, éq. 10) que, A étant le rayon de l'équateur, on a $R = A(1 - \mu \sin^2 l)$, l'aplatissement étant μ; et comme l'éq. (2) donne

$$\Delta \sin H = A, \quad \text{d'où} \quad \frac{\sin P}{\sin H} = \frac{P}{H} = 1 - \mu \sin^2 l,$$

on trouve $$P = H(1 - \mu \sin^2 l) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

P est si peu différent de H, même pour la Lune, que le plus souvent on prend H pour P, ce qui rend cette éq. inutile. Mais quand les calculs exigent de la précision, on obtient P d'après la valeur de H de la *Conn. des Tems*, après quoi l'éq. (3) ou (4) fait connaître p, ou la parallaxe pour la dist. zénith. z.

L'éq. (1) montre que la parallaxe p est la plus grande quand $z = 90°$, c.-à-d. quand l'astre est à l'horizon : elle est nulle, quand il est au zénith, où $z = 0$; elle l'est encore pour toutes les étoiles, parce que Δ est infini par rapport à R. Enfin on voit que plus l'astre est éloigné, plus sa parallaxe est faible, etc.

Cet effet, quoique s'exerçant en entier dans le sens vertical, agit en partie sur l'asc. dr., la déclin., la longitude et la latitude. On a des formules pour calculer les corrections de ces arcs. Nous ne nous y arrêterons pas, parce qu'on trouve rarement l'occasion de s'en servir en géodésie. (*Voy.* ci-après n° 428, et l'*Astr. Pratique*, p. 123.)

386. Le *demi-diamètre* de la Lune se tire aussi de la *Conn. des Tems*, tel qu'on le voit du centre de la Terre en C (fig. 127), où il paraît un peu plus petit qu'à la surface, parce qu'il est plus éloigné que des points O de celle-ci. Pour conclure le demi-diamètre R', tel que nous le voyons, de celui R de la *Conn. des Tems*, on démontre la formule (*voy. Astr. Pratique*, p. 61)

$$R' = R + MR^2 \cos z.$$

Le dernier terme étant exprimé en secondes, on a........ $\log M = \bar{5}.2502084$.

Ainsi, lorsqu'on a mesuré la hauteur du bord inférieur de la Lune, il ne faudrait ajouter le demi-diamètre R de la *Conn. des Tems*, pour avoir la hauteur du centre, qu'après l'avoir corrigé de la quantité $+ MR^2 \cos z$.

Mathématiquement, on doit dire que le diamètre du Soleil est aussi plus grand pour nous, que si nous le voyions du centre de la Terre, et qu'on doit faire subir au diamètre solaire de la *Conn. des Tems* la même correction qu'à celui de la Lune : mais cette correction est tout-à-fait insensible, à cause de la distance considérable du Soleil.

Du temps vrai, moyen et sidéral.

387. Il y a trois manières d'exprimer les durées écoulées; par les révolutions diurnes du *Soleil vrai*, soit par celles d'un astre fictif qu'on appelle *Soleil moyen*, soit enfin par celles des étoiles.

Comme la vitesse et la distance du Soleil varient dans les différens mois, le Soleil vrai n'emploie pas chaque jour de l'année le même temps à accomplir sa révolution diurne; en sorte que d'un midi au suivant, quoiqu'on partage toujours le temps écoulé en 24 heures, les jours sont inégaux et les heures par conséquent inégales. D'ailleurs cet astre ne décrit pas l'équateur dont les degrés sont la mesure des temps; en sorte que, quand bien même la marche du Soleil serait uniforme dans une orbite circulaire, les jours solaires seraient encore inégaux.

388. Mais si l'on imagine un Soleil qui décrirait l'équateur uniformément dans une année tropique, les retours de cet astre au méridien d'un lieu quelconque seraient séparés par des temps égaux. On appelle *temps moyen* la durée indiquée par ce Soleil. On a combiné la marche de cet astre fictif de manière que, tantôt devançant le Soleil vrai dans son midi,

tantôt au contraire étant devancé par lui, les écarts fussent à peu près les mêmes dans les deux sens. La compensation des inégalités d'heures indiquées par le Soleil vrai et le Soleil moyen a lieu 4 fois par an; et comme d'une part la marche du Soleil vrai est parfaitement connue; que de l'autre, celle du Soleil moyen n'est qu'une affaire de calcul, on a composé des tables de tous les écarts. On appelle *équation du temps* la différence entre les heures marquées par les deux Soleils, ou *ce qu'il faut ajouter à l'heure vraie pour avoir l'heure moyenne;* c'est l'arc d'équateur qui sépare les deux soleils, ou la différence de leurs asc. dr. en temps :

heure moyenne = *heure vraie* + *équation du temps.* (1)

389. Les jours civils commencent et finissent à minuit, et se forment de deux périodes de 12 heures chacune, dont l'origine est à l'instant du passage du Soleil au méridien, soit supérieur, soit inférieur. *Le jour astronomique commence* à midi, et l'on compte les heures sans interruption jusqu'à 24 : ainsi le 6 août, à 9 heures du matin, est, pour l'astronome, le 5 à 21 heures.

390. Comme la révolution diurne de la sphère céleste est parfaitement uniforme, on s'en sert pour mesurer les temps. Les 24 *heures sidérales* sont la durée qui s'écoule depuis le passage d'une étoile quelconque au méridien, jusqu'à son retour à ce plan. On prend pour commencement du jour sidéral l'instant où l'équinoxe ♈ passe au méridien. Les pendules des observatoires sont ordinairement réglées sur le temps sidéral; mais quelquefois aussi elles marchent comme le temps moyen, qui maintenant est partout en usage pour la vie civile, pour les chronomètres, etc. Ces deux espèces de durées étant seules uniformes, on ne peut se servir que d'elles pour les besoins de l'astronomie.

391. Les passages au méridien s'observent avec une lunette qu'on appelle *méridienne*, parce qu'elle est construite et placée de manière que son axe optique décrive le méridien. Or les

passages soit du Soleil moyen, soit de l'équinoxe, par le plan du méridien, ne peuvent être observés directement, puisque les points du ciel qu'ils occupent ne sont distingués par aucun astre. Mais comme les mouvemens du Soleil vrai sont bien mesurés et comparés aux étoiles, il est facile de se servir de ces corps célestes visibles, pour apprécier les mouvemens du Soleil moyen et de l'équinoxe, qu'on ne peut voir au ciel.

Le Soleil moyen parcourt l'équateur en un an, ou $365^j,242218124$; ainsi les 360° de ce cercle étant décrits uniformément dans cette durée, une proportion donne pour l'*arc décrit en un jour moyen*,

$$0^\circ,985647283 = 1^\circ - 51'',670,$$

c'est l'arc dont l'asc. dr. du Soleil moyen s'accroît chaque jour moyen. Dans cette durée, il passe au méridien un arc d'équateur de $360^\circ 59' 8'' 33022$, ce qui fait

$$15^\circ\ 2' 27'',847 = 15^\circ,0410686 \text{ en une heure moyenne,}$$
$$15'\ 2'',464 \text{ en 1 minute, } 15'',041 \text{ en 1 seconde.}$$

On en conclut le temps nécessaire pour décrire l'arc de $0^\circ,985647283$ dont le Soleil moyen s'avance chaque jour sur l'équateur vers l'est : c'est $3'55'',90945$ de temps moyen. Tel est l'excès de la durée du jour moyen sur celle du jour sidéral ; car ce dernier n'exprime que le temps nécessaire au passage de 360° par le méridien, ou 15° par heure. Ainsi $3'55'',90945$ est le temps moyen que le Soleil moyen emploie chaque jour de plus qu'une étoile pour revenir au méridien.

Pour exprimer cette durée en temps sidéral, on pose cette proportion : si 360° sont décrits en 24 h. sid., en combien de temps $0^\circ,985647$... ? On trouve $3'56,''555348$ pour 4e terme : tel est, en temps sidéral, la valeur de l'arc d'équateur décrit chaque jour par le Soleil moyen, ou la quantité dont s'accroît son asc. dr. en un jour moyen.

Ainsi, lorsqu'on aura déterminé l'asc. dr. du Soleil moyen à une époque quelconque, pour l'obtenir à une autre époque,

il faudra ajouter autant de fois 3′56″,555348 qu'il y a eu de jours intermédiaires écoulés.

392. On trouvera dans l'*Astron. pratique* une table très étendue qui est fort commode pour faire ces calculs ; la suivante suffit à notre objet. Nous y avons montré l'usage de cette table, en donnant l'asc. dr. du Soleil moyen à midi moyen de Paris, le 5 août 1742.

Table pour trouver l'asc. dr. ⊙ *moyen.*

L'époque est à midi moyen de Paris, le 1er janvier.

DURÉES.	ASCENS. DR. en temps.	N	N +	N +	N —	N —	*Nutat.*
1833	18h43′ 34″,33	681	00	500	500	1000	0″00
1 an.	— 57,303	+ 53	25	475	525	975	0,17
4 ans.	+ 7,341	214	50	450	550	950	0,33
1 jour	3′ 56,555	0,14	75	425	575	925	0,49
10 jours.	...39 25,553	1,4	100	400	600	900	0,63
30 jours.	1 58 16,660	4,3					
100 jours	6 34 15,532	14,0	125	375	625	875	0,76
			150	350	650	850	0,87
			175	325	675	825	0,96
			200	300	700	800	1,01
			225	275	725	775	1,05
			250	250	750	750	1,06

1833	18h43′34″,33	N = 681
2 fois 4 ans..........................	+ 14,68	428
1 an	— 57,30	53
7 mois de 30j	13′.47.56,62	30
6 jours..............................	23.39,33	1
nutation..............................	+ 1,00	
asc. dr. ⊙ moy. = ...	8.54.28,66	193

Depuis 1833 jusqu'à 1842, il y a 9 ans écoulés, que l'on décompose en deux périodes de 4 ans, plus une année, $9 = 2 \times 4 + 1$; comme les années bissextiles sont composées de 366 jours, elles se trouvent ainsi renfermées dans ces périodes. On écrit d'abord le nombre qui répond à 1833, puis 2 fois celui qui répond à 4 ans, et une fois — 57″,30 pour l'an-

née en plus ; la réunion de ces trois nombres donnerait l'asc. dr. du ⊙ moyen le 1er janvier 1842, à midi moyen de Paris. Maintenant la date étant le 5 août, on voit qu'il y a 7 mois écoulés, et l'on répète 7 fois le nombre de la table qui répond à 30 jours. Mais il y a 4 de ces mois qui ont 31 jours et il en manque deux à février ; c'est donc 2 jours de plus que les 7 mois de 30 jours : ainsi jusqu'au 5 août, il faut compter 6 jours écoulés, et par conséquent prendre 6 fois la marche du ⊙ moyen en 1 jour. La somme de tous ces résultats est l'asc. dr. demandée, sauf une petite correction pour la nutation.

La colonne N est destinée à faire connaître un nombre propre à mesurer le petit déplacement qu'éprouve le point équinoxial ♈, par l'effet de la nutation. On calcule les parties de ce nombre N comme on l'a fait pour les arcs d'asc. dr., et l'on obtient pour somme 193. C'est avec ce résultat qu'on entre dans la table subsidiaire, et l'on trouve qu'il répond à + 1",00, qu'il faut ajouter à l'asc. dr.

La *Conn. des Tems* donne l'asc. dr. du Soleil moyen pour chaque jour, à midi moyen de Paris, ce qui dispense de faire les calculs qui précèdent.

Quand l'heure proposée n'est pas celle de midi moyen, il faut ajouter au nombre dont on vient de parler, la marche du Soleil moyen en asc. dr. depuis cette heure de midi, savoir 9",8565 par heure, 0",16427 par minute. Ces calculs se trouvent tout faits dans notre table V, où l'on prendra les nombres de la 2e colonne, intitulée : *temps sidéral*.

Et pour avoir l'asc. dr. du Soleil moyen en un lieu placé hors du méridien de Paris, on commencera d'abord par chercher l'heure moyenne comptée à Paris au même instant, d'après la longitude du lieu, en temps ; on calculera ensuite l'asc. dr. du Soleil moyen pour cette dernière heure.

Quelle est l'asc. ⊙ moy. à $8^h 14' 19''$ de temps moyen à Berlin, le 10 août 1836, ou

le 9 à	$20^h 14' 19''$
diff. de longitude, orientale	$-$ 44. 8
heure de Paris le 9 août à	19.30.11
asc. dr. ⨀ moy. le 9 à midi moy	11^h.14.13,07
mouvement en 19^h, T. V, 2ᵉ col	3. 7,27
en 30′	4,93
en 11″	0,03
asc. dr. demandée	11. 17.25,30.

393. En général, lorsqu'une durée écoulée T est en temps moyen, et qu'on veut l'exprimer en temps sidéral, il faut ajouter 3′56″,555348 par jour, 9″,8565 par heure, 0″,16427 par minute. Et réciproquement si une durée écoulée T est en temps sidéral, pour la traduire en temps moyen, il faut retrancher 3′55″,90942 par jour, 9″,8295 par heure, 0″,163836 par minute.

La table V sert pareillement à faire ces calculs, en y prenant les nombres de la 2ᵉ colonne (*temps sidéral*) dans le 1ᵉʳ cas, et de la 1ʳᵉ (*temps moyen*) dans le second.

Ainsi, supposons qu'on ait observé une étoile et que l'opération ait duré ce temps, compté sur une horloge de temps moyen, ... $1^h 54' 43''$,70.

Pour traduire cette durée en temps sidéral, on ajoutera	pour 1^h	+	9, 86
	pour 54′	+	8, 87
	pour 44″	+	0, 12
durée sidérale équivalente			$1^h 55' 2''$, 55.

La *Conn. des Tems* de chaque année donne ces mêmes tables.

Quant au passage méridien de l'équinoxe ♈, instant où commence le jour sidéral, on ne peut non plus l'observer directement. Mais comme les asc. dr. données dans les catalogues d'étoiles, expriment, en temps sidéral, l'arc d'équateur qui a traversé le méridien, depuis que le point ♈ y a passé, jusqu'au moment où l'étoile y entre, il est évident que *toute étoile*

passe toujours au méridien à l'heure sidérale marquée par son asc. dr.; en sorte qu'en tout lieu, on compte, par ex., 5^h sidérales, à l'instant où l'étoile dont l'asc. dr. est 5^h entre au méridien.

Comme il y a trois mesures du temps, il est indispensable de savoir traduire l'une quelconque de ces mesures en l'autre.

394. *Quelle est l'heure vraie, connaissant l'heure moy., et réciproquement?* Cette transformation se fait par l'éq. (1). Ainsi, quand l'observation du Soleil vrai aura fait connaître l'heure vraie, une simple addition donnera l'heure moyenne. Réciproquement, en retranchant l'équation du temps de l'heure moyenne, on aura l'heure vraie. Il faut cependant observer que quelquefois l'éq. du temps est négative, et qu'alors l'addition devient une soustraction, et réciproquement. C'est ce qui arrive quand le Soleil moyen est devancé en asc. dr. par le Soleil vrai.

Comme l'éq. du temps est donnée dans les tables pour midi vrai de Paris, et qu'il faut l'employer dans l'éq. (1) pour l'heure proposée, il faut interpoler la table, afin d'obtenir cette équation pour l'heure dont il s'agit.

395. La *Conn. des Tems* donne cette éq. sous le titre de *tems moyen à midi vrai*, parce qu'en effet on y lit l'heure que doit marquer la pendule de temps moyen, quand le centre du Soleil vrai passe au méridien. Or s'il est $0^h 13' 51'',2$ de temps moyen à midi vrai, l'éq. du temps, d'après sa définition, est $+ 13' 51'',2$: c'est le retard du Soleil vrai sur le temps moyen. Mais si l'heure indiquée est au-dessous de midi, comme, par ex., *si le temps moyen à midi vrai* est $11^h 49' 36''$, c'est au contraire le Soleil moyen qui retarde, et l'éq. du temps est négative et $= - 10' 24''$. Cette manière d'indiquer l'éq. du temps dispense de comprendre dans le calcul des parties affectées du signe —. On a donc

heure moyenne = *heure vraie* + *temps moyen à midi vrai* (2).

On tire ce dernier terme de la *Conn. des Tems*, à l'aide

d'une interpolation, si l'on veut opérer pour une autre heure que midi vrai. Mais il faut se ressouvenir *qu'on est censé avoir ajouté 12^h quand le temps moyen à midi vrai est au-dessous de midi, et qu'il faut ôter ensuite ces 12^h*. C'est un véritable complément arithmétique qu'on emploie pour changer une soustraction en addition, quand l'éq. du temps a le signe —.

Par ex., on a trouvé que le 29 novembre 1836, il était au Soleil vrai 2^h23′17″,4 du matin, ou bien

le 28 novembre à.	21^h 23′ 17″4
le temps moyen à midi vrai le 28 est. . . .	11 .48 .16,81
Il y a 21″,19 de var. en 24^h, et par heure 52‴,77 = 0″,880 (*v.* p. 335); en 21^h39, on a. . .	+ 18,82
Heure moyenne correspondante (—12^h). . .	21 .11 .53,03.

396. Supposons que dans l'ex. précédent l'heure proposée soit celle de tems moyen, savoir. . . . . . . 21^h23^m17′,4

Temps moyen à midi vrai, le 28.	— 11.48.16,81
Heure approchée de temps vrai (+ 12^h). . . .	21.35. 0,59
Correction pour 21^h,58.	— 18,99
Heure vraie correspondante.	21.34.41.60

Observez que l'éq. du temps est ici — 11′.43″,19, et que la soustraction qu'on a faite, après avoir ajouté 12^h, revient à avoir ajouté 11′43″19. En outre la correction doit porter sur une durée de temps vrai, écoulée depuis midi vrai, durée qui est l'inconnue du problème. Mais on interpole pour l'heure approchée 21^h35′ = 21^h58, sauf à corriger une 2me fois le résultat s'il était nécessaire.

397. *Trouver l'heure sidérale, connaissant l'heure moyenne, et réciproquement?*

Représentons par CA (fig. 124) le méridien du lieu ♈AE l'équateur, ♈ l'équinoxe origine des asc. dr., point qui s'avance uniformément vers l'ouest, avec toute la sphère céleste. ♈A est l'heure sidérale actuelle, car cette heure est l'asc. dr. en temps du point A qui est au méridien ; c'est le temps écoulé

depuis le passage de ♈ (n° 390), ou l'asc. dr. de l'étoile qui est dans ce plan, et se projette en A sur l'équateur. ♈E ou ♈E′ est l'asc. dr. d'une autre étoile qui se projette en E ou E′, et que la rotation diurne emporte vers l'ouest. Supposons que ce dernier point E soit le Soleil vrai ou moyen, ♈E en est l'asc. dr. actuelle, et l'arc AE est le temps écoulé depuis le passage au méridien ; cet arc est l'heure moyenne actuelle : et comme FA = AE + EF, on a visiblement

heure sidérale = *heure solaire* + *asc. dr.* ☉. . (3)

Quand la somme passe 24^h, on retranche 24.

Nous supposons ici que le Soleil est situé à l'ouest ; s'il est à l'est, en E′, l'asc. dr. est FE′, et l'heure solaire est 24^h—AE′ ; alors on a FA = FE′ — AE′, ce qui fait visiblement retrouver la même éq. (3).

398. Faisons sur cette éq. plusieurs remarques.

1°. L'heure solaire dont il s'agit ici est vraie ou moyenne, selon qu'on emploie l'asc. dr. du Soleil vrai ou moyen.

2°. Cette asc. dr. est celle qui a lieu pour l'heure solaire même qui fait l'objet du problème.

3°. On tire de l'éq. (3)

heure solaire = *heure sidérale* — *asc. dr.* ☉. . (4)

On sait donc trouver l'heure sidérale, connaissant l'heure solaire, et réciproquement. Comme l'asc. dr. ☉ doit être prise ici pour l'heure solaire, quand celle-ci est l'inconnue du problème, on commence par prendre cette asc. dr. pour le midi précédent, ce qui donne l'heure approchée, qu'on corrige ensuite comme le montre l'un des exemples suivans.

4°. Quant à la position du Soleil vrai, à chaque instant elle est donnée par l'équation

asc. dr. ☉ *vrai* = *asc. dr.* ☉ *moyen* + *éq. du temps.*

399. *Quelle est l'heure sidérale le* 19 *juillet* 1836, *sachant*

que l'heure moyenne est.	$5^h 55^m 39^s,85$
Mouvement sidéral en $5^h 55^m 40^s$ (table V, 2ᵉ col.).	0.58,43
AR ☉ moyen à midi moyen.	7.49.12,17
Heure sidérale correspondante.	13.45.50,45

Même question, sachant que l'heure vraie est.		5.49.43,24
Éq. du temps le 19 à midi.	+	5.55,69
Var. en 1 jour + $3^s,78$; en 6^h.	+	0,92
Heure moyenne proposée.		5.55.39,85

Le reste comme ci-dessus.

Quelle est l'heure moyenne le 29 octobre 1836, sachant

que l'heure sidérale est.		$10^h 53^m 34^s,00$
Æ ☉ moyen le 28 à midi moyen.	—	14.27.24,23
Heure moyenne approchée (on ajoute 24^h)		20.26. 9,77
Correction (tab. V, 1ʳᵉ col.) pour $20^h 26^m 10^s$.		— 3.20,88
Heure moyenne demandée.		20.22.48,89

Dans la 1ʳᵉ opération, la correction doit être faite en temps sidéral : on l'a prise dans la 2ᵉ colonne de la table V ; mais ici on se sert de la 1ʳᵉ colonne, parce qu'on doit exprimer la correction en temps moyen.

Différens procédés pour avoir l'heure.

400. Il est rare que, dans les travaux géodésiques, on ait à sa disposition un observatoire fixe où l'on puisse établir et régler une *lunette méridienne*. Aussi renverrons-nous à notre *Astronomie pratique* pour ce qui se rapporte à l'usage de cet *instrument des passages*. Nous nous contenterons de dire que si l'on a observé le passage du Soleil au méridien, et noté l'heure de la pendule au même instant, on connaîtra combien elle avance ou retarde sur le temps moyen, puisqu'on sait qu'elle doit alors marquer le temps moyen à midi vrai.

Et si la pendule est réglée sur le temps sidéral, on sait qu'au moment du passage elle doit marquer l'asc. dr. du Soleil. On trouve cet arc pour midi moyen dans la *Conn. des Tems*, et on l'obtient pour midi vrai, en corrigeant la marche pendant la durée entre les deux midis, durée qui est l'éq. du temps. La correction se prend dans la table V, 2me colonne, pour cette durée.

401. *Trouver l'heure du passage d'une étoile au méridien?* S'il s'agit de l'heure sidérale, on sait que cette heure est l'asc. dr. de l'étoile en temps (n° 390), corrigée de la précession de la nutation et de l'aberration. Mais si l'on demande l'heure solaire du passage, il faut réduire cette asc. dr. en temps moyen. Ainsi l'éq. (3) devient

heure sol. passage ✶ au méridien = Æ ✶ — Æ ⊙. (6).

Ainsi l'on calcule l'as. dr. de l'étoile et du Soleil vrai ou moyen, et la différence est l'heure vraie ou moyenne du passage. Du reste, cette asc. dr. du Soleil doit être prise pour l'heure qu'on cherche, calcul semblable à celui qu'on a fait p. 349.

Par ex., l'étoile α Grande Ourse, le 29 octobre 1836, a pour asc. dr. $10^h53^m34^s,00$; le calcul présenté p. 349 indique l'heure moyenne du passage de cette étoile au méridien.

402. *Étant donné l'angle horaire d'un astre, trouver l'heure?* Il faut se représenter que chaque astre a son cercle horaire (grand cercle passant par les deux pôles) qu'il emporte avec soi dans sa rotation diurne; à l'instant du passage, ce cercle se confond avec le méridien du lieu; à toute autre heure, ces deux plans font entre eux un angle qu'on appelle angle horaire.

CA (fig. 124) est le méridien du lieu, ♈ l'origine des asc. dr., ♈A l'heure sidérale actuelle, ♈E l'asc. dr. d'une étoile, EA le temps sidéral écoulé depuis qu'elle a traversé le méridien ou son angle horaire. On a ♈A = ♈E + EA. Et si l'astre est en E′, de l'autre côté du méridien, ♈E′ est son asc. dr. et E′A son angle horaire; d'où ♈A = ♈E′ — E′A. Donc

heure sidérale = Æ ✶ ± *angle horaire*, (7)

heure solaire = Æ ⊙ ± *angle horaire*. (8)

On prend le signe +, quand l'astre est à l'ouest du méridien, et — quand il est à l'est. (*Voy.* l'ex. ci-après.)

Mais si l'on observe une circompolaire, on est tourné du côté du nord, et les arcs de distance sont rapportés au méridien inférieur : alors il est clair qu'on doit appliquer les signes en sens contraire de cette règle, et que le résultat doit être diminué de 12^h.

403. Dans tout ce que nous avons dit il a été supposé que les éphémérides sont calculées pour le lieu de l'observation, ce qui arrive rarement. Pour un autre méridien les données de la *Conn. des Tems* ont besoin de corrections. On cherche d'abord l'heure du lieu quand il est midi à Paris ; c'est la différ. des longitudes qui la donne : et il faut corriger par la table V les asc. dr. du Soleil moyen de la marche de cet astre pendant cette durée.

Si, par ex., on demande l'heure moyenne du passage d'Antarès au méridien de Berlin, le 2 juin 1836, jour où l'asc. dr. du ⊙ moyen est $4^h43^m53^s,94$ à midi moyen de Paris : comme Berlin est à $44'8''$ de temps sidéral, à l'est, on y compte midi $44'8''$ quand il est midi à Paris, et l'asc. dr. ⊙ est alors plus faible (table V, 2me colonne) de $7'',25$, qui est sa marche en $44'8''$. On ne prendra pour l'asc. dr. ⊙ moyen à midi moyen de Berlin que $4^h43^m46^s,69$.

Asc. dr. ★, ou heure sidérale du passage..........	$16^h19'23'',75$
Asc. dr. ⊙ moyen à midi........................	— 4.43.46 ,69
Heure moyenne approchée........................	11.35.37 ,06
Correction pour $11^h35',5$ (table V, 1re col.).........	— 1.53 ,94
Heure moyenne du passage........................	11.33.43 ,12.

On retranche ici la correction, parce que l'asc. dr. ⊙ croissant sans cesse, celle qu'on a retranchée aurait dû être plus grande de $1'53'',94$. Mais, après le calcul, on trouve qu'en effet il n'est que $11^h33^m43^s$: on voit que la correction n'aurait dû être que de $1'53'',66$, en sorte qu'on a retranché $0'',28$ de trop. L'heure moyenne demandée est donc réellement $11^h33^m43^s,40$.

404. On a souvent besoin d'*exprimer des degrés de l'équateur en temps*, c'est ce qu'on fait par une proportion, dans le rapport de 15° pour 1^h ou 60° pour 4^h. Mais comme le diviseur est 60, ce calcul se réduit à multiplier l'arc par 4, et à changer les degrés en $'$, les $'$ en $''$, les secondes en $'''$. Ainsi pour $82^\circ 18' 15'',7$, je quadruple, et je trouve $329' 13'' 2''',8 = 5^h 29^m 13^s,05$.

Réciproquement, pour traduire des heures en degrés, il faut diviser par 4, et changer les $'$ en degrés, les $''$ en minutes, etc. Ainsi pour $5^h 29^m 13^s,05$, je prends le quart et j'ai $1^h 22^m 18^s,26$, que je change en $82' 18'' 15''',6$, puis en $82^\circ 18' 15'',6$. (*Voy.* n° 379.)

405. *Trouver l'heure par la hauteur absolue d'un astre?* L'astre est en q (fig. 129), le pôle en p, le zénith en z, l'observateur en c; mzp est le méridien du lieu, qp celui de l'astre q, l'angle horaire est zpq; pb est la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon ab, c.-à-d. la latitude du lieu, qa est la hauteur de l'astre, et qz, complément de qa, sa distance au zénith. L'observation donne l'arc qa ou qz, et il s'agit de tirer du triangle sphérique pqz, la valeur de l'angle horaire p.

Posons $pz = 90^\circ - l =$ colatitude $= c$, $zq = z =$ distance zénithale, $pq = d =$ distance polaire de l'astre, complément de sa déclin. En résolvant ce triangle, on trouve l'angle horaire p, par l'éq. (*voy.* n° 77, page 75)

$$2k = z + d + c,$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin(k - c) . \sin(k - d)}{\sin c . \sin d} \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

On mesure avec un instrument la hauteur ou la distance zénithale d'un astre; on corrige cet arc de *réfraction — parallaxe* (*voy.* p. 336), et l'on a la valeur de z. Les tables font connaître la déclin. D de l'astre, et par suite sa distance polaire d, qui en est le complément, $d = 90^\circ - D$. Bien entendu que s'il s'agit d'une étoile, l'arc D doit être pris en tenant compte de la précession, de la nutation et de l'aberration, corrections qui sont toutes faites dans la *Conn.*

des Tems pour le Soleil, la Lune et les principales étoiles.

La formule fait alors connaître l'arc $\frac{1}{2}p$ en degrés, mais comme il faut exprimer l'arc p en temps, on multiplie par 8 (p. 335), et l'on connaît l'angle horaire p. Il faut alors distinguer quatre cas, selon qu'on a observé le Soleil ou une étoile, et qu'on demande l'heure sidérale ou l'heure solaire.

1°. Quand on a pris la hauteur du centre du Soleil (en mesurant tour à tour celle du bord supérieur et celle du bord inférieur, et prenant la moyenne), l'angle horaire p en temps est l'heure vraie, quand l'astre est à l'ouest, ou le complément à 24^h, s'il est à l'est (éq. 8, p. 350). Et lorsqu'on veut l'heure moyenne, il faut ajouter l'éq. du temps pour cet instant (éq. 1, p. 341).

2°. Mais si l'on demande l'heure sidérale, il faut ensuite traduire l'heure moyenne en sidérale par l'éq. 3, p. 348.

3°. Quand l'astre observé est une étoile, l'angle horaire donne immédiatement l'heure sidérale, par l'éq. (7), p. 350.

4°. Et si dans ce dernier cas on veut avoir l'heure solaire, il reste à traduire cette heure sidérale en solaire, par l'éq. (3), p. 348, qui devient

$$\text{heure solaire} = Æ\,\ast - Æ\,\odot \pm p,$$

$+$ si l'étoile est à l'ouest, $-$ dans l'autre cas; lorsqu'il s'agit d'une circompolaire, on prend ces signes en sens contraire.

Le calcul est un peu plus simple pour le Soleil que pour une étoile, lorsqu'on ne trouve pas l'asc. dr. et la déclin. de l'étoile toute corrigée dans la *Conn. des Tems*, et qu'on est obligé d'avoir égard, par un calcul spécial, à la précession, la nutation et l'aberration.

Lorsqu'on demande l'heure avec une grande précision, il faut mettre les calculs à l'abri d'une petite erreur due à l'instrument dont on se sert pour observer la dist. zénith. de l'astre. C'est ce qu'on fait en recommençant l'opération, et observant un nouvel astre de l'autre côté du méridien, et à peu

près à même hauteur. La moyenne entre les deux déterminations n'est plus influencée par l'erreur dont il s'agit. (*Voy*. ce qui sera exposé ci-après, n° 414.)

406. Près de l'horizon les réfractions sont très variables et n'offrent pas de résultats précis; vers le méridien les hauteurs varient trop lentement. Voilà pourquoi l'on préfère observer les astres près du premier vertical (plan vertical perpendiculaire au méridien), et vers 12° d'élévation au moins. Et pour rendre l'opération indépendante des erreurs d'observation, on mesure 4 ou 6 distances au zénith, en notant avec soin l'heure de la pendule à l'instant où l'on prend chacune d'elles. On prend la moyenne entre ces heures, et on la regarde comme étant celle de la moyenne entre les hauteurs ou distances au zénith; ce qu'on peut prouver être très exact, quand on n'en prend que 4 à 6.

On suppose connues la longitude du lieu et sa latitude : celle-ci entre dans l'éq. (9) par son complément $c = 90° - l$; et l'asc. dr. du Soleil dépend de la 1re. Toutefois la longitude est inutile pour obtenir l'heure sidérale.

407. Le 10 août 1836, à Berlin (la latitude de cette ville est $l = 52°21'13''$, et la longitude 44'8'' de temps, relativement à l'Observatoire royal de Paris), on a mesuré 4 distances zénithales d'Arcturus vers l'ouest. La moyenne, corrigée de la réfraction, est $z = 58°28'48''$, et l'heure du lieu était au chronomètre $9^h6'23'',5$; la *Conn. des Tems* donne l'asc. dr. et la déclin. de l'astre, et l'on fait le calcul suivant :

			Calcul du temps moyen.
$a = 58°28'48'',0$			$p = 4^h16'\ 9'',96$
$d = 69.57.35,8$	sin..... T.9728752		Æ ★ = 14. 8.11,83
$c = 37.38.47,0$	sin..... T.7858894		Æ ☉ = —9.15.56,42
$2k = 166.\ 5.10,8$	—T.7587646		9. 8.25,37
$k = 83.\ 2.35,4$		correction (*)..	—1.22,28
$k-d = 13.\ 4.59,6$	sin..... T.3548114	h. moy.	9.7. 3,09
$k-c = 45.23.48,4$	sin..... T.8524717	chron.	9.6.23,50
	sin².... T.4485185	retard	—32,59
$\frac{1}{2}p = 32.\ 0.14,73$	sin..... T.7242593	sur temps moy.	

8 fois. $4^h.16'9'',96 = p$ vers l'ouest.

Le 1er mai 1836, la moyenne de quatre observations des bords supérieur et inférieur du Soleil, à Paris, après avoir ajouté *réfraction — parallaxe*, a donné $z = 63°51'1'',8$ vers l'est. On trouve dans la *Conn. des Tems* que $d = 70°49'47'',3$ à ce même instant ; et l'on fait le calcul suivant :

$z = 63°51'\ 1'',8$			
$d = 74.49.47,3$	sin..... T.9845961		
$c = 41.\ 9.46,0$	sin..... T.8183582		
$2k = 179.50.35,1$	— T.8029543		
$k = 89.55.17,5$			$p = 4^h29'45''9$
$k-d = 15.\ 5.30,2$	sin..... T.4155811	Ct. à 12^h =	7.30.14,1
$k-c = 48.45.31,5$	sin..... T.8761835	éq. t. =	11.56.53,9
	sin².... T.4888103	h. moy.....	7.27. 8,0
$\frac{1}{2}p = 33.43.14,1$	sin..... T.7444051	chron.......	7.26.33,0
8 fois... $4^h29.45.52,8 = p$		retard sur temps moyen.	—35,0.

L'observation étant faite le matin, le complément de p à 12^h est l'heure vraie.

408. On a quelquefois besoin de connaître réciproquement la hauteur d'un astre, à une heure donnée; voici comment on doit opérer.

(*) L'asc. dr. ☉ moyen a été employée pour midi moyen à Paris, qui revient à $0^h44'8''$ temps moy. à Berlin : on la corrige, par la table V, 1re colonne, pour $8^h24'15''$ de temps écoulé.

Dans le triangle sphérique pqz (fig. 129) on connaît deux côtés et l'angle compris, savoir, pq distance polaire d de l'astre, pz colatitude c, et l'angle horaire p, et il s'agit de trouver le 3e côté, ou la distance zénithale $zq = z$. Les éq. du 3e cas page 77 sont ici (1, 3 et 5), savoir :

$$\tang \varphi = \tang d \cos p, \quad \varphi' = c - \varphi, \ \cos z = \frac{\cos d \cos \varphi'}{\cos \varphi}.$$

Par ex., le matin du 18 octobre 1836 à $7^h 55' 31'',47$ temps vrai au Caire, on demande quelle est la hauteur du Soleil. Comme la longitude du Caire est $1^h 55' 41''$, on compte alors à Paris le 17 octobre à $17^h 45' 6'',16$ temps moyen, d'où l'on conclut la déclin. $\odot = 9^\circ 38' 57'' 4$ aust. et $d = 99^\circ 38' 57'',4$. La colatitude du Caire est $c = 59^\circ 57' 56$.

tang d..........	0.7694945—	cos d.........	$\bar{1}$.2243173—
cos p...........	$\bar{1}$.6839415	cos φ'........	$\bar{1}$.8131879—
tang φ..........	0.4534360—	cos φ	—$\bar{1}$.5211970
φ =	— 70°36'25",38	cos z......	$\bar{1}$.5163082+
c =	59.57.56,00	z...... =	70°49'57",6
φ' =	130.34.21,38	h...... =	19.10.2,4

On peut encore se servir de l'éq. p. 75, 3e cas, qui est moins propre au calcul des log., et devient ici

$$\cos z = \cos c \cos d \,(1 + \tang c \tang d \cos p)$$
$$= \sin l \sin D \,(1 + \cot l \cot D \cos p).$$

Nous appliquerons cette double théorie à un exemple. Au reste, quand on a deux côtés et l'angle compris, le triangle sphérique peut être résolu comme n° 520.

Le 30 mai 1836, on demande la hauteur du Soleil (la station a pour latit. $43^\circ 23' 14$, long. $0^h 34' 47''$ ouest) à $5^h 18' 52''$ t. vr. Cette heure revient à $5^h 53' 39''$ t. vr. de Paris, ou $5^h 51' 0'',4$ temps moyen, nombre qui sert ensuite à trouver la déclin. $\odot = 22^\circ 0' 4'',9$. Ainsi l'on a

$p = 5^h 18' 52'' = 79° 43' 0''$, $d = 67° 59' 55'',1$, $c = 46° 36' 46$.

1er procédé.

tang d.....	0.3935607		
cos p......	$\bar{1}.2516772$		
tang φ.....	$\bar{1}.6452379$	cos d.........	$\bar{1}.5736010$
φ =	$23° 50' 11'',17$	cos φ'.......	$\bar{1}.9647418$
c =	$46.36.46$	cos φ........	$-\bar{1}.9612801$
$c - \varphi$ =	$22.46.34,83 = \varphi'$,	cos z........	$\bar{1}.5770627$.

2e procédé.

tang d.....	0.3935607	cos d.........	$\bar{1}.5736010$
cos p.....	$\bar{1}.2516772$	cos c........	$\bar{1}.8369096$
tang c.....	0.0244622	1.4674122....	0.1665521
	$\bar{1}.6697001$	cos z........	$\bar{1}.5770627$
nombre	$0,4674122$	z........	$= 67° 48' 47'',7$

409. *Méthode des hauteurs correspondantes.* Une étoile ne changeant de place au ciel qu'en apparence, et par l'effet de la rotation diurne, n'est visiblement à la même hauteur vers l'est, puis vers l'ouest, qu'autant que les deux angles horaires sont égaux. On en conclut que si l'on note les heures d'un chronomètre, quand l'étoile est à la même distance zénithale de part et d'autre, le milieu de la durée écoulée est celle du passage au méridien ; prenant la moyenne entre ces heures, on a celle du chronomètre à l'instant de ce passage. Et comme cette heure, soit sidérale, soit moyenne, est connue d'avance (n° 401), il est clair qu'on sait ainsi quel est le retard ou l'avance de la pendule.

Soient donc t et t' les heures du chronomètre lorsqu'une étoile s'est trouvée à la même hauteur des deux côtés du méridien : l'heure marquée à l'instant du passage est $\frac{1}{2}(t + t')$, en supposant que la pendule a conservé une marche uniforme dans l'intervalle. Il faut que la 2e heure t' soit $> t$, en sorte que si l'aiguille a passé sur 12^h pendant la durée écoulée, au lieu de compter $1^h, 2^h$... après 12^h, il faut compter $13^h, 14^h$, etc.

Pour affaiblir les erreurs d'observation, on la répète plusieurs fois consécutives : chacune de ces couples donne sa moyenne, et la moyenne entre tous les résultats est, avec plus de précision, l'heure qu'on demande.

L'astre doit être au moins à 2^h de distance du méridien.

On est dans l'usage de fixer la lunette de l'instrument sur des graduations équidistantes du limbe, et d'attendre chaque fois que l'astre vienne se présenter au fil horizontal tendu au foyer. On remarquera qu'il n'est pas nécessaire d'avoir la hauteur de l'étoile, mais seulement que cette hauteur soit la même des deux côtés du méridien. Voici un ex. de ces calculs :

Hauteurs.	Est.	Ouest.	Sommes.	Moitiés.
19°50'	$8^h 11' 26'',4$	$15^h 25' 7'',8$	$23^h 36' 34'',2$	$11^h 48' 17'',1$
20. 0	12.37,6 nuages			
10	13.49,0	22.45,4	35,4	17,2
20	14.59,8	21.34,8	34,6	17,3
30	16.11,2	20.24,0	35,2	17,6
			Moyenne.	$11^h 48' 17'',3$

Ainsi, si l'astre observé est le Soleil, la pendule retarde sur le temps vrai de $11' 42'',7$, sauf une correction dont il va être question. On a noté 15^h au lieu de 3^h, dans la 3e colonne, pour que t' fût $> t$.

410. Cette théorie n'est vraie qu'autant que l'astre conserve la même déclin. dans l'intervalle, ce qui a lieu pour les étoiles, mais non pas pour le Soleil. Que cet astre soit observé à l'est en A (fig. 125), et lorsqu'il atteint à l'ouest le cercle horaire PB faisant l'angle MPB = MPA avec le méridien PM, P étant le pôle et z le zénith, le Soleil n'est point revenu en B sur le même cercle horizontal AB, parce que s'étant rapproché du pôle, au lieu d'être en B, il est en i. Il faut donc que le mouvement se continue encore quelque temps, pour que de i, le Soleil retombe en C sur le cercle AC à même hauteur que A.

Mais alors l'angle CPM est $>$APM, et le milieu de la durée écoulée, n'est plus l'instant du passage au méridien. Faisons l'angle APM $= p =$ BPM, BPC $= dp$, APC $= 2p + dp$: la moyenne entre les heures écoulées t et t', ou $\frac{1}{2}(t' - t)$ est $= p + \frac{1}{2} dp$: ajoutant l'heure t de la 1re observation, il vient d'abord $p = \frac{1}{2}(t' + t - dp)$, puis l'heure de la pendule

à l'instant du passage au méridien, est

$$T = \frac{1}{2}(t + t') - x \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

en représentant $-\frac{1}{2}dp$ par x.

Ainsi, lorsqu'on aura pris des hauteurs correspondantes du Soleil, l'heure du milieu aura besoin de recevoir une correction $x = -\frac{1}{2}dp$, pour devenir celle du chronomètre à midi vrai, à raison du changement de déclin. dans cette durée.

Il s'agit donc de calculer cette correction $x = -\frac{1}{2}dp$.

Soient z = la distance zénithale du Soleil, l la latitude du lieu complément de l'arc $PZ = 90° - l$, D la déclin. de l'astre en A; le triangle sphérique PZA donne (éq. 3, p. 68)

$$\cos z = \sin l \sin D + \cos l \cos D \cos p \ldots . \quad (2);$$

le triangle s'étant changé en PZC la déclin. D et l'angle horaire p ont seuls varié : différentions donc en prenant z et l constans ;

$$(\sin l \cos D - \cos l \sin D \cos p)\, dD = \cos l \cos D \sin p \,.\, dp ;$$

dp et dD sont de fort petits arcs exprimés par la même unité, par ex. en secondes de degré. Si ν est la variation diurne de la déclin. du Soleil, et que $2\theta = t' - t$ soit le temps écoulé, on a la partie de cette variation qui est produite dans cet intervalle, en posant $24^h : \nu :: 2\theta : dD = \frac{1}{12}\nu\theta$; ici θ est rapporté à l'heure, et ν à la seconde de degré, ainsi que dp · du reste ν et θ sont connus. Tirons donc dp de notre éq. en y substituant cette valeur de dD, et changeons en outre dp en $15\,dp$, pour que dp *exprime des secondes de temps* ($15°$ valent 1^h, p. 352) : on en tire

$$dp = \frac{\theta\nu}{180}\left(\frac{\tang l}{\sin p} - \tang D \cot p\right);$$

la correction $-\frac{1}{2}dp$ est donc, en seconde de temps,

$$x = \frac{\theta\nu}{360}\left(\cot \theta \tang D - \frac{\tang l}{\sin \theta}\right) \ldots\ldots \quad (3)$$

Nous avons remplacé ici p par sa valeur θ, qui, sous les signes cot. et sin., doit être exprimée en degrés.

411. 1°. D est la déclin. ⊙ à midi; on prend D en —, quand le Soleil est dans les signes inférieurs : la latitude l est négative quand elle est australe.

2°. ν est la variation de la déclin. D en 24^h, exprimée en secondes de degrés : ce nombre est donné dans la colonne *différ.* de la *Conn. des Tems.* On prend ordinairement pour ν la moyenne entre les deux variations des jours que le midi cherché sépare. On donne à ν le signe —, quand l'astre va en s'éloignant du pôle boréal.

3°. $\theta = \frac{1}{2}(t' - t)$ est la demi-durée écoulée, exprimée en heures de temps vrai; on la traduit en degrés sous les signes sinus et cotangentes.

4°. Quand la 1re observation est faite le soir, et la 2e le lendemain matin, le calcul dont il s'agit détermine l'heure de la pendule à minuit. D est la déclin. du ⊙ à cet instant, et il faut prendre le dernier terme de l'éq. (3) avec le signe + au lieu de —.

Ainsi dans l'ex. précédent, si l'on observe le ⊙ le 2 octobre 1836, on a $D = -3°41'20'',3$, $\nu = -1395''8$, $l = 48°41'$,

$$\theta = 3^h35'33'' = 3^h,5925 = 53°53'15''.$$

c^t 360……	$\bar{3}.44370$				
θ………	0.55540	}…	1.14392 +		
ν………	3.14482 —				
		tang l…	0.05540	moyenne……	11^{h}48′17″,30
cot θ……	$\bar{1}.86305$	sin θ	— $\bar{1}.90734$	correction……	+ 20,23
tang D…	— $\bar{2}.80937$ —		1.29198 +	h. vraie……	11.48.37,53
+ 0″65…	$\bar{1}.81634$ +	2e..	+ 19″58	éq. temps……	11.49.16,51
		1er.	+ 0,65		
		correction………	20,23	retard sur t. m.	—38,98.

Ce procédé est fort exact, et même le calcul en est très facile, parce qu'on peut réduire la formule (3) en table, d'où l'on tire à vue la valeur des deux termes.

Mais on est fréquemment exposé à manquer le soir, les

observations correspondantes à celles du matin, parce que le ciel se trouve voilé par des nuages. On comprend que la correction étant en général fort petite, on a été en droit de substituer à D la déclin. du Soleil à midi, dans l'éq. (3), au lieu de la déclin. en A. La hauteur de l'astre observé n'est, comme on voit, nullement nécessaire à connaître.

Détermination de la latitude du lieu.

412. *Par deux passages du méridien, l'un supérieur, l'autre inférieur.* On observe les deux hauteurs LD, LC (fig. 130) d'une étoile circompolaire, lorsque dans son cercle diurne CD, autour du pôle P, elle entre dans le plan du méridien, et l'on corrige de la réfraction. La demi-somme de ces résultats est la latitude cherchée $l =$ la hauteur LP du pôle : la demi-différ. de ces deux arcs est la distance PD de l'étoile au pôle, complément de sa déclinaison.

Ainsi ce procédé est indépendant de cette déclin., et la fait même connaître. Il est extrêmement précis, mais rarement praticable. D'ailleurs il ne faut pas que l'étoile soit éloignée du pôle, parce qu'elle passerait en D trop près de l'horizon, où les réfractions sont incertaines, et en C trop près du zénith, où il est difficile d'observer. C'est la Polaire qui est ordinairement l'étoile qu'on préfère, ou quelque autre étoile de la Petite Ourse.

413. *Par un passage au méridien.* Qu'on mesure avec soin la hauteur ds (fig. 132) d'un astre s, à l'instant où il est au méridien pzd; z est le zénith, p le pôle, cd l'horizon, ce l'équateur. Après avoir corrigé de *réfraction — parallaxe*, cette hauteur ds (ou la distance zénithale sz), on a $ed = pz = 90° - l =$ hauteur de l'équateur ou colatitude du lieu. D'ailleurs $se = \text{D}$ est la déclin. connue de l'astre, complément de sa distance au pôle sp. Ainsi $sd = ed + es$ donne, en faisant $h =$ hauteur sd, $z =$ dist. zénithale sz (après la correction),

$$l = z + \text{D} = 90° + \text{D} - h = 90° + z - d = 180° - (h + d) \dots \quad (1)$$

Ces expressions conviennent aux cas où le *passage se fait du côté du sud.*

On prend D négatif, quand l'astre est en s' sous l'équateur, c.-à-d. quand sa déclin. est australe.

Les circompolaires ont deux passages visibles *du côté du nord* (fig. 130); la formule doit être modifiée pour l'un et l'autre. En raisonnant comme on vient de le faire, on trouve

Passage entre le pôle et le zénith,

$$l=h-d=D-z=90^\circ-(z+d)=h+D-90^\circ \ldots \quad (2)$$

Passage entre le pôle et l'horizon nord — $(z+D)$

$$l=h+d=90^\circ+d-z=90^\circ+h-D=180^\circ-(z+D) \ldots (3)$$

Bien entendu que la déclin. de l'étoile observée doit être corrigée de la précession, de la nutation et de l'aberration.

414. On a reconnu que les cercles répétiteurs à grands diamètres dont on se sert en géodésie pour les observations astronomiques, sont affectés d'une erreur qui leur est particulière ; cette erreur, qui rend trop faibles les distances zénith. observées, provient en grande partie d'une flexion de la lunette supérieure, flexion qu'on attribue au poids de l'objectif.

L'erreur dont il s'agit est très faible et varie avec les dist. zénith. à peu près dans le rapport de leurs sinus. Lorsque dans une station et pendant la durée des observations, le cercle répétiteur n'éprouve aucun déplacement, on est certain qu'alors son erreur particulière est constante pour une même dist. zénith. Il n'en est pas de même lorsque cet instrument est transporté d'un lieu à un autre, du moins à de grandes distances : son erreur varie, et atteint quelquefois le double de ce qu'elle était d'abord. De nombreuses observations attestent ce fait.

Il suit de là que pour obtenir avec une précision rigoureuse la latitude d'un lieu, il faut observer des dist. zénith. méridiennes de deux astres, l'un au nord, l'autre au sud, distances qui doivent être à peu près égales, autant que possible, afin que l'erreur de l'instrument soit la même, et que celle de la réfraction soit dans le même cas. La moyenne

entre les deux résultats donnera la latitude avec toute l'exactitude désirable. La demi-différ. de ces résultats sera donc l'erreur particulière de l'instrument pour la hauteur observée.

Si l'on veut obtenir une seconde détermination de la latitude du même lieu par l'observation de deux autres astres soumis aux conditions énoncées, mais à des dist. zénith. très différentes des précédentes, on trouvera une latitude très concordante avec la 1re, en admettant que chaque détermination ait été faite par des séries de 20 et 30 répétitions, afin de compenser les erreurs d'observation. Mais l'erreur particulière à l'instrument qu'on déduira de ces nouvelles dist. zénith. ne sera pas la même que celle qui a été obtenue dans le 1er cas. On verra si la variation de cette erreur est dans le rapport des sinus des dist. zénith.; dans le cas contraire, on cherchera une formule empirique propre à exprimer approximativement la loi de cette variation.

Quand l'heure n'est connue que par des dist. zénith. absolues (p. 352), il importe alors de connaître l'erreur particulière au cercle répétiteur dont on a fait usage, afin d'appliquer aux observations qui ne seraient faites que d'un seul côté du méridien, une correction nécessaire à la précision. Si l'on a la précaution de déterminer le temps par des observations de dist. zénith. absolues faites à l'est et à l'ouest, la moyenne entre les heures obtenues par ces deux déterminations, sera dégagée de l'erreur du cercle. Mais il arrive souvent que, par un prompt changement dans l'état de l'atmosphère, une observation faite d'un côté du méridien, ne peut plus être corrigée par celle de l'autre côté, parce que le ciel s'étant couvert, cette dernière n'est pas possible. Il convient alors d'appliquer à cette détermination unique, la correction due à l'erreur de l'instrument, afin de détruire l'influence qu'elle exerce sur le résultat.

Nous donnons ici un ex. de ces calculs que M. Coraboeuf a bien voulu nous communiquer. Ce savant faisait usage d'un cercle de Gambey de 33 centim. de diamètre, et voulait obtenir la latitude d'Angers : il a trouvé

Étoiles observées.	*Dist. zénith.*	*Latitude.*	*Erreur.*
ζ Petite Ourse............	27°23′	47°28′ 10″95	4″,77
Arcturus....................	27.23	47.28. 1,41	
moyenne..............		47.28. 6,18	
Polaire (pass. sup.)...........	40.55	47.28.15,21	7″,90
	40.29	47.27.59,41	
moyenne		47.28. 7,31	
1er résultat...........		47.28. 6,18	
latitude définitive d'Angers................		47.28. 6,75.	

Les remarques précédentes doivent être faites pour toutes les méthodes d'observation de temps, de latitudes, etc., lorsqu'on prend pour base des calculs les dist. zénith. des astres.

415. *Par des hauteurs d'un astre observé près du méridien* (fig. 131). Les méthodes qu'on vient d'exposer ont l'inconvénient de ne pas se prêter à la répétition fréquente, pour affaiblir les erreurs d'observation en les multipliant; l'astre doit en effet être observé une seule fois à l'instant où il traverse le méridien. Le procédé suivant est dû à Delambre; il permet de réitérer les mesures un grand nombre de fois en peu de temps : c'est ainsi que ce savant a opéré dans la grande triangulation française.

p est le pôle, z le zénith, $pzmo$ le méridien, s un astre voisin de ce plan, ps son cercle horaire, m le point où l'astre passe au méridien, et par conséquent $ps = pm = d = 90° - D$. Du zénith z pour centre, traçons l'arc so, et nous aurons $zs = zo$, s et o de même niveau. Faisons le petit arc $mo = x$, et calculons-en la valeur. Dans le triangle sphérique pzs, on a (éq. 15, p. 74)

$$\cos zs = \cos(ps - pz) - 2 \sin pz \,.\, \sin ps \sin^2 \tfrac{1}{2} p\,;$$

or $sz = oz = zm + x$; le 1er membre devient

$$\cos zm \,.\, \cos x - \sin zm \,.\, \sin x = \cos zm\,(1 - \tfrac{1}{2} x^2) - x \sin zm\,;$$

car x étant fort petit, on peut négliger les 3es puissances de

cet arc, dans les développemens de $\sin x$ et $\cos x$, (éq. 16 et 17, p. 36).

Quant au 2e membre, comme $pz = 90° - l$, et $ps = 90° - D$, il devient

$$\cos(l - D) - 2\cos l \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2}p.$$

Donc à cause de $zm = pm - pz = ps - pz = D - l$, on trouve

$$\tfrac{1}{2}x^2\cos(l - D) + x\sin(l - D) = 2\cos l \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2}p \ldots \text{(A)}$$

Telle est la relation qui est destinée à donner le petit arc x. Pour cela, appliquons le procédé exposé dans la note p. 206, en y faisant

$$K = \frac{2\cos l \cos D \sin^2 \frac{1}{2}p}{\sin(l - D)},\ h = \tfrac{1}{2}\cot(l - D),\ \text{et } \tan x = x.$$

416. Au reste, on parvient au même résultat par le moyen suivant, qui montre mieux comment l'approximation se développe, et n'est au fond que le procédé de la note citée.

Négligeons le terme en x^2, pour une 1re approximation, et changeons x en $x \sin 1''$, afin d'exprimer l'arc x en secondes de degré : nous avons

$$x = k \times \frac{\cos l \cos D}{\sin(l - D)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(B)}$$

en posant $$k = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}p}{\sin 1''} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(C)}$$

On a donc ainsi *le nombre* x *de secondes dont l'astre doit monter de* s *en* m, *pour entrer au méridien*, dans le temps marqué par l'angle horaire p.

Soit H la hauteur de l'astre en s, Z sa distance zénithale (corrigée de réfraction — parallaxe), valeurs obtenues l'une ou l'autre d'après une observation : soient h et z les valeurs de ces arcs quand l'astre sera en m au méridien ; d'où

$$h = H + x,\quad z = Z - x \ldots\ldots \text{(D)}$$

Une fois qu'on a z ou h, l'éq. (1), p. 361, fait ensuite con-

naître la latitude l, comme si l'astre eût été observé au méridien même.

Mais comme, dans tous les instans voisins, soit avant, soit après le passage, on peut obtenir différentes hauteurs ou distances zénithales successives, savoir H′, H″,..., ou Z′, Z″,..., en notant les heures p', p''... correspondantes, on obtient, pour chaque observation, une valeur de h ou de z. Toutes celles-ci devront être les mêmes, parce que les 1[res] ont chacune leur correction propre x', x'',... ; et les petites différ. des résultats devront être attribuées aux erreurs d'observation. Et puisque ces erreurs se compensent par leur nombre, la moyenne donnera une latitude fort exacte. Tel est l'esprit de cette ingénieuse méthode, dont il nous reste à développer les conséquences.

417. Les hauteurs méridiennes sont $H'+x'$, $H''+x''$,...; la moyenne entre n observations donne

$$\frac{H'+H''+\dots}{n}+\frac{x'+x''+\dots}{n}= \textit{la moyenne } H \textit{ entre les hauteurs}$$
$$+ \textit{ la moyenne } x \textit{ entre les corrections;}$$

de ces deux parties, la 1[re] H est celle qu'on lit sur l'instrument après toutes les observations dont il donne la somme, et qu'on divise par n : ensuite on corrige de la *réfraction — parallaxe*. Quant à la 2[me] x, comme dans l'éq. (B), le facteur k varie seul avec p, il faudra prendre pour k la moyenne entre les nombres k', k'',.., attendu que $\dfrac{\cos l \cos D}{\cos h}$ est un facteur constant.

418. En conséquence : 1°. on mesurera diverses hauteurs successives d'un astre non loin du méridien, tant avant qu'après son passage, et l'on notera les heures de chaque observation.

2°. On cherchera l'heure que doit marquer la pendule à l'instant du passage, et les différ. entre ces heures et celles des observations, différ. qui sont p', p'',... en temps.

3°. Chaque durée répond à une valeur de k qu'on calculera par l'éq. (C) ; et pour abréger ce travail, on formera une table

donnant les nombres k pour chaque angle horaire p', p''... C'est ce qu'on appelle des *réductions au méridien* (*voy.* table de l'*Astron. pratique*); on a ainsi à vue les nombres k', k''...

4°. On prendra la moyenne k entre tous ces résultats, et on l'introduira dans l'éq. (B), qui donnera la correction x que H ou Z doit éprouver pour devenir h ou z (éq. D).

5°. On connaîtra donc la hauteur h de l'astre au méridien ou sa distance zénithale z, comme si elle eût été observée n fois, et qu'on eût pris la moyenne de ces résultats. Enfin l'éq. (1) donnera la latitude l avec une grande précision. Mais avant il faudra corriger h ou z de *réfraction—parallaxe*.

Il faudra aussi corriger l'asc. dr. et la déclin. de l'astre des précession, nutation et aberration, s'il s'agit d'une étoile pour laquelle ce travail ne soit pas tout fait dans la *Conn. des Tems*.

419. Ces calculs ont une exactitude suffisante; mais il faut se mettre en garde contre diverses causes d'erreur.

Il n'est pas indispensable que l'heure de la pendule soit très exactement connue pour l'instant du passage, pourvu qu'on prenne autant de hauteurs avant qu'après cette heure supposée.

Si la marche de la pendule ne s'accordait pas avec celle de l'astre, avant d'entrer dans la table des réductions au méridien, il faudrait corriger les distances horaires p', p'',... mais cette opération peut être très simplifiée, comme on va le voir. En effet, désignons par a l'avance de la pendule, et par $-a$ le retard, en 24^h, sur la durée de la révolution complète de l'astre; si a exprime des secondes de temps, et qu'on représente $86400''$ par A, on a la proportion :

Si $A + a$ doit être réduit à A, le temps p le sera à $\dfrac{Ap}{A+a}$;

et comme a est toujours fort petit par rapport à A, ce 4e terme

$$= p\left(1+\frac{a}{A}\right)^{-1} = p - \frac{ap}{A} = p - 0{,}0000116 . ap;$$

faisons donc $\gamma = 1 - 0{,}0000116\,a$, chaque durée écoulée p devra être changée en γp; $\sin^2 \frac{1}{2} p$ le sera en $\sin^2 \frac{1}{2} \gamma p$, ou, si

l'on veut, en $\gamma^2 \sin^2 \frac{1}{2} p$, attendu que l'arc est fort petit. Et comme ce facteur γ^2 est constant pour toutes les durées p', p''... il suffira, pour tenir compte dans le calcul, de l'avance diurne de a secondes de la pendule, d'introduire dans la formule (B) γ^2 pour facteur, ou

$$\alpha = 1 - 0{,}000023.a; \ldots\ldots \quad (E)$$

donc
$$x = \alpha k \times \frac{\cos l \cos D}{\cos h} \ldots\ldots \quad (F)$$

Cette correction est principalement utile, quand la pendule marque le temps moyen, et qu'on observe une étoile; ou réciproquement lorsque la pendule est sidérale et qu'on observe le Soleil. Dans le 1[er] cas la pendule retarde de 235",909 par jour (*voy.* p. 342), ou $a = -235'',909$, et

$$\alpha = 1{,}005482, \quad \log \alpha = 0{,}0023746.$$

Dans le 2[e] cas, il y a une avance a, qui est la différ. entre deux asc. dr. ⊙ consécutives de la *Conn. des Tems*, prises à la date de l'observation.

Du reste, si la marche de la pendule s'écarte sensiblement du temps moyeu ou sidéral, il faut calculer la valeur de α qui doit tenir lieu des précédentes d'après la grandeur de son avance diurne.

Après le passage au méridien, les angles horaires p sont négatifs; mais comme les sinus sont au carré, aucun nombre k ne prend le signe —; tout se passe comme si les observations étaient faites d'un même côté du méridien.

420. Lorsqu'on prolonge les observations à plus de 6 ou 7 minutes de temps du méridien, il n'est plus possible de négliger le terme en x^2 dans l'éq. (A). Changeons-y x en $x \sin 1''$, puis mettons dans le 1[er] terme transposé le carré de la valeur (F) au lieu de x^2 : il viendra cette éq. qui suffit à tous les cas :

$$x = k\alpha . \frac{\cos l \cos D}{\sin(l-D)} - m \cot(l-D) . \left[\frac{\cos l \cos D}{\sin(l-D)}\right]^2 \ldots, (G)$$

avec
$$k = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} p}{\sin 1''}, \quad m = \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2} p}{\sin 1''}.$$

On compose aussi une table des valeurs de m. (*Voy.* l'*Astr. pratique*, p. 210.)

421. Jusqu'ici nous avons supposé que l'astre passe au méridien du côté du sud ; pour appliquer cette théorie aux étoiles de la Petite Ourse, pour lesquelles $D > l$, il faut modifier les résultats. La marche des circompolaires est si lente qu'on peut prolonger les observations pendant une demi-heure à l'est, et autant à l'ouest du méridien, et par conséquent les rendre plus nombreuses ; ce qui donne beaucoup d'utilité à la méthode.

Ainsi quand l'astre est observé au nord,

Entre le pôle et le zénith, changez dans l'éq. (G) $l - D$ en $D - l$;
Entre le pôle et l'horizon, remplacez $-D$ par $+D$,

et comme $l + D$ est $> 90°$, le dernier terme de l'éq. (G) devient positif.

La correction x donne

$$h = H + x, \quad z = Z - x\,;$$

seulement, dans le 1[er] cas, l'astre descend pour arriver au méridien, et il faut prendre x en signe contraire.

Les éq. (2) et (3), n° 413, donnent enfin la latitude l.

422. Par exemple, pour avoir, en un lieu dont la latitude est à peu près de 41°23′, une valeur exacte de cet arc, le 17 avril 1836, on observe ζ Gémeaux près du zénith : la pendule marche sur le temps moyen, et retarde de 8″,75 par jour ; en sorte que le retard sur le mouvement sidéral est $-244''$,66, d'où $\alpha = 1,005383$. D'après la *Conn. des Tems*, on a

$$Æ\,\star = 7^h 35' 16'',15, \quad D = 28°25'6'',00\,;$$

on en conclut l'heure moy. du passage en temps de la pendule, que nous supposons être

5h48′29,″7 heure moyenne du passage
−17.17,4 retard de la pendule sur le temps moy.

5.31.12,3 heure de la pendule au passage.

obs. 5.26.30 différ....... 4′42″,3...... k = 43″,46...m = 0,002
28. 0................ 3.12,3...... 20,17........ 0,001
33.25................ 2.12,7...... 9,60........ 0,000
34.50................ 3.37,7...... 25,85........ 0,002
36.40................ 5.27,7...... 58,57........ 0,005
38.18................ 7. 5,7...... 98,83........ 0,023

sommes........ 256,48 0,033
moy... k = ... 42,747 m = 0,0055

a.... 0.0023303
l = 41°23′......... cos l.... $\bar{1}$.8752369
cos D... $\bar{1}$.9442340 m......... $\bar{3}$.81291−
z = 12°54′49″,62... sin z.... −$\bar{1}$.3492476... cot z......... 0.63962

0.4725536.... double...... 0.94511

k.... 1.6309056 − 0″,250.... $\bar{1}$.39764

1er terme = 126″,893 .... 2.1034592
2e......... −0,250

x......= 126,643 éq. (1 et D)....... { z = 12°54′49″,62; réfr. = 12,93; D = 28.25.06,00; x = − 2. 6,64

latitude cherchée .... l = 41.18.01,91

423. *Par des hauteurs de la Polaire observée à un instant quelconque.* A (fig. 134) est la Polaire sur son cercle diurne AIA′, P le pôle dont on demande la hauteur l, Z le zénith, ZP $= 90° - l$ = colatitude ; AP $= d$ la distance polaire, AZ $= 90° - h$ compl. de la hauteur observée, après la correction de réfraction ; l'angle APO $= p$ est donné par l'heure correspondante à l'observation de h.

Du point A soit mené l'arc AO perpendiculaire à ZP ; comme l'arc d n'est que d'environ 100′, les arcs ZA, ZO sont presque égaux ; leur différ. x est très petite, ZO $= 90° - h - x$.

Or on a ZO + OP = ZP, c.-à-d. en faisant OP $= y$,

$$90° - h - x + y = 90° - l,$$

d'où

$$l = h + x - y \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Cette éq. donnera l lorsque x et y seront connus. Le triangle sphérique rectangle AOP donne (éq. m et q, p. 69)

$$\sin AO = \sin d \sin p, \quad \tan y = \tan d \cos p. \quad (2)$$

Dans la 1[re] de ces éq. les arcs AO et d sont très petits, et leur rapport est égal à celui de leurs sinus : ainsi AO $= d \sin p$, comme si le triangle AOP eût été plan.

En outre, le triangle sphérique rectangle ZAO donne (éq. m)

$$\cos ZA = \cos ZO . \cos AO,$$

ou

$$\sin h = \sin (h + x) \cos (d \sin p).$$

Développons cette éq. jusqu'au 3[e] ordre :

$$\cos (d \sin p) = 1 - \tfrac{1}{2} d^2 \sin^2 p, \quad \cos x = 1, \quad \sin x = x,$$

car on verra bientôt que x est du 2[e] ordre ; donc

$$\sin h = (\sin h + x \cos h)(1 - \tfrac{1}{2} d^2 \sin^2 p),$$

$$x = \tfrac{1}{2} d^2 \tan h \sin^2 p ;$$

et exprimant d et x en secondes, c.-à-d., changeant x en $x \sin 1''$, et d en $d \sin 1''$,

$$x = \tfrac{1}{2} d^2 \sin 1'' \tan h \sin^2 p ;$$

d'ailleurs $\tan d = d + \frac{1}{3} d^3$, donne pour la 2[e] éq. (2),

$$\tan y = (d + \tfrac{1}{3} d^3) \cos p,$$

et comme $y = \tan y - \frac{1}{3} \tan^3 y$, il vient

$$y = (d + \tfrac{1}{3} d^3) \cos p - \tfrac{1}{3} d^3 \cos^3 p,$$
$$y = d \cos p + \tfrac{1}{3} d^3 \sin^2 1'' \sin^2 p \cos p,$$

en exprimant d et y en secondes. Donc l'éq. (1) donne

$$l = h - (d \cos p) + \alpha (d \sin p)^2 \tan h - \mathcal{C} (d \cos p)(d \sin p)^2. \quad (M)$$

Dans cette éq. d et *les trois derniers termes sont exprimés en secondes*, et l'on a

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \sin 1'', \quad \log \alpha = \bar{6}.3845449,$$
$$\mathcal{C} = \tfrac{1}{3} \sin^2 1'', \quad \log \mathcal{C} = \overline{12}.89403.$$

On connaît par les catalogues d'étoiles l'asc. dr. et la déclin. de la Polaire, corrigées de la précession, nutation et aberration ; ainsi d est donné en secondes. On note l'heure sidérale ou de temps moyen à laquelle on a mesuré la hauteur h de l'étoile, et l'on en conclut son angle horaire p en degrés (p. 350)

$$p = \textit{heure sidér.} - Æ\star = \textit{heure solaire} - Æ\star + Æ\odot.$$

Si l'astre est à l'est du méridien, on prendra ici les seconds membres en signes contraires. Cette circonstance se reconnaît en remarquant que l'arc qui va de la Polaire à ε de la Queue de la Grande Ourse passe sur le pôle. On doit surtout avoir égard au signe de $\cos p$; car si ce cos. est négatif, le 2[e] et le 4[e] terme de l'éq. (M) changent de signe, et prennent + au lieu de —. Ainsi lorsque l'astre est en A', plus bas que le pôle, on a $p > 90°$, et l'éq. reçoit d'elle-même la forme qui convient à cet état.

On ne se borne pas à prendre une seule hauteur h de la Polaire ; mais on en prend 4 ou 6, en notant les heures correspondantes, et l'on applique, comme ci-devant, la moyenne entre les hauteurs à la moyenne des heures. Cette méthode donne la latitude avec une extrême précision.

424. Le 10 octobre 1836 au soir, on a trouvé

chron.	5h39′38″,2	heure moy.	5h59′12″5
	5.46.22,8	Æ⊙ moy.	13.16.26,24
	5.50.54,6	table V, 2[e] col. ..	+ 1. 8,87
	5.59.38,4	Æ★ à l'est	— 1. 1.42,94
	23.16.34,0	$-p$	=19.15. 4,67
moyenne.	5.49. 8,5	supplément	= 4h44.55,33
retard	+10. 4,0		=71°13.49,95
heure moy.	5.59.12,5		

4 distances zénithales 163° 6′ 16″, quart	40.46.34,0
barom. 7·5[mm], therm. 14°, réfraction	49,5
z =	40.47.23,5
h =	49.12.36,5

$D = 88°26'19'',7$
$d = 1.33.40,3 = 5620'',3$

d....	3.7497595		3.74976
cos p....	$\bar{1}$,5075334 +	sin p............	$\bar{1}$.97627
1808",4.....	3.2572929 +		3.72603
double	7.45206		7.45206
c	$\overline{12}$.89403	tang h..........	0.06306
0"40......	$\bar{1}$.603381	a	$\bar{6}$.38454
		79",37	1.89966

$h = ...$ 49°12′36″,60
3e terme.. + 1.19,37
2e........ —30. 8,40 = 1808".4
4e........ — 0,40
$l =$ 48.43.47,97

Détermination de la longitude du lieu.

425. Lorsqu'on ne peut faire usage de signaux de feu, comme il a été expliqué p. 199, pour obtenir la longitude du lieu, il faut recourir aux observations astronomiques. Mais en Géodésie, on ne fait aucun cas des méthodes qui n'ont qu'une exactitude douteuse; aussi les éclipses de Lune et des satellites de Jupiter ne sont-elles d'aucun usage. Les distances de la Lune au Soleil ou aux étoiles ne fournissent pas des résultats assez sûrs, et l'on n'y a recours qu'en mer, comme nous le dirons plus tard.

Mais les éclipses de Soleil et d'étoiles par la Lune sont toujours préférées, parce qu'elles offrent une grande précision. Malheureusement elles ne sont pas fréquentes et exigent des calculs assez pénibles. Voici la marche des opérations. On observe l'heure juste d'une phase de l'éclipse, et, par le calcul, on en déduit l'instant où la longitude des deux astres était la même, c.-à-d. celui de leur *conjonction*. Supposez qu'on ait fait la même opération en un autre lieu, et qu'on ait l'heure de ce méridien lors de la conjonction : la différ. de ces heures, exprimée en temps sidéral, est celle des longitudes des stations. Et si l'on n'a pas cette 2me observation du phénomène, comme l'heure de la conjonction est connue,

par les tables de la *Conn. des Tems*, pour Paris, on a du moins la longitude demandée relativement à cette ville.

426. Développons ce procédé, en commençant par *les éclipses de Soleil.*

On est censé connaître à peu de chose près la longitude demandée, et l'on se propose seulement de l'avoir avec plus de précision. Ainsi l'on connaît l'heure approchée de Paris pour l'instant où, de sa station, on a observé l'éclipse : on tirera de la *Conn. des Tems* les longitudes du Soleil et de la Lune; la latitude, la parallaxe horiz. équatoriale de la Lune; enfin les demi-diamètres et les mouvemens horaires des deux astres (p. 336). Il faut, dans ces calculs, avoir égard aux différ. 2mes :

Avant tout, on doit chercher la latitude géocentrique l' du lieu (n° 178), et la parallaxe horizontale P de la Lune en cet endroit, c.-à-d. en ayant égard à l'aplatissement terrestre μ (*voy.* éq. 5, p. 339, et les valeurs de i et l' n° 178).

$$P = H\,(1 - \mu \sin^2 l').$$

De là, on tire la parallaxe π de longitude L, et celle π' de latitude λ, à l'aide des éq. ci-après.

427. On appelle *nonagésime* le point de l'écliptique qui est à 90° des deux points où ce plan coupe l'horizon. Les éq. suivantes font connaître la longitude N, et la hauteur h de ce point, l' étant la latitude géocentrique, et s, l'heure sidérale actuelle, en degrés.

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} \varphi &= \cot l' \sin s,\\
\operatorname{tang} N &= \frac{\operatorname{tang} s \sin(\omega + \varphi)}{\cos \varphi},\\
\cos h &= \frac{\sin l' \cos(\omega + \varphi)}{\cos \varphi},\\
\sin N &= \cot h . \operatorname{tang}(\omega + \varphi),\\
\cot h &= \sin N . \cot(\omega + \varphi).
\end{aligned}$$

ω est l'obliquité de l'écliptique, φ un arc auxiliaire que donne la 1re éq., et qu'on introduit, avec son signe dans les

suivantes, dont on choisit les plus commodes pour le calcul, selon les cas qui se présentent.

428. Une fois h et N connus, les équations suivantes donnent *les parallaxes* π de longitude L, et π' de latitude λ :

$$x = \frac{\sin P \sin h}{\cos \lambda},$$

$$\pi = \frac{x \sin (L - N)}{\sin 1''} + \frac{x^2 \sin 2 (L - N)}{2 \sin 1''} \ldots\ldots,$$

longit. app. $L' =$ *longitude vraie* $L + \pi$,

$$\cot y = \frac{\cos (L - N + \frac{1}{2}\pi) \tang h}{\cos \frac{1}{2}\pi}, \quad \nu = \frac{\sin P \cos h}{\sin y},$$

$$\pi' = \frac{\nu \sin (y - \lambda)}{\sin 1''} + \frac{\nu^2 \sin 2 (y - \lambda)}{2 \sin 1''} \ldots\ldots,$$

latit. app. $\lambda' =$ *latit. vr.* $\lambda - \pi'$,

x, y et ν sont des arcs auxiliaires qui sont chacun donnés par une éq., et on en introduit les valeurs, avec leurs signes, dans les expressions de π et π'.

429. Il faut aussi trouver le demi-diamètre R' de la Lune, pour la hauteur inconnue où elle se trouve, connaissant le demi-diamètre R vu du centre de la Terre, tel qu'on le tire de la *Conn. des Temps* : car on sait que plus la Lune s'élève sur l'horizon, et plus elle se rapproche de l'observateur, ce qui accroît les dimensions apparentes de cet astre (*voy.* p. 339), on trouve, pour cet accroissement, en secondes

$$x = R(\pi' \sin 1'') \cot (y - \lambda) - \tfrac{1}{2} R (\pi' \sin 1'')^2,$$

$$x = R' - R, \qquad R' = R + x.$$

430. Pour avoir égard commodément à la parallaxe du Soleil, qui est à peine de 8″ à l'horizon, on la suppose nulle ; mais on diminue, dans les calculs précédens, celle P de la Lune de la parallaxe solaire, qui d'ailleurs ne varie pas avec la station. On est de la sorte dispensé de calculer les parallaxes du Soleil en longitude et en latitude.

Nous renvoyons, pour les démonstrations, à l'*Astr. pratique*, p. 130, pour ne pas nous écarter de notre but; une simple récapitulation de ces formules suffit à notre objet.

431. Supposons donc qu'on connaisse les longitudes vraie et apparente ☉ et ☉′ du Soleil, celles ☾ et ☾′ de la Lune, la parallaxe ϖ de longitude lunaire, celle ϖ' de latitude, les demi-diamètres apparens r et R′ des deux astres.

On distingue, dans une éclipse de Soleil, deux phases principales, l'*immersion* et l'*émersion*, lorsque les bords opposés sont en contact extérieur avec la Lune. La 1re arrive au bord droit ou occidental du Soleil, la 2e au bord gauche ou oriental. Mais en outre il peut y avoir deux contacts du côté intérieur. Si le diamètre lunaire est plus grand que celui du Soleil, on a *une éclipse totale*, et s'il est plus petit *une éclipse annulaire*.

Les nombres de la *Conn. des Tems* supposent le spectateur placé au centre de la Terre : les calculs préparatoires qui précèdent sont destinés à donner les déplacemens apparens en longitude, latitude et demi-diamètres, qui résultent de la parallaxe, lorsque les deux astres sont observés de la surface de la Terre, en ayant égard au lieu de l'observateur, et même à l'aplatissement terrestre.

432. Soit donc P le pôle de l'écliptique, dont AB (fig. 135) est un arc apparent, A le centre du Soleil; C celui de la Lune, $\Delta = AC$ leur distance apparente, à l'instant d'un contact extérieur ou intérieur; BC est la latitude apparente λ' de la Lune, $AB = \alpha$ est la différ. de leurs longitudes apparentes. Comme ces arcs sont fort petits, le triangle ABC peut être regardé comme plan et rectiligne, rectangle en B. On a donc $\Delta^2 = \alpha^2 + \lambda'^2$, d'où

$$\alpha = \sqrt{(\Delta + \lambda')(\Delta - \lambda')} \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Or, Δ est la somme ou la différ. des demi-diamètres apparens, selon l'espèce de contact : en exprimant les arcs en secondes, le 2e membre sera connu, et l'on trouvera α.

Pour l'entrée occidentale, ou 1[er] contact extérieur, on a

$$\odot = \odot' - p, \quad ☾ = ☾' - \pi, \quad \alpha = \odot' - ☾,$$

d'où $$\odot - ☾ = \alpha + (\pi - p)\,; \ldots\ldots \quad (2)$$

pour le 2[e] contact extérieur, ou la sortie, $☾ > \odot$, et il faut prendre ici $☾ - \odot$; l'expression est la même, en donnant le signe $-$ à $\pi - p$. Ainsi, pour les deux cas, Δ étant la somme des demi-diam. apparens, on a

Differ. des longitudes vraies $= \alpha \pm (\pi - p) = k$,

en prenant $+$ pour le commencement, et $-$ pour la fin de l'éclipse.

Le même calcul convient aux contacts intérieurs; mais alors Δ représente la différ. des demi-diamètres apparens.

433. On est en droit de regarder le Soleil comme immobile en un point de l'écliptique, pendant la durée de l'éclipse, pourvu qu'on suppose, qu'au lieu de son mouvement horaire M, la Lune a la différ. $M - m$ des mouvemens horaires des deux astres. Ainsi la marche de la Lune en longitude, ou dans le sens de l'écliptique, est $M - m$, en 1^h ou $3600''$ de temps vrai. On trouve le nombre T de secondes nécessaires pour parcourir l'arc k, distance des deux centres en longitude, en posant cette proportion :

Si $M - m$ est décrit en $3600''$, l'arc k l'est en T secondes

$$T = \frac{3600''}{M - m}\,[\alpha \pm (\pi - p)] \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Cette éq. donne le temps écoulé entre la conjonction vraie (*la néoménie*) et celui de la phase d'éclipse observée, en prenant $+$ quand il s'agit d'un contact du bord ouest du Soleil, et $-$ pour le bord oriental. Mais c'est le contraire quand les longitudes vraies du Soleil et de la Lune sont $<$ N, attendu que π et p sont alors négatifs.

Nous avons dit qu'il faut diminuer la parallaxe horizontale P de la Lune, pour le lieu d'observation, de celle $8'',8$ du Soleil, et qu'ensuite on considère celle-ci comme nulle : mais

alors la valeur π calculée tient lieu de $\pi - p$; ainsi l'éq. (3) se réduit à

$$T = \frac{3600''}{M-m}(\alpha \pm \pi) \ldots\ldots (4).$$

Si l'on appelle t l'heure de l'observation d'un contact, celle de la conjonction vraie est $t \pm T$, en prenant $+$ pour un contact occidental, et $-$ pour un oriental.

Nous ne ferons pas ici d'application numérique de ces éq. Ces calculs sont longs, sans être difficiles. Mais il est évident que si l'on observe le même contact en deux pays, les opérations donneront les heures de la conjonction vraie pour ces deux stations, et que la différ. des heures est celle des longitudes en temps, lorsqu'on l'a exprimée en temps sidéral.

434. Quant aux *occultations d'étoiles par la Lune*, comme les étoiles n'ont ni diamètre, ni parallaxe, il suffit de supposer ces quantités nulles dans nos formules. Mais les étoiles ne sont pas sur l'écliptique, comme le Soleil, et BC (fig. 135) est la différ. entre la latitude ν de l'étoile et la latitude apparente λ' de la Lune : AB n'est plus l'écliptique, mais lui est parallèle, et l'arc de ce grand cercle, compris entre les cercles PA, PB, est $= \alpha \cos \nu$. La distance AC, à l'instant d'un contact, est le demi-diamètre apparent R' de la Lune. Ainsi, faisant $\delta = \nu - \lambda'$, le triangle ABC donne

$$\alpha^2 \cos^2 \nu = R'^2 - \delta^2,$$

d'où
$$\alpha = \frac{\sqrt{(R'+\delta)(R'-\delta)}}{\cos \nu} \ldots (5);$$

et comme le mouvement propre de l'étoile est nul, $m = 0$; donc

$$T = \frac{3600''}{M}(\alpha \pm \pi) \ldots (6).$$

en prenant $+$ pour l'immersion, et $-$ pour l'émersion.

435. Ainsi, après avoir noté l'heure exacte de l'occultation, on aura l'heure sidérale du lieu, puis l'heure vraie de Paris contemporaine. On tirera de la *Conn. des Temps* les données

lunaires qui sont nécessaires ; nos éq. feront trouver la parallaxe horizontale P de la Lune, celle π de la longitude et π' de la latitude, après avoir calculé N et h, longitude et hauteur du nonagésime ; en sorte que l'on connaîtra la longitude, la latitude et le demi-diamètre apparent de la Lune, pour l'instant de l'immersion ou de l'émersion.

On cherchera ensuite la longitude et la latitude de l'étoile ; on entrera dans la formule (5) avec la differ. δ des latitudes apparentes, et l'éq. (6) donnera l'heure T, et par suite l'heure $t \pm T$ de la conjonction vraie.

Ces calculs étant effectués pour un autre lieu où la même phase a été observée, on aura l'heure de cet autre méridien où la conjonction arrive : la différence de ces heures est, en temps sidéral, celle des longitudes.

Et si l'observation conjuguée n'a pas été faite ailleurs, on calculera l'heure de la conjonction vraie pour Paris, heure que la *Conn. des Tems* donne souvent. Alors la longitude du lieu sera rapportée au méridien de Paris. *Voy.* l'*Astr. pratique*, où l'on trouve des ex. où ce procédé est appliqué.

Il ne faut pas oublier que lorsqu'un même phénomène instantané a été vu de deux stations, et qu'on a noté les heures sidérales où il a existé, heures de ces méridiens respectifs, la différence de ces heures est celle des longitudes de ces stations ; *le lieu le plus oriental compte toujours l'heure la plus avancée.*

436. *Par les passages de la Lune au méridien observés aux deux stations.* Soit L la longitude de la station occidentale, par rapport à l'orientale. Si l'on observe en ces deux endroits le passage méridien d'une étoile quelconque, l'heure sidérale sera la même (n° 393) ; mais un temps physique L sera réellement écoulé dans l'intervalle des deux observations.

S'il s'agit de la Lune, les choses se passeront autrement ; car l'asc. dr. va sans cesse en croissant, et de l'un de ces passages à l'autre, il s'écoule un temps sidéral $= L +$ la marche de la Lune en asc. dr. pendant ce temps. Soit donc ϕ

cette dernière durée, différ. connue entre les heures sidérales des deux observations : ainsi, en temps sidéral, il se sera écoulé $L + \varphi$ de l'une à l'autre.

Chaque heure sidérale, il passe au méridien un arc de 15° de l'équateur ; le temps φ répond à un arc de (15φ) degrés.

On tire de la *Conn. des Tems* les mouvemens horaires du Soleil et de la Lune en asc. dr. (p. 335), c.-à-d. le nombre de degrés d'équateur décrits de l'ouest à l'est, par ces astres, en 1 heure de temps vrai : soit m celui du Soleil en temps, d celui de la Lune en degrés. Une heure de temps vrai équivaut à $1^h + m$ de temps sidéral. Ainsi, dans le temps sidéral $1^h + m$, la Lune parcourt d degrés d'asc. dr., et dans le temps sidéral $L + \varphi$, elle décrit l'arc 15φ : de là cette proportion

$$1^h + m : d :: L + \varphi : 15\varphi = \frac{(L + \varphi)d}{1^h + m},$$

et

$$L = \frac{\varphi}{\frac{1}{15}d}\left(1^h + m - \tfrac{1}{15}d\right) \ldots\ldots (7)$$

Ainsi, après avoir observé le passage au méridien d'un bord lunaire en deux stations, et noté les heures, la différ. entre ces heures, réduite, s'il est nécessaire, en temps sidéral, sera le nombre φ, en prenant l'heure pour unité. On tirera de la *Conn. des Tems*, 1°. le temps sid. m, 24e de la diff. entre deux asc. dr. ☉ consécutives ; 2°. le mouvement horaire d de la Lune en degrés ; et l'éq. ci-dessus donnera la différ. L des longitudes des deux stations.

Nous n'insisterons pas sur ce procédé, quoiqu'il soit très exact ; mais il suppose qu'on a une bonne lunette méridienne, bien orientée, ce qui arrive rarement aux observatoires mobiles et exposés, dont on se sert en Géodésie. Mais nous avons cité cette méthode comme servant d'élément à la suivante, qui suppose bien aussi qu'on dispose d'une lunette des passages; mais qui n'exige pas que l'instrument soit juste dans le méridien.

D'ailleurs, un cercle répétiteur placé verticalement à fort

peu près dans ce plan, peut suffire. En outre, la méthode ci-dessus exige que la pendule soit parfaitement réglée, et le résultat est influencé par les erreurs des tables, circonstances dont la suivante est indépendante.

437. *Par les culminations d'une étoile et d'un bord de la Lune*, observées aux deux stations. On note les heures de la pendule aux instans des passages du bord de la Lune et de quelque étoile qui ait à peu près la même déclinaison, afin de ne pas être obligé de déplacer beaucoup la lunette : on dit de ces étoiles qu'elles sont de *culmination lunaire*. Désignons par A l'asc. dr. de la Lune, par p son demi-diamètre, par τ l'erreur de la pendule et de la lunette, par α l'asc. dr. de l'étoile : l'heure de la pendule à l'instant du passage du bord lunaire sera $\tau + \text{A} \pm p$; celle de l'étoile sera $\tau + \alpha$, et la différ. de ces heures entre les passages

$$t = \text{A} \pm p - \alpha.$$

Nous supposons ici que l'étoile passe la 1[re], ou que son asc. dr. α est moindre que celle de la Lune; s'il en était autrement, t serait pris ci-après en signe contraire. Du reste, t doit être exprimé en temps sidéral, ou réduit à cette unité (T. V, à la fin de l'ouvrage).

On fait les mêmes observations à la 2[e] station, que nous supposerons ici être à l'occident. On aura pour l'heure de temps sidéral entre ces deux passages, à ce 2[e] méridien,

$$t' = \text{A}' \pm p - \alpha;$$

nous conservons les mêmes valeurs de p et de α.

La différ. entre ces deux résultats est $t - t' = \text{A} - \text{A}'$. Or il est visible que ce nombre est précisément ce que nous avons appelé dans l'éq. (7), et qu'il est rendu de la sorte indépendant de τ, τ' et α,

$$\varphi = t - t' \ldots\ldots (8)$$

Tout étant ainsi connu dans l'éq. (7), le calcul fait connaître la différ. L des longitudes des stations, sans avoir be-

soin de connaître avec précision les erreurs de la pendule et de la lunette, ni les asc. dr. de la Lune et de l'étoile. On a seulement besoin des mouvemens horaires du Soleil et de la Lune, qu'on tire de la *Conn. des Tems*. Ainsi ce procédé est susceptible d'une grande précision.

438. Il y a ici deux causes d'erreur : 1° le demi-diamètre lunaire n'est pas rigoureusement le même p aux deux méridiens, parce que dans l'intervalle la Lune change de distance à la Terre; 2°. le mouvement horaire de cet astre varie sensiblement dans cette durée. Mais en calculant d pour le temps du milieu entre les observations, dont l'heure $L + \varphi$ est d'ailleurs à peu près connue, on n'aura à craindre aucune erreur sensible, quand la différence des longitudes n'excèdera pas 2^h : ce qui suffit à tous les besoins de la Géodésie. Nous jugeons donc inutile d'indiquer ici comment on peut donner à ce procédé une extrême précision, qui serait inutile à nos recherches. (*Voy.* l'*Astr. pratique*, p. 271.)

439. Le 3 mars 1822, on a observé à Dorpat et à Manheim les culminations du bord ouest de la Lune, et de 309 des Gémeaux; cette étoile est située à l'ouest : on a obtenu pour différence des heures sidérales des deux passages, à

$$\text{Dorpat} \quad t = 10'17'',56, \qquad \text{Manheim} \quad t' = 13'18'',30,$$

$$\text{d'où} \qquad \varphi = 3'0'',74 = 180'',74.$$

On sait, d'après ce qu'on connaît d'ailleurs, que l'heure de Paris pour le milieu des observations est $8^h18'$ du soir. On tire de la *Conn. des Tems* qu'à cette heure $d = 35'45'',0$, et en temps, $\frac{1}{15}d = 2'23'',0$. Le mouvement du ⊙ en asc. dr. pour 24^h, est $3'43'',4$, et pour 1^h vraie, $m = 9'',31$.

φ	2.2570543	$1^h + m =$	60′ 9″,31
facteur	3.5398674	dénom. $\frac{1}{15}d =$	− 2 23, 00
dénom.	− 2.1553360	facteur =	57.46,31
L	3.6415857		

$L = 1^h13'1'',13$, longitude de Dorpat à l'est de Manheim.

Quand les pendules sont réglées sur le temps moyen, il faut réduire la durée $t-t'$ en temps sidéral (T. V) pour avoir ϕ.

440. *Par les chronomètres.* On détermine, à l'une des stations, par des observations astronomiques (p. 349) la marche de la montre, savoir 1°. son avance absolue A à une certaine époque; 2°. son avance a de chaque jour : le tout réglé sur le temps moyen. On admet que la marche du chronomètre est uniforme dans l'intervalle de temps où on l'emploie à la détermination de la différ. des longitudes des deux stations. Les données A et a suffisent pour assigner l'heure exacte H' de temps moyen sous le 1er méridien, quand la montre indique une heure quelconque h, le nombre j de jours après celui où l'avance absolue est A. Voici la formule :

$$\textit{heure de temps moyen} \quad H' = h - A - aj :$$

on prend en signe contraire celle des quantités A et a qui est un retard.

Cela fait, on se transporte à la 2e station, et l'on y détermine, par des observations, l'heure H″ de temps moyen du lieu à un instant quelconque, et on lit sur le chronomètre l'heure h qu'il indique à cet instant. On calcule l'heure correspondante H' de temps moyen sous le 1er méridien, par la formule ci-dessus; et H' — H″ est la différence des longitudes demandée (*).

On a reconnu, à la 1re station, que le 8 août 1840, à $6^h\,19'$, le chronomètre avance de $A = 3'17'',5$ sur le méridien du lieu, et que chaque jour moyen il retarde de $a = -11'',34$. Le 15 août suivant, à la 2e station, on a vu que, le chronomètre marquant $h = 19^h 37' 12''$, il était alors, sous ce nou-

(*) On se sert indifféremment du temps moyen, ou du temps sidéral pour trouver les longitudes, puisqu'en réduisant le 1er temps au second, par l'éq. 3, p. 338, les heures H' et H″ deviennent H' + Æ☉ et H″ + Æ☉ qui ont encore H' — H″ pour differ.



veau méridien, $H'' = 19^h 43' 47''$. Otant $6^h 19'$ de h, on voit qu'il s'est écoulé depuis la 1re époque $7^j 13^h 18' 12'' = 7^j,5543 = j$: donc

$$\begin{aligned} h &= 19^h 37' 12'',0 \\ -A &= -\ \ 3.17,5 \\ -aj &= +\ \ 1.25,7 \\ H' &= 19.35.20,2 \\ H'' &= 19.43.47,0 \end{aligned}$$

Différence des longitudes....... $= -\ 8.26,8$

Le signe — indique que la 2ᵉ station est à l'orient de la 1ʳᵉ.

Après avoir retranché $6^h 19'$ de h, on n'a pas le temps écoulé, parce que le retard diurne de la montre est alors négligé ; ce qui est ici sans inconvénient, parce que l'intervalle est très petit. Mais si l'on veut y avoir égard, il faut recommencer le calcul en tirant du 1ᵉʳ résultat une valeur plus exacte de aj. (*Voy.* n° 525.)

Azimut d'un astre et d'un signal.

441. *Connaissant l'heure et la latitude, trouver l'azimut d'un astre.* Le pôle est en p (fig. 129), le zénith en z, ab est l'horizon, pzm le méridien, q un astre, zq son vertical, aq sa hauteur, qz sa distance au zénith, pq son cercle horaire déterminé par l'heure proposée (n° 402). En effet.

1°. S'il s'agit du Soleil, observé à l'ouest, l'angle p est l'heure vraie actuelle traduite en degrés : avant midi, cet angle est le complément de l'heure vraie à 12^h.

2°. Pour une étoile, on a

$$\pm p = \text{heure sidérale} - Æ\,\star = \text{heure sol.} + Æ\odot - Æ\,\star\ ;$$

on prend + quand l'astre est à l'ouest, — dans l'autre cas.

Cela posé, dans le triangle sphérique pzq, on connaît deux côtés et l'angle compris ; car outre l'angle p, on a la colatitude du lieu, $pz = c$, et la distance polaire de l'astre, $pq = d$, compl.ᵗ de sa déclin. Résolvons ce triangle, pour en tirer

l'angle $pzq = \mathrm{A}$, *azimut de l'astre, compté du nord vers le sud.* Les deux dernières analogies de Néper, n° 85, deviennent ici

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} + q) = \cot \tfrac{1}{2} p \times \frac{\cos \frac{1}{2}(d - c)}{\cos \frac{1}{2}(d + c)},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(\mathrm{A} - q) = \cot \tfrac{1}{2} p \times \frac{\sin \frac{1}{2}(d - c)}{\sin \frac{1}{2}(d + c)}.$$

Le calcul fait donc connaître les arcs $\frac{1}{2}(\mathrm{A} + q)$ et $\frac{1}{2}(\mathrm{A} - q)$ dont la somme est l'azimut cherché A : leur différ. est q, ou ce qu'on appelle l'*angle de position*. Quand l'astre observé est une étoile, il faut en obtenir l'asc. dr. et la déclin., en tenant compte des précession, nutation et aberration, ce qu'on trouve tout calculé, dans la *Conn. des Tems*, pour le Soleil, la Lune et les principales étoiles. La réfraction et la parallaxe s'exerçant en entier verticalement n'ont ici aucune influence ; l'azimut n'en est pas altéré.

Le 23 juillet 1836, on demande l'azimut d'Algenib vers l'est, à Strasbourg (longit. 21'40", latit. 48°34'57").

à.............. $9^h48'\ 5'',79$ temps moyen
Æ☉ moyen.... 8. 4.58, 40 à midi moyen de Paris,
(table V, 2ᵉ col.) 1.32, 81 corr. pour $9^h48'6'' - 21'40''$ (p. 235),
heure sidérale —17.54.37, 00
Æ★ .... + 0. 4.49, 50
vers l'est .... 6.10.12, 50 .... $\frac{1}{8} = 46°16'33'',75 = \frac{1}{2}p$,

$d = 75°43'35''$
$c = 41.25.\ 3$ cot $\frac{1}{2}p$ .... $\bar{1}.98065$.... $\bar{1}.98065$
$d-c = 34.18.32$, $\frac{1}{2}$.... 17° 9'16", cos....... $\bar{1}.98024$ sin...$\bar{1}.46975$
$d+c = 117.\ 8.38$, $\frac{1}{2}$.... 58.34.19, cos......— $\bar{1}.71719$ sin— $\bar{1}.93110$
60.17.34 tang...... 0.24370 $\bar{1}.51930$
18.17.38 60°17'34" 18°17'38"
A = 78°35'12" azimut compté du nord vers l'est.

On demande quel est l'azimut du Soleil, le matin du 18

octobre 1836, à $7^h55'31'',47$ t. vr., au Caire (lat. $30°2'4''$N, longit, $1^h55'41''$, E.). L'angle horaire du Soleil est....... $p = 4^h4'28''54$, $\frac{1}{2}p = 30°33'34''$. L'heure proposée revient à $5^h59'50'',46$ du matin t. vr. à Paris, ou le 17 octobre à $17^h45'6'',16$ t. moy. avec ce nombre, la *Conn. des Temps* donne déclin. $\odot = 9°38'57'',4$ A, et l'on procède au calcul, comme il suit.

$d = 99°38'57'',4$

$c = 59.57.56$ cot $\frac{1}{2}p$...... 0.2288218..... 0.2288218

$d - c = 39.41.\ 1,4$, $\frac{1}{2}$.. $19°50'30'',7$, cos.. $\bar{1}.9734203$, sin $\bar{1}.5307442$

$d + c = 159.36.53,4$, $\frac{1}{2}$... $79.48.26,7$, cos $-\bar{1}.2478686$, sin $-\bar{1}.9930915$

tang...... 0.9543735, $\bar{1}.7664745$

$83.39.42,15$ $83°39'42'',15$ $30°17'18'',50$
$30.17.18,50$

$A = 113°57'\ 0'',65$ azimut $\odot$ compté du nord vers l'est.

442. *Étant donnée la distance zénithale d'un astre, trouver son azimut?* Dans le triangle pzq (fig. 129) on connaît les trois côtés, savoir, $pz = c = 90° - l$, $zq = z$, $pq = d$. On trouve *l'azimut* A *compté du nord* par l'éq. (17) du n° 76, qui devient ici

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin k . \sin (k - d)}{\sin z \sin c},$$

$$2k = z + d + c;$$

on corrigera la dist. zénit. observée de *réfraction—parallaxe* pour avoir z; et cela quoique l'azimut A n'en soit pas influencé, attendu que ces effets dénaturent le triangle sphérique pzq.

Reprenons les deux ex. précédens, mais en y supposant l'heure inconnue, et la dist. zénith. donnée.

Pour Algénib on a, correction faite, $z = 81°1'6''$, outre les valeurs citées de l et de d.

$z = 81^{\circ}\ 1'\ 6''$	sin..........	$\bar{1}.9946419$
$d = 75.43.35$		
$c = 41.25.\ 3$	sin..........	$\bar{1},8205567$
$2k = 198.\ 9.44$		$-\bar{1}.8151986$
$k = 99.\ 4.52$	sin..........	$\bar{1}.9945221$
$k-d = 23.21.17$	sin..........	$\bar{1}.5981583$
	cos²........	$\bar{1}.7774818$
$\frac{1}{2}A = 39^{\circ}17'\ 8''$	cos..........	$\bar{1}.8887409$
$A = 78.34.16$	comme ci-devant.	

Pour l'observation du Soleil on avait (*voy.* n° 408).

$z = 70^{\circ}49'57'',6$	sin.........	$\bar{1}.9752313$
$d = 99.38.57,4$		
$c = 59.57.56,0$	sin.........	$\bar{1}.9373798$
$2k = 230.26.51,0$		$-\bar{1}.9126111$
$k = 115.13.25,5$	sin.........	$\bar{1}.9564808$
$k-d = 15.34.28,1$	sin.........	$\bar{1}.4289292$
	cos²........	$\bar{1}.4727989$
$\frac{1}{2}A = 56.58.30,31$	cos.........	$\bar{1}.7363994$
$A = 113^{\circ}57'\ 0'',62$	comme ci-devant.	

443. *Trouver l'azimut d'un astre à son lever et à son coucher,* ou *son amplitude ortive et occase qui en est le complément.* Cette question est un cas particulier de la précédente. Quand l'astre paraît être à l'horizon, la réfraction et la parallaxe en changent le lieu réel : la distance zénithale au lieu d'être de 90° est 90° + K, en prenant

$$K = \textit{réfraction horiz} - \textit{paral. horiz} = 33'45'' - \textit{paral. horiz.}$$

Pour les étoiles la parallaxe est nulle; elle est de 8″8 pour le Soleil, savoir K = 33′36″,2, $z = 90^{\circ}33'36'',2$. Enfin, s'il s'agit de la Lune, on calculera la parallaxe équatoriale qui convient à l'heure du lever ou du coucher, qu'on évalue à peu près d'abord en prenant $z = 90^{\circ}$; on cherchera ensuite cette parallaxe pour la latitude du lieu. Ces opérations étant semblables aux précédentes, nous n'en donnerons pas d'ap-

plication, d'autant plus que les réfractions étant incertaines près de l'horizon, les résultats sont peu sûrs.

444. *Trouver l'azimut d'un signal?* Nous avons dit que cette mesure est une des plus importantes opérations de la Géodésie, puisqu'elle fait connaître les directions des côtés des triangles du réseau : et qu'une fois l'un de ces azimuts connu, les autres s'en déduisent par de simples calculs, en procédant de station en station. Sauf cependant les vérifications indispensables qui obligent à mesurer çà et là d'autres azimuts, pour les comparer aux résultats des calculs (n° 234).

Un observateur est placé au centre C de la sphère céleste, (fig. 137) d'où il envoye des rayons visuels CM à tous les objets remarquables qui l'environnent. Il fait *le relèvement des signaux*, c.-à-d. qu'il en trouve les azimuts, ou angles que font avec le méridien les plans verticaux passant par les objets M. Ainsi il s'agit de trouver l'angle du méridien de C avec le plan CZM passant par l'objet M et le zénith Z.

Soit S un astre quelconque en un point de son cours, ZCS son vertical. La réfraction change les lieux apparens de M et de S, qui sont jugés en m et s, sur les mêmes verticaux ; et même si S est le Soleil ou la Lune, la parallaxe abaisse ces points, ensorte que cependant celle-ci soit plus basse que son lieu réel, parce que la parallaxe lunaire surpasse toujours sa réfraction. Ainsi on juge la Lune plus basse qu'elle ne le serait si on la voyait du centre de la Terre, et qu'il n'y eût pas d'atmosphère.

On observe, à un instant quelconque, avec un instrument, la distance angulaire du signal m à l'astre s, ou l'arc $sm = \delta$; en même temps, on prend aussi la distance zénithale de l'astre, et celle du signal, savoir $sZ = z$, $mZ = z'$. Ces distances sont apparentes, c.-à-d. affectées par la réfraction et la parallaxe ; pendant qu'on mesure δ, une autre personne mesure z, pour que ces valeurs variables soient contemporaines. Quant à z', on prend cet arc à loisir, attendu qu'il ne change pas.

On pourrait d'ailleurs calculer la valeur de z (*voy.* n° 408)

d'après l'heure à laquelle on a pris l'arc δ; mais il faudrait corriger cette distance zénithale vraie, de la réfraction — parallaxe, en sens contraire de ce qu'on a dit p. 336, afin de changer l'arc vrai en apparent.

445. Dans le triangle sphérique Zsm (fig. 137), on connaît les trois côtés $sZ = z$, $mZ = z'$, $sm = \delta$, et l'on en tirera l'angle $mZs = a$, angle qui est le même que SZM. Les éq. du n° 76 deviennent

$$2k = z + z' + \delta,$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin k . \sin (k - \delta)}{\sin z . \sin z'}.$$

Or, l'heure de l'observation étant connue, il est facile d'en conclure l'azimut A, qui est l'angle que le méridien fait avec le vertical CSZ, et par suite l'azimut du signal,

$$x = A + a.$$

446. Mais, dans cette éq., il faudra attribuer aux lettres des signes propres aux positions relatives de l'astre et du signal, d'après les règles ordinaires des signes en géométrie. Les azimuts A et x sont des arcs de distance au méridien, comptés du nord ou du sud; ils ont des signes différens, quand ils sont de côtés opposés du méridien. L'arc a est positif, lorsqu'il est situé au-delà du méridien par rapport à A, et négatif, quand au contraire il s'en trouve rapproché.

C (fig. 138) est le lieu d'observation, CN la méridienne, S l'astre, M le signal, l'angle $SCN = A$, $SCM = a$, $NCM = x$. Tout est ici positif. Mais si le signal est en M', de l'autre côté de CS, a prend le signe —, $x = A - a$; et si le signal est en M" de l'autre côté du méridien, on a $a > A$, et $x = A - a$ donne x négatif, pour indiquer que cet arc est du côté opposé du méridien par rapport à A.

Du reste, les azimuts positifs peuvent être pris indifféremment vers l'est ou l'ouest, pourvu qu'on observe la règle ci-dessus.

447. Quand l'astre est le Soleil, la distance angulaire observée est celle de l'un des bords au signal, et pour avoir δ il

faut y ajouter, ou en retrancher, le demi-diamètre ⊙, selon le bord préféré. Mais on aime mieux prendre successivement les distances des deux bords au signal, puis la moyenne entre elles ; et même pour éviter les petites erreurs d'observation, on prend 4 ou 6 de ces distances ; on note les heures vr. de chacune, et l'on regarde la moyenne entre les heures comme répondant à la moyenne entre les distances du centre au signal : puis on calcule, pour cette heure du milieu, la dist. zénith. apparente de l'astre (n° 408).

Pour l'exactitude des calculs, il convient que l'arc SM (fig. 137) soit peu incliné ; ainsi c'est un astre voisin de l'horizon qu'on doit observer. Il importe en outre que l'arc a ne s'écarte pas beaucoup de 90 degrés.

Le 30 mai 1836, à Dublin, à $5^h 18' 52''$ t. vr., on mesure les distances des deux bords du Soleil à un signal ; la moyenne est la distance δ du centre : on a trouvé aussi, ou calculé, comme on l'a montré p. 356, les dist. apparentes au zénith de l'astre et du signal ; on a obtenu ainsi

$z = 67°46'37'',8$	sin.... $\bar{1}.9664796$	
$z' = 89.58.20,2$	sin.... $\bar{1}.9999999$	
$\delta = 103.39.\ 7,0$		
$2k = 261.24.\ 5$	$-\bar{1}.9664795$	
$k = 130.42.\ 2,5$	sin.... $\bar{1}.8797416$	
$k - \delta = 27.\ 2.55,5$	sin.... $\bar{1}.6577713$	
	cos².... $\bar{1}.5710334$	
$\frac{1}{2}a = 52.23.29,4$,	cos.... $\bar{1}.7855167$	
$a = 104.46.58,8$,	objet situé à la gauche du Soleil,	
$A = 80.\ 8.25,2$,	azimut du Soleil à l'ouest partant du nord,	
$x = 184.55.24,0$,	arc allant du nord au signal.	

La valeur de A a été calculée par la formule du n° 442, avec les données qu'on a citées n° 408.

448. Une partie des opérations dont on vient de parler, celle qui donne l'arc a, est inutile, quand on se sert d'un théodolite, parce que cet instrument réduit à l'horizon l'an-

gle $mZs = a$, sans aucun calcul ; et même on choisit l'instant où l'astre S est précisément au méridien, parce qu'on a de suite l'azimut du signal. Au reste, il suffit de faire l'observation quand l'astre est près du méridien, parce qu'alors son mouvement azimutal est proportionnel aux temps, et que le calcul se réduit à corriger la moyenne entre les distances a observées, mais réduites à l'horizon, d'après le rapport des vitesses horizontales de l'astre, telles que les donnent les observations mêmes. C'est une interpolation facile, dont l'objet est de ramener les mesures de l'arc a à ce qu'elles eussent été, si on les eût prises l'astre étant au méridien. On peut aussi se servir de la boussole comme approximation (*voy.* n° 534).

449. *Relever un signal par les digressions de la Polaire.* Cette étoile décrit, chaque jour, autour du pôle p, un petit cercle $nin'i'$ (fig. 139). Sa marche est très lente. Il est facile de trouver les instans où elle atteint le point i vers l'est, et le point i' vers l'ouest, où elle est à sa plus grande élongation. En effet, Z étant le zénith, l'angle pZi devient alors un *maximum*, et le triangle sphérique pZi est rectangle en i. On trouve l'angle horaire p, la dist. zénit. z, et l'azimut A de cette étoile, à cet instant, en résolvant ce triangle.

Faisons Zp = colatitude, $c = 90° - l$, pi = dist. polaire $d = 90° - D$, Zi = dist. zénith. z, l'angle pZi = azimut A, l'angle Zpi = angle horaire p de l'étoile. Les éq. de la p. 69 deviennent

$$\cos p = \tang d \cot c = \cot D \tang l,$$
$$\cos c = \sin l = \cos z \cos d = \cos z \sin D,$$
$$\cos l \sin A = \sin d = \cos D.$$

La 1re de ces éq. donne l'angle horaire p de l'étoile à sa plus grande élongation, d'où résulte l'heure sidér. ou moy. correspondante (p. 350) : et selon qu'on prend p en $+$ ou en $-$, dans l'éq. citée, on a l'heure de l'élongation à l'est ou à l'ouest.

La 2e éq. donne la dist. zénith. vraie z de la Polaire ; en

retranchant la réfraction, on en tire la distance zénithale apparente.

Enfin la 3e éq. donne l'azimut A contemporain.

450. À l'instant de l'élongation, le changement en hauteur est le plus rapide, et le mouvement azimutal nul ; et dans les instans voisins, soit avant, soit après, ce mouvement est insensible, et il est permis de n'y pas avoir égard. On a donc le temps de mesurer l'arc $qi = \delta$, distance apparente du signal q à la Polaire. On prend pour δ la moyenne entre plusieurs mesures successives.

Les trois côtés du triangle qZi sont connus, savoir, $qi = \delta$, $Zi = z$, $qZ = z'$ = dist. appar. du signal au zénith. On trouvera donc l'angle $qZi = a$ que font entre eux les verticaux du signal et de l'étoile, en se servant des éq. qui précèdent (n° 445). Ensuite la formule $x = A + a$ donne l'azimut x du signal, en prenant A en + ou en −, selon la règle prescrite p. 389.

Ce procédé est extrêmement usité, parce qu'il est d'un emploi facile, et que les résultats en sont très exacts.

Le 7 décembre 1836, on a pour la Polaire Æ $= 1^h 1'25'',02$, $D = 88°26'38'',30$: à Toulon, la latitude est $l = 43°7'20''$. On s'est préparé aux observations par le calcul suivant :

tang l	$\bar{1}$.9715130	sin l.....	$\bar{1}$.8347747	cos D....	$\bar{2}$.4338414
cot D.......	$\bar{2}$.4340015	sin D.....—	$\bar{1}$.9998398	cos l ....—	$\bar{1}$.8632617
cos p.......	$\bar{2}$.4055145	cos z....	$\bar{1}$.8349349	sin A....	$\bar{2}$.5705797
	$p = 88°32'32'',09$		$z = 46°51'28'',7$		$A = 2°7'55'',47$
4 fois.....	$5^h 54.10,14$	réfr... —	1. 4, 2		azimut.
Æ★ ...	1. 1.25,02		46.50.24,5	distance zénit. appar., lors de la digression au nord-ouest.	
Æ⊙m ..—	17. 5. 6,50				
	13.50.28,66				
tab. V, 1re col.	—2.16,05	(*Voy.* p. 344) corr. pour $13^h 50'29''$			
	13.48.12,61,	heure moyenne de la digression ouest.			

On a $z' = 89°17'50'',5$ pour la dist. zénith. apparente d'un signal, ainsi que celle de la Polaire, on mesure vers l'heure

précédente plusieurs distances de ce signal à la Polaire, et l'on obtient la moyenne δ.

$z = 46°50'24'',5$	sin....	$\bar{1}.8629944$	
$z' = 89.17.50,5$	sin....	$\bar{1}.9999673$	
$\delta = 103.18.23,0$			
$2k = 239.26.38$		$-\bar{1}.8629617$	
$k = 119.43.19$	sin....	$\bar{1}.9387407$	
$k-\delta = 16.24.56$	sin....	$\bar{1}.4511751$	
signal à gauche de A	$\cos^2$...	$\bar{1}.5269541$	
$a = 109.\ 5.23,0$	cos ...	$\bar{1}.7634770$......	$\frac{1}{2}a = 54°32'41'',5$
$A = 2.\ 7.55,5$	étoile à l'ouest,		
$x = 111.13.18,5$	azimut du signal du nord vers l'ouest.		

451. *Trouver l'azimut de la Polaire à une heure quelconque donnée* P.

Le pôle est en P (fig. 134), la Polaire en A sur son cercle diurne ; sa distance polaire est $AP = d$; l'angle horaire est connu $APZ = P$; le méridien est PZ, le zénith Z; on a $ZP = 90° - l$, ZA est la dist. zénithale. Résolvons le triangle ZAP, où nous connaissons deux côtés d et $90° - l$, et l'angle compris P, afin de trouver l'angle $AZP = A$ qui est l'azimut demandé. Mais comme cet angle et le côté opposé d sont fort petits, l'éq. générale se simplifie en se réduisant en série. En effet dans tout triangle sphérique ABC, l'éq. (6) p. 69 donne

$$\cot A = \frac{\sin c \cot a - \cos c \cos B}{\sin B}, \quad \operatorname{tang} A = \frac{\sin B \operatorname{tang} a}{\sin c - \cos c \cos B \operatorname{tang} a}.$$

Lorsque le côté a est fort petit, on peut poser, en se bornant au 3ᵉ ordre, $\operatorname{tang} a = a + \frac{1}{3}a^3$, éq. (19), p. 36; ainsi

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin B}{\sin c} \times \frac{a + \frac{1}{3}a^3}{1 - \cot c \cos B\,(a + \frac{1}{3}a^3)},$$

la puissance -1 du dénominateur est, (au 3ᵉ ordre près), ... $= 1 + a \cot c \cos B + a^2 \cot^2 c \cos^2 B$,

d'où $\operatorname{tang} A = \dfrac{\sin B}{\sin C}\left[a + a^2 \cot c \cos B + a^3 \cot^2 c \cos^2 B + \frac{1}{3}a^3\right]$.

Faisant (éq. 20, p. 36) $A = \tang A - \frac{1}{3}\tang^3 A$, il vient

$$A = \frac{\sin B}{\sin c}\left[a + a^2\cot c\cos B + \frac{1}{3}a^3(1 + 3\cot^2 c\cos^2 B) - \frac{1}{3}\frac{a^3\sin^2 B}{\sin^2 c}\right];$$

on a, dans ce dernier terme, à cause de $\frac{1}{\sin^2} = \cosec^2 = 1 + \cot^2$,

$$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 c} = (1 - \cos^2 B)(1 + \cot^2 c) = 1 - \cos^2 B + \cot^2 c - \cos^2 B\cot^2 c.$$

Ainsi, en réduisant, on trouve

$$A = \frac{\sin B}{\sin c}\left\{a + a^2\cot c\cos B + \frac{1}{3}a^3[\cos^2 B(1 + 4\cot^2 c) - \cot^2 c]\right\}.$$

Faisons l'application de cette formule générale au triangle ZAP (fig. 139), en prenant $a = d = AP$, $c = 90° - l = ZP$, enfin l'angle $B = P$, et il viendra

$$A = \frac{\sin P}{\cos l}\left\{d + d^2\cos P\tang l + \frac{1}{3}d^3[\cos^2 P(1 + 4\tang^2 l) - \tang^2 l]\right\},$$

et comme les arcs A et d sont fort petits, on les réduira en secondes (p. 37) en les changeant en A sin 1″ et d sin 1″; d'où

$$A = \frac{\sin P}{\cos l}\left\{d + d^2\sin 1''\cos P\tang l + \frac{1}{3}d^3\sin^2 1''[\cos^2 P(1 + 4\tang^2 l) - \tang^2 l]\right\}.$$

Par ex., étant à Montjouy le 4 décembre 1793, Méchain a mesuré des distances de Matas à la Polaire, dont la dist. polaire était alors $d = 1°47'41'',4$: il a trouvé, par le calcul de la distance moyenne entre 4 observations, que l'angle azimutal du signal à l'étoile était 30°3′22″,9; la latitude du lieu était $l = 41°21'44'',0$. On demande l'azimut du signal de Matas, sachant par l'heure sidérale de la moyenne entre les observations que l'angle horaire était $P = 86°28'17'',5$. Voici le calcul :

d^2..... 7.6206532 d^3..... 11.4309798

sin 1"..... $\bar{6}.6855749$ $\frac{1}{3}$..... $\bar{1}.5228787$

cos P..... $\bar{2}.7891895$ $\sin^2 1''$.. $\overline{11}.3711498$

tang l..... $\bar{1}.9447035$ 0.3250083 0.3250083 —

1.0401211 4,100752.. 0.6128635 $\tan^2 l$.. $\bar{1}.8894070$

2^e terme .... +10"967 $\cos^2$ P.... $\bar{3}.5783790$ 0.2144153 —

tang^2 l...... $\bar{1}.8894070$ $\bar{2}.5162508$ 4e... —1,638

4 .... 0.6020600 3e terme... 0,0328

0.4914670

3,100752

$1 + 4 \tan^2 l = 4,100752$

sin P..... $\bar{1}.9991759$

3.8109555

cos l...— $\bar{1}.8753779$

3.9347535

1er terme .... 1°47'41",4

2e 10,967

3e 0,033

4e .... —1,638

3.8109555 .... 1°47.50,762

à l'ouest .... —2°23'25",1

angle azimutal de Matas à la Pol. à l'est.............. 30. 3.22,9

azimut de Matas...................... 27°39'57",8

Ce procédé est surtout employé lorsque l'angle azimutal du signal à la Polaire est pris avec un théodolite, parce qu'on lit cet angle sur l'instrument même : il y est réduit à l'horizon. Ainsi, après avoir réglé le théodolite, on mesure l'arc de distance du signal à la Polaire, et l'on note l'heure de l'observation. On répète plusieurs fois cette mesure, et la moyenne des arcs répond à la moyenne des heures ; l'arc ainsi obtenu est la mesure de l'angle dièdre formé par les deux plans verticaux de l'astre et du signal : bien entendu que celui-ci, pour être vu la nuit, doit être éclairé artificiellement. On se sert alors d'une lampe à réflecteur parabolique.

LIVRE III.

NAVIGATION.

CHAPITRE Ier. — DÉTERMINATION DE LA VITESSE ET DE LA DIRECTION DU NAVIRE.

La *navigation* est une science qui a pour objet de trouver la route que doit suivre un vaisseau pour atteindre un lieu déterminé, d'assigner le lieu de la mer où il est, enfin de rechercher toutes les circonstances de la route. Elle prend le nom d'*Astronomie nautique*, lorsqu'elle emprunte le secours des observations célestes : cette dernière partie sera traitée plus tard.

De l'estime, du lock, de la boussole.

452. Le plus souvent les marins déterminent leur position à la surface des mers par *estime ;* voici en quoi consiste cette opération.

Le *lock* (fig. 141), est une petite planchette de bois, ayant la forme d'un triangle isoscèle, ou d'un secteur circulaire CAB. On leste d'une lame de plomb le bord inférieur AB pour que la planchette se tienne verticalement, quand on la jette à la mer, et qu'il ne surnage que la pointe supérieure, afin que le vent n'ait pas de prise sur l'instrument. La hauteur et la base du lock ont 17 à 20 centimètres (7 à 8 pouces), plus ou moins. On a une cordelette, appelée *ligne*, enroulée sur un dévidoir, et qui a une longueur de 100 à 150 mètres ; elle

est attachée au lock en CDEF. Cet appareil sert à mesurer la vitesse du navire.

Chaque fois que le vent paraît changer de force ou de direction, on jette le lock à la mer, en laissant la ligne se dévider librement. Comme l'eau presse la surface de cette planchette, qui est à peu près verticale, la résistance l'arrête, et le lock ne tarde pas à se trouver assez éloigné du navire pour ne plus participer au mouvement qu'il imprime à l'eau, ni au *sillage* du navire, longue trace qu'il laisse sur la mer : le lock est donc alors stationnaire. On a déterminé d'avance, par des essais, la distance nécessaire, pour que le lock reste en repos, distance qu'on évalue ordinairement à la longueur du navire. Un nœud de drap rouge attaché à la ligne avertit en passant qu'il faut commencer à compter les temps, pendant que la ligne continue de se dévider. L'officier en donne le signal en disant *vire*.

Les temps sont comptés, soit avec une *ampoulette*, petit sablier qui se vide en 30 secondes, soit mieux encore avec une montre à secondes. La longueur de ligne qui se déroule pendant cette durée de 30", est l'espace parcouru par le navire dans cet intervalle. Quand ce temps est fini, ou que tout le sable est écoulé, le signal *stop* avertit d'arrêter le dévidoir. On mesure alors la longueur de ligne qui a passé depuis le 1[er] nœud de drap. La corde CED, qui s'attache au lock, n'est fixée en D que par une cheville, qu'on détache de son trou, par une petite secousse. La planchette flotte alors à plat, et on la ramène aisément (fig. 142).

Pour mesurer commodément cette longueur de corde, on y fixe des nœuds de drap rouge espacés de 45 pieds les uns des autres. Et voici comment on raisonne. Le mille marin a 951 $\frac{1}{4}$ toises; c'est la minute de degré du méridien terrestre, parce que la lieue marine est de 20 au degré; ainsi une lieue vaut 3 minutes, ou 3 milles. La 120[e] partie d'un mille est de 47 $\frac{1}{2}$ pieds; si on laissait cette distance entre les nœuds de la ligne, autant il passerait de ces nœuds en 30",

autant le navire ferait de milles à l'heure, s'il conservait une vitesse constante, parce que 30″ est la 120ᵉ partie de l'heure. Mais comme le lock n'est pas rigoureusement stationnaire, l'expérience a montré qu'il ne faut écarter les nœuds que de 45 pieds, au lieu de 47 $\frac{1}{2}$.

Outre les nombres entiers de nœuds écoulés, il y a encore un reste qu'on mesure en pieds, pour avoir les fractions de mille parcourues en 1^h. Ainsi le navire qui fait 3 nœuds et 11 pieds, parcourt 3 milles $\frac{1}{4}$ à l'heure, à moins que des *courans* n'agissent sur la mer.

On a soin de jeter le lock *sous le vent* (du côté opposé au vent), de vérifier de temps à autre l'ampoulette, la distance des nœuds, etc.

453. Il ne suffit pas de connaître la vitesse du navire; il faut encore en avoir la direction; c'est ce qu'on trouve avec une *boussole* ou *rose de vents* (fig. 140). L'aiguille aimantée de celle dont les marins se servent, est logée dans un cercle très mince de carton, ou de talc, qui tourne sur un pivot central. Ce cercle est divisé en quatre quarts, qui sont partagés chacun en 90°, en allant du nord et du sud, tant à l'est qu'à l'ouest, points qui portent le n° 90. Comme le cercle tourne avec l'aiguille, qui prend des directions diverses, selon les lieux et la direction du navire, les divisions viennent se présenter à une étoile, ou une fleur-de-lis, dans une direction diamétrale marquée N. S. (*Voy.* p. 23.)

La boussole est fixée dans l'*habitacle*, près le timonier, et l'axe NS est parallèle à la quille du navire, c'est-à-dire à son axe longitudinal. On dirige la barre du gouvernail, de sorte que le cercle de carton présente à la ligne fixe celle des divisions qui a été déterminée par l'officier pour la direction qu'il veut suivre. Chaque azimut est compté du nord, quand la pointe de l'aiguille tombe dans la région qui va de l'est à l'ouest par le nord; il est compté du sud dans l'autre demi-circonférence.

La boussole est couverte d'une glace, et portée par une

suspension de Cardan, c'est-à-dire à deux axes rectangles qui la font rester horizontale, malgré les agitations du navire.

454. Les marins donnent le nom de *rhumbs* ou *airs de vent*, aux directions que prend le navire, ou l'aiguille de la boussole. Quelquefois on désigne ces rhumbs par les numéros de graduation du cercle ; ce sont les véritables azimuts : mais plus ordinairement on partage le cercle en 32 arcs égaux, dont chacun porte un nom. Voici la série de ces noms, tels qu'on les voit sur la figure 140.

1°. On marque les quatre points cardinaux N., E., S., O., qui signifient *nord*, *est*, *sud* et *ouest*.

2°. On divise par moitié chacun de ces quadrans, et le nom de ces quatre divisions se forme de la réunion des deux noms entre lesquels chacune se trouve. Le milieu entre N. et E. s'appelle N. E. ou *nord-est*, entre S. et O., S. O. ou *sud-ouest*, etc.

3°. On coupe ces 8 arcs par moitié, ou en arcs de 22°30′ chaque ; et les noms se forment encore en accolant les deux noms voisins ; le milieu entre N. et N. E., est le N. N. E., ou *nord-nord-est* ; entre S. O. et S, est S. S. O., ou *sud-sud-ouest*, etc.

4°. Enfin on partage encore par moitiés chacun de ces 16 arcs, ce qui complète le système des 32 rhumbs, dont les arcs sont de 11°15′. Pour dénommer ces derniers, on accole les deux noms voisins, en les séparant par le mot *quart*, et énonçant d'abord celle des 8 1res divisions qui est la plus proche. Entre N. et N. O. il y a deux de ces subdivisions, l'une d'un côté du N. N. O., l'autre du côté opposé. Celle-ci est appelée N $\frac{1}{4}$ N. O., parce qu'elle est plus voisine du nord ; l'autre N. O. $\frac{1}{4}$ N., comme étant plus voisine du nord-ouest. Le 1er énoncé signifie N *déviant d'une division vers le nord-ouest ;* le 2e, N. O. *déviant du côté du nord.* Par abréviation, on sous-entend une partie de cette locution, qu'on réduit aux termes essentiels. S. E. $\frac{1}{4}$ S. signifie le *sud-est, mais en déviant au sud.*

455. Pour les besoins de la navigation, ces 32 divisions ne suffiraient pas pour tous les azimuts qu'on veut courir; la précision exige souvent qu'on ajoute quelques degrés aux rumbs ainsi dénommés, ou qu'on en retranche. S. E. $\frac{1}{4}$ E. 4°15′ sud, signifie un rumb qui est au S. E. $\frac{1}{4}$ E., et qu'on fait dévier de 4°15′ vers le sud. Voici comment on traduit ces locutions en degrés azimutaux.

L'intervalle d'un rhumb au suivant est de 11°14′; ainsi pour avoir la graduation S. E. $\frac{1}{4}$ E, qui est la 5ᵉ division du quadrans, on répète 5 fois 11°15′, et on aura pour équivalent 56°15′ d'azimut du sud à l'est. Et dans la dénomination ci-dessus, il faudra retrancher 4°15′; ce qui ne fera que 52° d'azimut. La table suivante aide à trouver ces réductions.

ANGLES DES RHUMBS AVEC LE MÉRIDIEN.

COMPTÉS DU NORD.			COMPTÉS DU SUD.	
Nord	Nord	0° 0′	Sud	Sud
N $\frac{1}{4}$ NE	N $\frac{1}{4}$ NO	11.15	S $\frac{1}{4}$ SE	S $\frac{1}{4}$ SO
NNE	NNO	22.30	SSE	SSO
NE $\frac{1}{4}$ N	NO $\frac{1}{4}$ N	33.45	SE $\frac{1}{4}$ S	SO $\frac{1}{4}$ S
NE	NO	45. 0	SE	SO
NE $\frac{1}{4}$ E	NO $\frac{1}{4}$ O	56.15	SE $\frac{1}{4}$ E	SO $\frac{1}{4}$ O
ENE	ONO	67.30	ESE	OSO
E $\frac{1}{4}$ NE	O $\frac{1}{4}$ NO	78.45	E $\frac{1}{4}$ SE	O $\frac{1}{4}$ SO
Est	Ouest.	90. 0	Est	Ouest

456. Si l'aiguille aimantée se dirigeait dans le méridien du lieu, il serait bien aisé de trouver sur la boussole l'azimut que suit la route du navire; mais l'aiguille prend en chaque lieu une direction particulière, qui fait un angle avec le méridien.

Cet angle est appelé *déclinaison* ou *variation de l'aiguille aimantée ;* il varie avec les lieux, et même avec les temps, dans chaque localité, quoique très lentement. Cette déclinaison se détermine par des observations astronomiques, ainsi qu'on le dira bientôt (n° 530); c'est donc un angle connu qu'on fait entrer en considération, lorsqu'on veut assigner le rumb suivant lequel on doit maintenir la quille du vaisseau.

457. Mais cette direction n'est pas celle de la route du navire, à cause de la *dérive.* On donne ce nom à un effet par lequel le vaisseau est poussé dans le sens où le vent souffle, et qui varie avec la force du vent, la quantité de voiles et la qualité de la mer. Pour connaître la véritable route qu'on suit, à la surface de la mer, on se sert d'une autre boussole portative, appelée *compas de variation,* qui est armée de pinnules dans une ligne parallèle à celle de N. et S. de l'instrument. En visant la *houache,* longue trace que laisse le navire derrière lui sur les eaux, on obtient l'angle que fait cette trace avec l'axe du navire, qui est la ligne où l'on gouverne. Cet angle est la dérive.

L'azimut qu'on doit suivre est donné par le lieu où l'on est et celui où l'on veut arriver. Connaissant la déclin. de l'aimant et la dérive, on corrige bientôt l'azimut de ces deux angles, et l'on en conclut la graduation, à partir du méridien magnétique, ou le rumb suivant lequel on doit gouverner; et alors le navire court la route voulue.

Problèmes des routes.

458. Lorsqu'on veut combiner ensemble la variation v de l'aimant, la dérive d, et le rumb suivi r, afin d'en déduire la direction de la route, savoir l'angle x qu'elle fait avec le méridien vrai du lieu, on s'aide d'une figure pour indiquer les quatre directions proposées du méridien vrai, du méridien magnétique, de la dérive et de la route, en donnant à ces lignes les positions que leur assignent les valeurs angulaires données; et l'on reconnaît aisément quels sont les angles qu'on doit ajouter ou soustraire pour trouver x, qui est

l'angle de la route avec le méridien vrai du lieu, ou l'azimut.

Par ex., la déclin. étant $v = 20°$ N.E., un vaisseau court le rumb S.E. $\frac{1}{4}$ S. (la table indique que $r = 33° 45'$, du sud magnétique vers l'est), et la dérive $d = 17°$ *bâbord*, c.-à-d. portant le vaisseau du côté gauche : on demande l'azimut de la route?

Je mène les droites NS, *ns* (fig. 136) sous l'angle $v = 20°$: la première ligne figure le méridien vrai, la 2ᵉ le méridien magnétique; S est le sud vrai, la région droite représente l'est. Je tire la droite CR faisant l'angle $RCs = r = 33° 45'$ du côté du sud-est, et je vois que CR tombe au-delà de CS, par rapport à C*s*. Enfin je tire au-delà de CR la ligne CD faisant l'angle $RCD = d = 17°$. CD est la route du navire, et son azimut est l'angle

$$DCS = x = r + d - v = 30° 45' \text{ du sud à l'est ;}$$

donc, en style de marin, le vaisseau court le S. E. $\frac{1}{4}$ S. 3° S.

On voit que, dans tous les cas, on peut trouver la valeur de l'un des quatre angles r, d, v et x, quand on a les trois autres. C'est ainsi que l'officier fixe le rumb suivant lequel le navire doit gouverner.

459. Une fois connues la direction de la route et la vitesse du vaisseau, il est aisé de *faire le point*, c.-à-d. de marquer sur une carte marine la ligne parcourue en longueur et en direction : ainsi on trouve le point de la mer où l'on est actuellement. C'est ce que l'on comprendra parfaitement par la construction de ces cartes. On a de la sorte la longitude et la latitude du vaisseau, opération qu'on appelle l'*estime*. Sans doute ces résultats sont sujets à erreur ; mais on les rectifie par des observations célestes.

460. Des observations de mer n'ont jamais assez de précision pour qu'on puisse y avoir égard à l'aplatissement terrestre; aussi notre globe est-il toujours regardé comme sphérique. Le chemin A décrit en longitude sur un parallèle dont la latitude est l, répond à la route $\frac{A}{\cos l}$ parcourue sur l'équateur,

c.-à-d. que cette fraction est l'espace couru en longitude. (*Voy.* n° 478).

461. Nous avons trouvé, p. 206 et 209, que la différ. d des latitudes l et l' de deux stations voisines sur la sphère terrestre, et la différ. P de leurs longitudes sont données par les éq.

$$d = a \cos z + \tfrac{1}{2} a^2 \tan l \sin^2 z, \quad d = l - l',$$
$$P = \frac{a \sin z}{\cos l} - \tfrac{1}{2} a^2 \sin 2z \,.\, \frac{\tan l}{\cos l}.$$

Ici z est l'azimut de la route qui joint les stations, mesuré sur l'horizon de celle dont la latitude est l; l' est la latitude du point d'arrivée, a le petit arc décrit de l'une à l'autre, ou plutôt l'arc qui mesure cette valeur angulaire dans le cercle dont le rayon est 1; d est un arc de même nature.

462. Soit P (fig. 79) le pôle terrestre, M le lieu de départ, M' celui d'arrivée; PM, PM' leurs méridiens; on a $PM = 90° - l$, $PM' = 90° - l'$; C est le centre de la Terre supposée sphérique. L'angle MCM' est mesuré par l'arc a. Soit donc représenté par y la distance MM' en unités métriques, ou la distance itinéraire des deux stations; comme $1 : a :: R : y = aR$, R étant le rayon CM, on a

$$d = \frac{y \cos z}{R} + \frac{y^2 \sin^2 z \tan l}{2R^2},$$
$$P = \frac{y \sin z}{R \cos l} - \frac{y^2 \sin 2z}{2R^2} \cdot \frac{\tan l}{\cos l},$$

et comme d et P sont des longueurs d'arc de rayon 1, propres à mesurer des angles, on changera ces arcs en $d \sin 1'$, $P \sin 1'$, pour les exprimer en *minutes de degré*, et il viendra les éq.

$$l' = l - \frac{y \cos z}{R \sin 1'} - \frac{y^2 \sin^2 z \tan l}{2R^2 \sin 1'},$$
$$P = \frac{y \sin z}{R \sin 1' \cos l} - \frac{y^2 \sin 2z \tan l}{2R^2 \sin 1' \cos l}.$$

Nous avons plusieurs fois fait usage de ces éq. On néglige le plus souvent le dernier terme. Ainsi, connaissant la distance parcourue y en mètres et sa direction, ou son azimut z, ces

éq. font connaître la longitude et la latitude du point d'arrivée, quand on a celle de départ.

463. L'usage, en mer, est d'exprimer la route en lieues de 20 au degré, ou en milles de 60 au degré (c.-à-d. en minutes) : une lieue vaut 3 milles ou 3 minutes d'arc de méridien. Comme on néglige l'aplatissement, on fait le mille de 950 toises = 1850 mètres, et l'on exprime y en milles ou minutes. Le calcul donne alors (*), en négligeant le 2ᵉ ordre, puis observant que l'arc de 1° est formé de 60 minutes, ou 60 milles, la circonf.
$2\pi R = 360° \times 60'$, $R = \frac{10800'}{\pi} = \frac{1}{\sin 1'}$ (*voy.* p. 37), savoir $R \sin 1' = 1$,

$$l' = l - y \cos z, \quad P = y\,\frac{\sin z}{\cos l'}.$$

$-y \cos z$ est la correction de la latitude l, en minutes de degré de grand cercle, pour avoir l' ; mais il faut que y désigne des milles marins de 1′ chaque. L'azimut z est ici compté du méridien sud, vers l'est ou vers l'ouest, indifféremment. Une figure, même grossière, suffit pour reconnaître si la route accroît ou diminue la longitude et la latitude.

On est parti à 46° 22′ 17″ lat. B, et 40° 18′ 20″ long. O. ; on a parcouru 146 milles par l'azimut $z = 36° 45'$ du sud à l'ouest ; on demande la longitude et la latitude d'arrivée ?

				$l = 46°22'17''$ B
				$-\ 1.57.\ 0$
				$l' = 44.25.17$
$y = 146$...	2.16435	....	2.16435	40.18.20
$\cos z$........	$\bar{1}.90377$	$\sin z$...	$\bar{1}.77694$	2. 2.18
	2.06812 —,	$\cos l'$...	$-\bar{1}.85384$	P = 42.20.38
	$-117',0''$		2.08745.......	122′,31

(*) En termes de marine, la brasse vaut 6 pieds = 1ᵐ,6242.
La lieue marine de 20 au degré = 2850ᵗ,411 = 5555ᵐ $\frac{5}{9}$; log = 3.7447275.
Le mille marin en est le tiers = 950ᵗ,137 = 1851ᵐ,8518 ; log = 3,2676020.
Un nœud vaut 45 pieds = 14ᵐ,61777....... log = 1.1648812.

464. Mais il ne faut pas oublier que nos formules supposent que l'arc terrestre décrit est de peu d'étendue, la route d'un jour, par ex. Lorsque la distance est un peu grande, le triangle PMM' (fig. 79), doit être traité selon les règles générales de la Trigonométrie sphérique (p. 77), pour en tirer $PM' = 90° - l'$ et l'angle P, connaissant $PM = 90° - l$, l'angle $M = z$, et le côté $MM' = a = \frac{y}{R} =$ l'arc décrit, contenant y unités métriques, dans la direction azimutale z.

465. On peut aussi se donner les deux points M et M' de départ et d'arrivée, en longitudes et latitudes, et chercher la longueur y, ou le nombre de milles du côté MM', ainsi que la direction z de l'arc qui joint ces points. Ce problème apprend à trouver le rumb qu'on doit suivre, et la distance à parcourir pour aller de M en M'. Diverses autres combinaisons des données, dans le triangle PMM', peuvent encore être proposées : mais sans nous y arrêter, tenons-nous-en aux procédés dont les marins se servent dans ces problèmes, qui reviennent fréquemment.

466. On a vu (p. 209) que l'azimut z change sans cesse quand on parcourt un arc MM' de grand cercle, parce que cet arc fait différens angles avec les méridiens successifs menés par chaque point de cet arc. Or, les marins, ayant pour guide principal la boussole, ramènent perpétuellement, avec le gouvernail, cet angle azimutal de manière qu'il soit constant pendant un temps déterminé, quelquefois assez long. Il en résulte que la courbe décrite par un navire à la surface des mers, n'est plus un arc de cercle, mais est *à double courbure* : on la nomme *loxodromie,* courbe qui fait un angle constant avec tous les méridiens.

Un navire qui suivrait cette courbe, ferait donc le même angle avec tous les méridiens; il accomplirait une infinité de révolutions autour du pôle, sans y arriver jamais, à moins que cet angle ne fût 90°, c.-à-d. qu'il ne décrivît un des méridiens de la Terre.

Voici comment on opère le calcul des routes.

467. Dans tous les triangles sphériques formés par un arc de loxodromie et les méridiens de départ et d'arrivée, on a 4 élémens à considérer.

1°. L'azimut constant appelé *rumb de vent ;*

2°. La différ. des latitudes, ou l'espace décrit en latitude ;

3°. La différ. des longitudes, ou l'espace en longitude ;

4°. Enfin la route parcourue exprimée en milles (ou minutes).

De ces quatre choses, deux étant données, il s'agit de trouver les deux autres, ce qui comporte 6 problèmes à résoudre.

468. Soit A (fig. 149) le *point de partance* ou de départ, B celui d'arrivée, AB la route loxodromique, faisant le même angle avec tous les méridiens PK, Pg, Pf, PE, etc. P est le pôle, EK l'équateur, AC, BD les parallèles extrêmes ; on a $KA = l$, $EB = l'$.

Considérons l'arc AB comme composé d'une multitude infinie de petites lignes droites bout à bout, et $nq = \alpha$ l'une de ces parties. En formant le triangle rectangle infinitésimal nqm, dont l'angle q est l'azimut z, qui est constant tout le long de AB, on a

$$mq = \alpha \cos z, \quad nm = mq \tang z.$$

Or chaque petit arc nq fait partie d'un triangle de cette espèce, qui donne deux éq. de même genre. Ajoutons ensemble toutes les 1res ; la somme des mq compose l'arc $AD = l - l'$, différ. des latitudes de A et de B ; cos z est facteur constant ; la somme des quantités α est la route totale $AB = a$; ainsi l'on a, a exprimant des milles et $l - l'$ des minutes,

$$l - l' = a \cos z = \textit{chemin en latitude}\ldots \quad (1)$$

469. D'un autre côté, les arcs fg et mn sont entre eux comme le rayon R de l'équateur est à celui du parallèle de mn, dont nous ferons la latitude $= \lambda$; $fg : mn :: R : R \cos \lambda$, d'où $mn = fg \cos \lambda$ (n° 360), ce qui change $mn = mq \tang z$, en $fg . \cos \lambda = \tang z . mq$. En ajoutant toutes les quantités fg, dont

la somme est EK, on est conduit à prendre la somme de toutes les fractions $\frac{mq}{\cos\lambda}$, parce que tang z est facteur constant. Or EK est la différ. P des longitudes de A et B ; appelant Λ la somme des fractions $\frac{mq}{\cos\lambda}$, on a

$$P = \Lambda \tan z.$$

On donne à la grandeur Λ le nom de *somme des parties méridionales* ou des *latitudes croissantes :* c'est l'intégrale de $\int\frac{mq}{\cos\lambda}$ prise depuis A jusqu'en D, ou depuis K jusqu'en A, moins de K en D. Cherchons donc ces deux sommes que nous désignerons par Λ' et Λ'' ; savoir :

$$P = (\Lambda' - \Lambda'') \tan z = \textit{chemin en longitude} \ldots \quad (2)$$

Cette différ. devient une somme quand l'équateur passe entre les points A et B, parce que Λ'' devient négatif.

On a construit une table des valeurs de Λ prises depuis l'équateur jusqu'aux diverses latitudes ; cette table donne à vue les nombres Λ' et Λ''. Comme ces quantités y sont exprimées en minutes, l'éq. (2) donne le nombre de minutes dont la longitude a varié dans la route entière AB.

470. Voyons donc à calculer Λ. En faisant $\sin\lambda = x$, on a

$$\Lambda = \int\frac{qm}{\cos\lambda} = \int\frac{d\lambda}{\cos\lambda} = \int\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log\sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}}$$

$$= \textit{log nép.}\left(\frac{1+\sin\lambda}{\cos\lambda}\right) = \textit{log. népér.} \tan\left(45^\circ + \frac{1}{2}\lambda\right),$$

d'après l'éq. (9), p. 35. L'intégrale doit être prise depuis l'équateur où $\lambda = 0$, jusqu'à la latitude quelconque l : donc

$$\Lambda = \text{log. népér. tang}\,(45^\circ + \tfrac{1}{2}l)$$

$$= \frac{1}{M}\,\text{log. tabul. tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2}l\right). \text{ (V. p. 36.)}$$

Le chemin parcouru a, ainsi que l'angle P, sont ordinairement exprimés en minutes ou milles; il faut donc changer P en P sin 1', c.-à-d. prendre M sin 1' pour dénominateur. On trouve

$$\frac{1}{\text{M} \sin 1'} = 7915',7046741, \quad \log = 3.89848\ 95715,$$

$$\text{A} = 7915',7046741 \times \log.\ \text{tabul. tang}\ (45^\circ + \tfrac{1}{2} l). \quad (3)$$

C'est sur cette formule que sont calculées les *tables des latitudes croissantes* qu'on trouve dans les ouvrages de Mendoza, Guépratte, Bagay, etc. (*).

471. Une fois cette table formée, voyons à appliquer les éq. (1) et (2) à la résolution des problèmes des routes, savoir :

Étant donnés	I...	a et z,	*trouver*	$l - l'$ et P,
	II...	z et $l - l'$	....	a et P,
	III...	a et $l - l'$	....	z et P,
	IV...	P et $l - l'$	....	a et z,
	V...	P et z	....	a et $l - l'$,
	VI...	P et a	....	z et $l - l'$.

Comme on a deux éq. et deux inconnues, le calcul est aisé, lorsqu'on a pris dans la table les nombres A' et A" qui répondent aux latitudes l et l'. C'est ce que l'on comprendra mieux par les ex. suivans, *où nous supposons toujours que le point de partance est donné* par sa longitude et sa latitude l.

472. I. *Étant donnés le chemin* a *et l'azimut z, trouver* l—l' *et* P, *c.-à-d. la longitude et la latitude du point d'arrivée.*

Un vaisseau est parti de 46°30' latit. B et 40° longitude O; il a fait 420 milles au S.O. $\frac{1}{4}$ S. 3° O. (azimut $z = 36^\circ 45'$ du sud à

(*) On calcule ainsi A et A', pour $45^\circ + \frac{1}{2} l = 68^\circ 15'$ et $65^\circ 26' 45''$

log tang........	0.3990711			0.3402089
log const.	3.8984896	....		3.8984896
log log tang.	$\bar{1}$.6010503			$\bar{1}$.5317456
A'.......	3.4995399		A"...	3.4302352
A' =	3158',93		A" =	2692',99.

l'ouest, *voy.* p. 400); quelles sont la longitude et la latitude d'arrivée?

Départ $l = 46°30'0''$ N.	$a = 420$ 2.623249
	cos z............ $\bar{1}$.903770
$-$ 5.36.30	336',5.......... 2.527019
Arrivée $l' = 40.53.30$	l donne $\Lambda' = 3158',93$
	l' donne $\Lambda'' = 2692,99$
tang z....... $\bar{1}$.873167	$\Lambda' - \Lambda'' = 465,94$
465,94....... 2.668330	
2.541497......	$P = 347',93$.........$= 5°47'55''$
	longit. de départ.... 40. 0. 0 O
	longit. d'arrivée..... 45.47.55.

473. II. *Connaissant l'azimut* z *de la route et la latitude* l' *d'arrivée; trouver l'espace parcouru* a, *et la longitude d'arrivée* P.

Un navire allant par le S. E. ¼ E. ($z = 50°37'30''$ du sud à l'est) a passé de la latitude

$l = 15°55'$ S.	$\Lambda' = 967',53.$
à $l' = 18.49$ S.	$\Lambda'' = 1149,86$
$l - l' = 174' = 2.54$	$\Lambda' - \Lambda'' = -182,33$
174'....... 2,240549	182',33.............. 2.260858
cos z.......$-\bar{1}$.802359	tang z................ 0.085827
$a = 274',28$..... 2.438190	$P = 222',17$.......... 2.346685.

Donc le vaisseau a parcouru 274,3 milles, ou 91 lieues ⅓ au S. E. ¼ E., et sa longitude a diminué de 3° 42′ 10″.

474. III. *Étant données les latitudes extrêmes* l et l', *et la route* a; *trouver l'azimut* z *de la route, et la longitude d'arrivée.*

On a fait 162 liènes, ou 486 milles, entre le N. et l'E. en partant de

$l = 28°20'$ latit. N.	$\Lambda' = 1773',85$
arrivant à $l' = 32.17$ latit. N.	$\Lambda'' = 2048,46$
$l' - l = 3.57 = 237'$	$\Lambda' - \Lambda'' = -274,61$
237'............. 2.374748	274',61..... 2.438716
486'.............$-$2.686636	tang z...... 0.252928
cos z............ $\bar{1}$.688112	P......... 2.691644
$z = 60°48'50''$	$P = 491',64 = 8°11'38''$.

Le navire a couru au N. E. $\frac{1}{4}$ E. 4° 34′ E., et sa longitude a diminué de 8° 11′ 38″.

475. IV. *Connaissant les points de partance et d'arrivée (leurs longitudes et latitudes) savoir* P *et* $l - l'$; *trouver la route parcourue* a, *et l'azimut* z.

On est parti de......	38°15′	latit. N.	et	29° 0′	longit. O.
On veut aller à......	32.32	latit. N.	et	19.38	longit. O.
Chemin en latit.....	$5.43 = l - l'$,		en long..	$9.22 = P = 562'$	

38° 15′.......	$A' = 2487',33$	562′........	2.74974
32.32........	$A'' = 2066,23$	421,1........	− 2.62439
	$A' - A'' = 421,16$	tang z.....	0.12535
343............	2.53529		$z = 53°9'22''$
cos z...........	− $\bar{1}$.77789		= S. O. $\frac{1}{4}$ O. 2°32′ O
a.............	2.75740.........		$a = 572'$.

476. V. *Étant donnés la différ.* P *des longitudes extrêmes et l'azimut* z *de la route; trouver l'espace parcouru* a, *et la différ.* $l - l'$ *des latitudes.*

L'éq. (2) fait trouver $A' - A''$, et comme on connaît le point de départ, on a A'; ainsi le calcul donne A''. On cherche ensuite à quelle latitude l' répond cette valeur de A'', dans la table des parties méridionales, et l'on a la latitude l' d'arrivée. L'espace a est enfin donné par l'éq. (1), comme dans le problème II.

On est parti de 45° de latitude N., et se dirigeant entre le N. et l'O., on a suivi l'azimut $z = 67°30' = $ O.N.O. La longitude s'est accrue de $P = 2° 45' 36''$: quelle est la latitude d'arrivée, et combien a-t-on couru de milles?

P = 165′,6............	2.21906		
tang z................	− 0.38278	la lat. 45° donne	$A'' = 3029',94$
$A' - A''$...........	1.83628............		$A' - A'' = 68,59$
	$l' = 45°48'$ N....	$l - l' = 48'$...	$A'' = 3098,53$
48′.......	1.68124		
cos z.......	− $\bar{1}$.58284		
$a = 125',43$.......	2.09840.	On a couru 125,4 milles = 42 lieues.	

477. VI. Lorsqu'on connaît P et a, et qu'on demande z et $l-l'$, nos éq. ne sont plus propres à donner la solution du problème, parce qu'outre ces deux inconnues, A'' l'est aussi, et qu'on n'en peut tirer cette valeur. Mais lorsqu'on a sous les yeux la table des valeurs de A, on a coutume d'y adjoindre une autre table, dont les colonnes mettent en correspondance les valeurs simultanées de a, P, z et $l-l'$; ainsi l'on y cherchera le lieu où les valeurs de a et P données se trouvent sur une même ligne; celles de z et $l-l'$ s'y trouvent aussi dans leurs colonnes respectives. Renversant ensuite le problème, on vérifie le résultat en prenant ces nombres z et $l-l'$ pour données, et le calcul doit redonner a et P.

478. Plus on est près de l'équateur, et plus la circonférence des parallèles augmente : on conçoit qu'il n'y a que sur l'équateur, le méridien et les autres grands cercles de la sphère que le degré a 60 milles. Ainsi un navire qui court sur un parallèle de l'est à l'ouest, ne décrit pas autant de fois 60 milles que de degrés de longitude, et il faut un calcul pour déterminer l'arc d'équateur compris entre les deux méridiens extrêmes de la route.

Les circonférences MO et AC (fig. 133) sont comme leurs rayons, et il en faut dire autant des arcs de même nombre de degrés; ainsi α degrés d'un parallèle répondent à α' degrés de l'équateur, et l'on a $\alpha:\alpha'::\text{OM}:\text{CA}$, ou $::\text{CA}\cos l:\text{CA}::\cos l:1$, attendu que dans le triangle OCM, $\text{OM}=\text{CA}\cos l$. Ainsi $\alpha=\alpha'\cos l$. Cette éq. sert à réduire en α' degrés de l'équateur, l'espace α décrit sur un parallèle, ce qu'on appelle *réduire les lieues mineures en lieues majeures*.

Ainsi, lorsqu'on a couru 20 lieues dans le sens de l'est ou de l'ouest, on a décrit plus d'un degré de longitude. A la latitude de 60°, les degrés de longitude n'ont plus que 30 milles : ils en ont moins encore par les latitudes plus élevées, et ces degrés sont extrêmement petits près du pôle.

479. Il se passe une chose analogue pour les routes obli-

ques au méridien. Quand un navire parcourt un petit arc nq (fig. 149), il décrit qm dans le sens du méridien, et mn dans le sens des parallèles. Pour une route totale AB, la somme des petits arcs qm donne un arc total $AD = l - l'$, différ. des latitudes des extrémités de la route, mesurée sur un méridien : mais la somme des arcs mn est intermédiaire entre les arcs AC et BD, des parallèles terminaux. Cette somme produit un arc de parallèle IJ.

480. Lorsque la route n'excède pas 200 lieues, et que la latitude ne dépasse pas 60 degrés, le calcul des routes peut se faire d'une manière suffisamment approchée, sans se servir des latitudes croissantes Λ. Le triangle mqn donne... $mn = nq \sin z = mq \operatorname{tang} z$. Ajoutant toutes les éq. fournies par les élémens semblables, depuis le point de partance A jusqu'au point d'arrivée B, on suppose que la somme des parties mn est l'arc $\varepsilon = IJ$ du parallèle moyen, les points I et J étant au milieu des arcs AD, CB. C'est cette distance ε que les marins appellent *le chemin est et ouest*, et qu'ils prennent d'une longueur moyenne entre les arcs AC, DB.

On a donc $l - l' = a \cos z$, $\varepsilon = a \sin z = (l - l') \operatorname{tang} z$: ainsi le chemin est et ouest ε, et la marche en latitude $(l - l')$ sont

$$\varepsilon = a \sin z, \quad l - l' = \frac{\varepsilon}{\operatorname{tang} z} \; \ldots \ldots \quad (4)$$

et pour tirer la marche P en longitude de la valeur de ε, il faut réduire cet arc ε à l'équateur en le divisant par $\cos \lambda$, λ étant la latitude moyenne $\frac{1}{2}(l + l')$, d'où

$$EK = P = \frac{\varepsilon}{\cos \lambda} \ldots \ldots \quad (5)$$

Appliquons ces formules au problème I, p. 408.

$a = 420'$	2.623249	$l =$	46°30′	ε	2.400186
$\sin z$	$\bar{1}$.776937	$l - l' =$	$-$ 5.36.30	$\cos \lambda$ ..	$-\bar{1}$.859149
$\varepsilon = 231'$,3	2.400186	$l' =$	40.53.30	P	2.541037
$\operatorname{tang} z$	$-\bar{1}$.873167	lat. moy. λ	43.41.45		$P = 347'$,5
$l - l' = 336'$,5 ..	2.527019.				

Ces résultats sont les mêmes que ceux qu'on a trouvés par des procédés rigoureux.

Supposons qu'un vaisseau ait parcouru 37,29 milles au sud, et 65,42 milles à l'ouest ; la latitude du lieu a bien diminué de 37', 29 ou 37'17"; mais la longitude n'est pas devenue plus grande seulement de 65',42 = 1°5' 25", mais bien de 1°35', sous la latitude moyenne de 46°30'. C'est ce que montre le calcul de l'éq. (5) :

$$\begin{array}{ll} \epsilon = 65',42 \ldots\ldots & 1.81571 \\ \cos \text{lat. moy.} \lambda \ldots - & \bar{1}.83781 \\ \hline P = 95',04 = 1°35' & 1.97790 \end{array}$$

481. Comme, sur mer, on est exposé à changer souvent la direction de la route, au gré du caprice des vents, le chemin fait en un jour se compose de plusieurs routes, dont chacune a un petit nombre de milles, formant une suite de lignes brisées, dont on a trouvé la direction avec la boussole, et la longueur avec le lock. Voici le procédé dont on fait usage pour trouver *le point* final d'arrivée.

On inscrit dans une table à neuf colonnes, semblable à celle de l'ex. que nous donnons plus loin, 1°. la direction suivie, telle que la donne le rumb couru avec le méridien magnétique ;

2°. La déclin. de l'aimant, ou l'angle de l'aiguille avec le méridien vrai ;

3°. La dérive ;

4°. La route corrigée de ces deux influences, ou l'azimut couru, angle de la *houache,* ou de la route vraie, avec le méridien vrai ;

5°. Les milles parcourus dans chaque ligne et le sens dans lequel ils ont été décrits, rapportés aux quatre points cardinaux;

6°, 7°, 8° et 9°, les composantes de ces espaces dans les directions principales du nord, sud, est et ouest, à l'aide des équations (4).

On en conclut, par des soustractions, les espaces finalement décrits dans les sens cardinaux, et par suite le changement de latitude; puis par l'éq. (5) le changement de longitude.

L'ex. suivant montre comment on gouverne ces opérations ; on a représenté par la fig. 147 le résultat des marches supposées. A est le point de départ, F celui d'arrivée, B, C, D, E sont les positions intermédiaires, telles qu'on les déduit des données.

Un vaisseau part de A, à 46° 30′ latitude N., et 40° longitude O.

Route du Compas.	Déclin.	Dérive.	Azim. vrai.	Chem.	N.	S.	E.	O.
22°30′=NNO	20° NE ou tribord.	11°15′T	8°45′ NE	15′	14′83	»	2′,28	»
33.45=SE¼S		17. 0 B	30.45 SE	25′	»	21′ 49	12,78	»
45. 0=SO		15. 0 T	80. 0 SO	62′	»	10,77	»	61′,06
56.15=NE¼E		18. 0 T	85.45 SE	54′	»	4,00	53,85	»
67.30=OSO		10. 0 B	77.30 SO	75′	»	16,23	»	73,22
				Sommes.	14′,83	52,49	68,91	134,28
					—	14,83	—	68,91
				Milles parcourus au S. et O...		37,66		65,37

La 1re colonne contient les rumbs parcourus, donnés par la boussole; la 2e la variation ou déclin. de l'aimant; la 3e la dérive : on trouve par les principes exposés p. 402 quel est l'azimut vrai de la route et on l'inscrit dans la 4e colonne. La 5e est l'espace décrit dans chaque direction ; on calcule ensuite, par l'éq. 4, l'espace composant décrit dans les directions cardinales, et l'on inscrit les résultats, chacun dans la colonne qui lui est propre. Par ex., pour la 2e ligne du tableau, on a

25′......	1.39794	
sin z......	$\bar{1}$.70867	
s.........	1.10661	$s =$ 12′,78 dans le sens de l'est.
tang z.... —	$\bar{1}$.77447	
$l - l'$....	1.33214,	$l - l' =$ 21′,49 diff. des latit. vers le sud.

On fait la somme de chacune des 4 dernières colonnes, et l'on

retranche celles de N. et S., puis celles de E. et O.; il en résulte qu'on a réellement fait le même trajet que si l'on n'eût marché que dans une seule direction qui aurait produit 37',66 au S., et 65',37 à l'O. Divisant 65',37 par le cos. de la latitude moyenne 46°11'10" pour rapporter cet arc à l'équateur, on trouve que la longitude de 40° est augmentée de 1°34'25". Ainsi la longitude d'arrivée est 41°34'25" O., et la latitude 45°52'20" N. Le vaisseau par une marche directe de 75',44 sous l'azimut constant 60° 3'13", aurait obtenu le même résultat, ainsi qu'on le reconnaît à l'aide du calcul des équ. précédentes.

Des cartes marines.

482. Les marins préfèrent souvent les constructions aux calculs, pour ces routes de détail : ce procédé est moins exact, mais plus facile, et ne donne pas lieu à des erreurs notables. D'ailleurs les approximations suffisent en pareil cas, parce qu'on corrige les résultats par des observations célestes, toutes les fois que cela se peut.

Il est donc nécessaire de construire des cartes, d'après les formules (1 et 2). Le commerce fournit ces cartes aux marins, qui s'en servent comme on va l'expliquer quand nous aurons exposé la manière de les tracer.

483. L'équateur et ses parallèles sont représentés par des droites parallèles convenablement espacées; les méridiens par des perpendiculaires aux 1res, et celles-ci sont à distances égales les unes des autres, pour des degrés égaux de longitude ou d'équateur. En sorte que la carte est dessinée dans un réseau de rectangles dont la base est la même pour tous, mais dont la hauteur croît avec la latitude. Les distances entre les parallèles à l'équateur sont données par les valeurs de Λ, c.-à-d. des latitudes croissantes, d'où dérive cette dénomination. Telle est la *carte réduite*, ou *de Mercator*.

En voici la construction, appliquée à une carte qui s'étend à 11°$\frac{1}{2}$ de longitude, et de 28°39' à 34° de latitude. Après avoir tiré une horizontale AB (fig. 146) sur laquelle on por-

tera $11\frac{1}{2}$ parties égales quelconques, on élèvera une perpendiculaire à chaque point de division, pour représenter les méridiens de la carte. Les cercles parallèles à l'équateur sont figurés par des perpendiculaires à celles-ci, mais dont les intervalles croissent comme les valeurs de Λ qui répondent à 28°29′, 29°, 30°, ... 34°. On prendra donc ces nombres dans la table des parties méridionales, et leurs différences successives, différ. qui seront les intervalles entre les parallèles, en prenant pour échelle l'espace d'un degré de longitude divisé en 60 parties égales. Ainsi l'on trouvera

28°39′.....	$\Lambda =$ 1795′,47...	différ.	23′,97 $= Ab$
29..........	1819,44.....	.....	68,94 $= bc$
30..........	1888,38..........		69,63 $= cd$
31..........	1958,01..........		70,37 = etc.
32..........	2028,38..........		71,15
33..........	2099,53..........		71,95
34..........	2171,48..........		72,81.

Ainsi, après avoir partagé la ligne horizontale AB en parties ou degrés de longitude, et chaque degré en 60 divisions égales pour représenter les minutes, cette échelle sera celle sur laquelle on devra prendre 23,97 parties pour porter de A en b; 68,94 de b en c, 69,63 de c en d, etc., puis par les points b, c, d... on mènera des perpendiculaires aux méridiens, lesquelles figureront les parallèles de 29°, 30°, . . 34°.

484. Mais lorsqu'on veut faire usage de cette échelle AB sur le plan de la carte, il convient d'en analyser la construction.

NP (fig. 143) étant un méridien, tirons par un point N la droite NM qui fait avec NP un angle $N =$ l'azimut z de la route; prenons $NM' =$ le chemin a parcouru, en parties de l'échelle AB (fig. 146): abaissons de M′ la perpendiculaire M′P′ sur PN; le triangle rectangle NM′P′ donne $NP' = a \cos z$, d'où, par l'éq. (1), $NP' = l - l' =$ le chemin décrit en latitude. Mais M′P′ n'est pas le chemin est et ouest.

Soit fait $NP = \Lambda' - \Lambda'' =$ différ. des latitudes croissantes, et menons PM parallèle à P′M′. Le triangle NPM donne $MP = (\Lambda' - \Lambda'') \tang z$, d'où, par l'éq. (2), $MP = P =$ diff. des longitudes.

485. Ainsi dans la carte que nous donnons (fig. 146), les méridiens sont des verticales équidistantes; les parallèles à l'équateur, des horizontales espacées de distances croissantes de bas en haut, comme les nombres A : toute oblique *mn* fait des angles constans avec les méridiens, et est le développement d'une route loxodromique, qui fait avec ces cercles un angle azimutal constant $z = mnp$.

1°. Si *n* est le point de départ, et *m* le point d'arrivée, *mp* sera la différ. des longitudes, *np* celle des latitudes.

2°. *nm* mesuré sur l'échelle AB ne sera pas la longueur de la route en milles : pour obtenir cette distance, on prendra sur l'échelle AB une longueur d'autant de milles ou minutes qu'il y en a dans la graduation en latitude de la ligne *np*. On portera cette longueur de *n* en *p'*, et l'on menera l'horizontale *p'm'*; *nm'* évalué en minutes sur l'échelle AB donnera le nombre de milles parcourus selon *nm*.

Cette construction très simple présente de grands avantages, lorsque l'on considère que jamais on ne va directement du point *n* de partance au point *m* d'arrivée; on n'atteint au terme du voyage qu'en faisant une suite de lignes brisées dans des directions diverses que commandent les circonstances. Notre construction s'applique à chacune de ces lignes en particulier.

486. Voyons maintenant à résoudre graphiquement les six problèmes de la réduction des routes, sur la carte de Mercator (fig. 146).

I. *On donne le chemin* a *et l'azimut* z, et il faut trouver la différ. des latitudes et celle des longitudes, $l - l'$ et P.

Après avoir marqué le point *n* de départ sur la carte, on tirera la droite indéfinie *nm*, faisant avec les méridiens l'angle $pnm = z$: on prendra sur AB une ouverture de compas d'autant de minutes que le chemin *a* contient de milles, et on la portera de *n* en *m'* : on tirera *m'p'* parallèle à AB, et l'on aura le point *p'*; *np'* seront les milles parcourus en latitude. Prenant sur AB une ouverture d'autant de minutes, on la portera de *n* en *p*; on menera l'horizontale *pm*, qui coupera *nm* au

point *m* d'arrivée : *pm* sera la différ. P des longitudes, et *np* ou *ci* sera celle $l - l'$ des latitudes.

II. *On connaît l'azimut* z *et la différ.* l — l' *des latitudes ;* il faut trouver le chemin parcouru *a*, et la différ. P des longitudes.

Marquez le point *n* de départ, et tirez la droite indéfinie *nm* faisant l'angle *z* avec les méridiens. La latitude d'arrivée *l* étant donnée, on connaîtra le point *m* d'arrivée, qui est situé sur le parallèle *cmp*. La route parcourue *nm'* se trouve comme ci-dessus, en prenant *np'* d'autant de minutes de l'échelle AB que la différ. des latitudes en contient, etc.

III. *On donne les latitudes* l *et* l' *des extrémités et le chemin* a *;* il s'agit de trouver l'azimut *z* et la différence P des longitudes.

Le point *n* de départ et le parallèle *cp* du point d'arrivée sont connus. On prendra sur l'échelle AB une ouverture d'autant de minutes qu'il y en a dans la différ. des latitudes, et l'on portera cette distance de *n* en *p'* ; puis on menera l'horizontale indéfinie *p'm'*. Du centre *n*, avec un rayon d'autant de minutes de l'échelle AB que la route *a* contient de milles, on décrira une circonférence qui coupera *p'm'* en un point *m'*. Enfin, tirant la droite *nm'm*, on connaîtra l'angle *n* qui est l'azimut *z*, et le point d'arrivée *m* qui est à l'intersection de *nm'* avec *pm*.

IV. *Connaissant les points de partance et d'arrivée*, *n* et *m*, trouver le chemin parcouru *a* et son azimut *z*.

On tire la droite *mn*, et l'angle $n = z$ est l'azimut. On prend sur l'échelle AB une ouverture d'autant de minutes qu'il y en a dans la différ. des latitudes, et on la porte en *np'* ; par *p'*, on mène l'horizontale *p'm'* ; et *nm'*, mesuré sur AC, donne le nombre *a* de milles parcourus.

V. *On connaît la différ.* P *des longitudes et l'azimut* z *;* pour trouver *a* et $l - l'$, comme la direction *mn* est donnée ainsi que le méridien 11 d'arrivée, le point *m* est connu, puis la longueur *ci* ; et enfin on trouve *a*, comme au problème précédent.

VI. *Lorsque* P *et* a *sont donnés*, on peut trouver z et $l - l'$ par une construction approchée, qui consiste à supposer que la longueur mn, mesurée sur la verticale ci, a autant de milles que a ou nm' mesuré sur AB. On connaît donc ainsi le point n, et le méridien d'arrivée 11 : du centre n, avec un rayon pris sur Ai, vers l'espace mn occupé par la route, on trace un arc de cercle qui coupe ce méridien 11 au point m; on tire nm.

487. Nous avons dit que le défaut de précision des observations en mer, conduisait à considérer la Terre comme sphérique. Mais rien n'oblige à se soumettre à cette condition, quand on construit les cartes marines. Voici comment on y a égard à l'aplatissement.

Soit s un arc de méridien terrestre compté depuis l'équateur jusqu'au point dont la latitude est l; s' l'arc qui le représente sur la carte. Comme, par les conditions prescrites, les degrés de longitude sont tous égaux, mais que ceux de latitude croissent en conservant avec les premiers le rapports vrais; deux élémens ds et ds' doivent être entre eux comme le rayon A de l'équateur est au rayon x' de parallèle, $x' : \text{A} :: ds : ds' = \frac{\text{A}ds}{x'}$. En substituant ici les valeurs (4 et 16), pages 173 et 178, on a

$$ds' = \frac{\text{A}(1-e^2)\,dl}{\cos l(1-e^2\sin^2 l)} = \frac{\text{A}dl}{\cos l} - \text{A}e\,\frac{d(e\sin l)}{1-e^2\sin^2 l},$$

en décomposant la fraction. Intégrons, et remplaçons s' par Λ qui est la somme des latitudes croissantes, dans le cas d'un sphéroïde aplati, et nous aurons

$$\Lambda = \text{A}\left[\log\text{tang}\left(45^\circ + \tfrac{1}{2}l\right) - \tfrac{1}{2}e\log\left(\frac{1+e\sin l}{1-e\sin l}\right)\right].$$

On n'ajoute pas ici de constante, parce que Λ commençant à l'équateur, Λ et l sont nuls ensemble. Développons le dernier terme, par la formule (22), p. 36 ; puis divisons le 1[er] terme

par le module M, pour convertir les log. népériens en tabulaires, il vient

$$A = A\left[\frac{\text{log. tab. tang}(45^\circ + \frac{1}{2}l)}{M} - e^2\sin l - \frac{1}{3}e^4\sin^3 l - \frac{1}{5}e^6\sin^5 l \ldots\right]$$

Comme il convient d'exprimer A en minutes, ainsi qu'on l'a fait p. 408, nous diviserons le 2ᵉ membre par sin 1′.

Observons d'abord que le 1ᵉʳ terme de cette éq. est indépendant de e, et est le même que lorsqu'on néglige l'aplatissement : les autres termes sont donc la correction relative à cette circonstance.

Le calcul donne enfin, pour la somme A des latitudes croissantes,

$$A = 7915',704674 \log\text{tang}(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) - 20',5545 \sin l - 0',041 \sin^3 l - \text{etc.},$$

en prenant $\frac{1}{334}$ pour aplatissement. C'est la formule de Delambre, qu'on emploiera à la formation des tables de A, au lieu de celle de la p. 408, et qui sert ensuite aux constructions des cartes marines. Les tables des auteurs ne tiennent aucun compte de l'aplatissement.

Quelques instrumens de calculs.

488. Comme les marins ne sont pas toujours très habiles aux calculs logarithmiques, aux combinaisons des signes trigonométriques, etc., que d'ailleurs ils sont perpétuellement en lutte contre les élémens, et que la fatigue prive souvent les plus instruits de l'attention nécessaire aux opérations, on conçoit qu'il ne faut pas dédaigner les procédés qui peuvent, jusqu'à un certain point, dispenser des calculs. Les constructions graphiques sont donc fort employées; mais on fait aussi souvent usage de deux instrumens que nous allons décrire.

489. Les *règles logarithmiques*, nommées par les Anglais *sliding rules*, *règles à coulisse*, sont composées d'une règle en bois, où est pratiquée une coulisse longitudinale, dans la—

quelle on fait glisser une réglette. On divise chacune de ces deux règles, par des traits, en parties inégales, comme le sont les logarithmes des nombres naturels. Ainsi après avoir adopté une échelle de parties égales, on porte sur chaque règle, à partir d'un bout où est le zéro (log. 1), des ouvertures de compas égales aux log. des nombres 2, 3, 4, etc. Lorsqu'on veut le produit ou le quotient de deux grandeurs, au lieu d'en ajouter ou soustraire les log., on fait cette opération sur les longueurs qui les représentent, opération très facile, puisqu'elle se réduit à mettre en coïncidence, en faisant saillir la réglette glissante dans sa coulisse, les traits qui portent pour indicateurs chiffrés les nombres proposés.

Ces règles donnent aussi les log. des sinus, tangentes, etc., et se prêtent par conséquent aux opérations trigonométriques.

Les résultats donnés par ces règles ont peu de précision; mais on n'en tire pas moins un très utile parti. Les marins anglais en font surtout beaucoup usage. Il existe une instruction développée de M. Arthur, pour apprendre à s'en servir.

490. Voici la construction du *quartier de réduction* (fig. 150). Après avoir tracé deux lignes AB, AC, à angle droit, on porte sur chacune des parties égales. Par les points de division, on mène des suites de parallèles et de perpendiculaires formant un réseau de carrés égaux, tous forts petits; car le degré d'approximation de cet appareil dépend surtout de cette condition. Du centre A, on trace des séries de quarts de cercle qui joignent les points de division de même rang pris sur AB et AC. Enfin on numérote ces points, et l'on marque sur le quadrans extérieur les 90 degrés.

A l'aide de cette construction, on peut trouver, sur la figure, l'une de ces quantités : *le rayon d'un arc*, *le sinus de cet arc*, *son cosinus*, *sa tangente*, *sa cotangente*, etc., quand l'une de ces grandeurs est connue. Si, par ex., on demande ces lignes pour l'arc de 56 degrés dont le rayon est A 20, on tracera le rayon du 56ᵉ degré, lequel coupera en un point q le cercle n° 20 : les deux perpendiculaires qi, qv sont l'une le

cosinus, l'autre le sinus de 56°, le rayon étant A 20. Et comme ici le point q ne se trouve pas situé juste sur l'un des angles de nos petits carrés, mais seulement fort près de l'un d'eux, le cosinus et le sinus diffèrent peu des lignes que la figure contient; on peut au reste tracer facilement ces cosinus et sinus.

Comme on est obligé de varier les directions du rayon selon les graduations proposées, on trouve commode de fixer au centre A une soie qu'on tend dans la direction voulue. La figure est construite sur une grande feuille, afin que les dimensions puissent conduire à des valeurs numériques assez approchées. Le commerce fournit de ces quartiers de réduction collés sur carton.

On est dans l'habitude d'y tracer les rayons selon les huit rhumbs de vent de chaque quart, de 11° $\frac{1}{4}$ en 11° $\frac{1}{4}$ (*voy.* p. 400).

491. Supposons qu'un navire soit parti d'un lieu à 23°47′ de latit. N. et 117°28′ de longitude E. de Paris; et qu'il ait couru 63 lieues dans la direction du N.E. $\frac{1}{4}$ E. 4° N. (ou 52°15′ d'azimut du N. à l'E.) : et qu'on demande quelle est la route parcourue dans le sens, tant du nord que de l'est. Je tire le rayon An qui va à 52°15′, et je cherche celui des arcs qui porte le n° 63. Lorsque la figure a l'étendue convenable, ce quadrans s'y trouve; mais la nôtre étant très petite, je fais valoir 3 lieues à chaque division de AB, et je prends le quadrans n° 21, tiers de 63.

Du point n, où le rayon est coupé par l'arc 21°, je tire les deux perpendiculaires nm, ni, et je trouve que ces lignes vont couper AB et AC aux points m et i, répondant à peu près aux n°s 12 $\frac{8}{9}$ et 16 $\frac{2}{3}$: ce qui m'apprend, en triplant ces nombres, que le navire a décrit 38 $\frac{2}{3}$ lieues vers le nord, et 50 vers l'est. Pour réduire ces lieues en milles, je triple, et j'ai 116 milles ou 116′, et 150′ : savoir, en latitude 1°56′, en sorte que la latitude est devenue 25°43′.

Quant aux 150 milles décrits à l'est, il reste à trouver de combien la longitude a varié. Le parallèle moyen est à 24°45′,

et l'on veut connaître combien de degrés valent 150′ de ce parallèle. Le rayon dirigé à 24°45′ coupe la perpendiculaire n° 15 (nous supposons ici 10 parties dans chaque division de AB) en un point qui répond à l'arc n° 16 $\frac{1}{2}$: ainsi 165 milles de l'équateur, ou 2°45′ sont le changement en longitude. De 117°28′ E. qu'était cette longitude, elle est donc devenue 120°13′.

En effet, il est très aisé de voir que le quartier de réduction sert à trouver toutes tracées les longueurs qui ont pour expression numérique $\alpha \cos l$, $6 \tang l$, $\frac{\gamma}{\cos l}$ et autres de même nature; et que cet appareil est propre à résoudre tous les problèmes des routes. Il est même évident qu'on l'emploierait avec le même avantage à traiter tous les problèmes de trigonométrie rectiligne qui ont pour solutions des valeurs de la forme ci-dessus (*voy.* les éq. 23 et 24, p. 38).

Chap. II. — Astronomie nautique.

492. Les marins n'ont pas une espèce d'astronomie qui leur soit particulière, et qui diffère de celle dont on fait usage à terre : les principes généraux, les méthodes, sont également applicables dans tous les cas. Cependant, d'une part, la mobilité de l'observatoire, l'impossibilité d'y employer le niveau ou le fil-à-plomb, obligent à se servir en mer d'instrumens particuliers; d'une autre part, le peu d'avantage qu'on a de se livrer à de longs calculs, pour atteindre un degré de précision que les observations ne comportent pas, a conduit à préférer des méthodes plus simples et d'une exactitude moindre, mais suffisante à l'objet qu'on se propose.

C'est l'ensemble de ces observations et de ces théories simplifiées, et appliquées au sol mobile du navire, dont la latitude et la longitude sont perpétuellement variables, qui constitue ce qu'on appelle l'*astronomie nautique*.

Nous avons donné dans le chapitre 1er les procédés de la

science qui n'empruntent pas le secours des astres : mais comme ces procédés n'y sont jamais susceptibles que d'une exactitude douteuse, et que les erreurs, en s'accumulant, deviennent énormes ; il nous reste à indiquer comment on rectifie les résultats par les observations célestes, afin de trouver, avec certitude, le lieu du navire à la surface des mers, et la route qu'il doit suivre pour arriver à sa destination.

Nous décrirons d'abord le *sextant* et le *cercle de réflexion*, qui servent à mesurer les hauteurs et les distances des astres : puis nous indiquerons les procédés dont le marin se sert pour trouver l'heure, la latitude, la longitude du lieu où il est, la déclin. de l'aimant, etc.

Sextant.

493. Cet instrument s'emploie pour mesurer des angles; il n'exige ni aide, ni pied qui le supporte ; aussi utile aux marins qu'aux arpenteurs, et même aux astronomes, on doit regretter qu'il ne soit pas d'un plus fréquent usage.

Le *sextant* tire son nom de ce que sa pièce principale est un arc de cercle d'environ 60 degrés, dont nous verrons qu'on peut se servir pour mesurer tous les angles qui ne dépassent pas 120°, en vertu de cette propriété que les arcs de 30′ comptent pour un degré entier. (*Voy*. fig. 152.)

AB est l'arc sur lequel on lit la graduation déterminée par une alidade CD, mobile autour du centre C de cet arc, et qui, dans la fenêtre dont elle est percée, porte un vernier pour évaluer les minutes. Au lieu de graver sur les divisions de l'arc les chiffres 5, 10, 15,... on marque les doubles 10, 20, 30... d'après la propriété qui vient d'être énoncée ; en sorte que les demi-degrés étant marqués comme des degrés, on n'est pas obligé de doubler les arcs observés. On dirige l'alidade CD comme il convient pour mesurer la distance angulaire entre deux objets ; nous dirons bientôt comment il faut s'y prendre pour cela. Il y a sous la pièce D, une vis de pression pour arrêter l'alidade sur le limbe, lorsqu'elle est amenée près du point qui lui convient ; et la vis de rappel F qui sert aux petits

mouvemens, selon ce qu'on trouve dans tous les instrumens de ce genre (*v.* p. 11), achève de produire la parfaite coïncidence.

On y adapte aussi une loupe M, qui grossit les objets; elle est mobile autour du centre H sur le bras de l'alidade, pour l'amener au-dessus des divisions qu'on veut lire; et elle peut basculer sur le support, pour l'éloigner du limbe au degré qu'exige l'œil de l'observateur, qui établit le verre à sa distance focale. Le manche de bois E sert à tenir l'instrument dans la main.

Le limbe gradué est en cuivre, argent ou platine; et même tout l'instrument est quelquefois en métal : cependant les grands sextans seraient trop lourds faits de cette matière; on les préfère en buis ou en ébène, avec un arc en ivoire qui porte les divisions. On fait des sextans qui ont jusqu'à 15 à 20 pouces de rayon; mais depuis qu'on a trouvé plus de précision aux cercles entiers, on ne se sert plus guère que de sextans de 6 pouces de rayon au plus, pour les observations peu importantes, en réservant les cercles pour celles qui exigent une plus grande précision. Il y a même de petits sextans de 2 pouces $\frac{1}{2}$ de rayon (5 centim.), de la forme d'une tabatière, qui sont propres à l'arpentage, et qu'on porte dans la poche. Mais en mer, cette dimension serait insuffisante.

Oest le tube d'une lunette à deux verres convexes ayant même foyer (*voy.* p. 100), par conséquent elle renverse les objets. A ce foyer commun, il y a un *réticule* à deux fils parallèles qui resserrent la partie du champ où l'on doit voir les objets. Le tube de cette lunette se tire à volonté, pour amener l'*oculaire* juste au point où son foyer se confond avec celui de l'*objectif*, point qui, comme on sait, change avec la distance des objets. Cette lunette est fixée par un anneau aux rayons qui composent la charpente de l'instrument.

494. Avant de dire comment on mesure un angle, expliquons un effet de la réflexion de la lumière, effet qui sert de fondement à la théorie du sextant. Il y a deux miroirs perpendiculaires au limbe; le *petit*, qui est fixé en N, a sa moi-

tié supérieure transparente et sans étamage; le *grand miroir* LG est attaché sur l'alidade même, au-dessus de l'axe C de rotation, et tourne avec celle-ci.

Imaginons que l'alidade CB (fig. 151) aboutisse en B sur le zéro de la graduation de l'arc, et que le grand miroir LG soit fixé dans cette même direction sur cette alidade; qu'en outre le petit miroir FI soit exactement parallèle au grand. L'axe optique de la lunette O étant tourné vers un objet éloigné H, les rayons lumineux émanés de cet objet arriveront à l'œil dans la direction HO, à travers la partie non étamée du petit miroir FI. En même temps, d'autres rayons, tels que KC, parallèles aux premiers, à cause de la grande distance de l'objet, iront au grand miroir LG, s'y réfléchiront de nouveau sur la partie étamée du petit miroir, et viendront à l'œil selon NO. L'observateur verra ainsi deux images du même objet, l'une directe et vive, l'autre un peu affaiblie par la double réflexion.

Conformément aux lois de l'optique, l'angle de réflexion est égal à celui d'incidence. Pour que l'effet dont on vient de parler se produise, et qu'on voie coïncider deux images du même objet, il faut donc que la position des deux miroirs soit telle, que les angles ONF, INC soient égaux : et puisque d'ailleurs la direction KC est supposée parallèle à HO, il s'ensuit que IF est parallèle à LG; voilà pourquoi nous avons exigé que les miroirs fussent parallèles.

En effet, la somme des trois angles dont le sommet est en C, au-devant de LG, est égale à la somme des trois angles en N, au devant de FI, savoir à 180°. Retranchant de ces sommes égales les angles égaux KCN, CNO, il reste

$$KCL + NCG = CNI + ONF,$$

ou

$$2NCG = 2CNI, \quad NCG = CNI.$$

Donc LG est parallèle à FI. Ainsi, de ce qu'on voit deux images du même objet en coïncidence, on en doit conclure que les miroirs sont parallèles; et cette coïncidence est un moyen de vérifier le parallélisme.

495. Mais dès qu'on dérange l'alidade, comme le petit miroir FI est immobile, et que le grand tourne avec l'alidade, ces miroirs ne sont plus parallèles, et l'on n'aperçoit l'objet H qu'une seule fois. C'est un autre objet qui se réfléchit sur le grand miroir, puis sur le petit, pour se présenter en coïncidence avec H.

Soit, par ex., CD la position nouvelle que reçoit l'alidade, et lg celle du grand miroir, un objet S situé au loin, envoie le rayon SC qui se réfléchit sur le miroir lg selon la ligne CN, pourvu que l'angle $lCS = gCN$. Ce rayon, arrivé selon CN au petit miroir, se réfléchit, comme ci-devant, selon NO. En sorte qu'on voit, à travers la lunette, outre l'objet direct H, un autre objet S qui se présente en coïncidence, après deux réflexions. On trouve qu'en tournant l'alidade de la quantité angulaire mesurée par l'arc BD, l'objet S qui vient coïncider avec H est distant de celui-ci (ou plutôt de K, à cause de l'éloignement) de la valeur angulaire SCK. Or, cet angle SCK est toujours la moitié de l'angle BCD.

En effet, le rayon SC, réfléchi selon CN, fait l'angle $SCl = NCg$. Quand le miroir avait la position LG, et l'alidade celle CB, le rayon SC se réfléchissait près de la direction CB, et n'arrivant pas au petit miroir FI, ne pouvait pas être vu en O par réflexion. Mais quand l'alidade a tourné en lgD, les réflexions ont permis d'apercevoir S, si la déviation de LG en lg a été suffisante pour rendre l'angle $SCl = NCg$; car alors le rayon CN a dû se diriger à l'axe de la lunette selon NO, en faisant l'angle $CNI = ONF$. Or, on a

$$\text{angle } KCN = 180° - 2NCG = 180° - 2NCg - 2gCG,$$
$$\text{angle } SCN = 180° - 2SCl.$$

Retranchant, il vient

$$\text{angle } SCK = 2NCg + 2LCl - 2gCG = 2gCG.$$

Ainsi l'angle $SCK = 2BCD$, et a pour mesure le double de l'arc BD, dont l'alidade et le grand miroir ont tourné.

496. Concluons de là que *l'angle formé par deux lignes menées du centre* C *à deux objets très éloignés* K *et* S, *ou l'angle* SCK *est double de l'angle* BCD *qu'a décrit l'alidade depuis la position où les deux miroirs sont parallèles, c.-à-d. où l'objet direct* H *est vu double et en coïncidence avec lui-même, jusqu'à celle où il coïncide avec l'autre objet* S.

Voilà pourquoi, lorsqu'on a ainsi mis en coïncidence deux objets S et H, on lit leur distance angulaire sur l'arc CD en le doublant, ce qu'on fait en comptant les demi-degrés de cet arc pour des degrés, ainsi qu'on l'avait dit précédemment. Ce mode de numérotage dispense de doubler la graduation de cet arc.

497. Il est facile, d'après cela, de comprendre comment on mesure des angles avec le sextant (fig. 152), ou les arcs de distance entre les astres, par ex., la distance d'un bord du Soleil à un bord de la Lune. On amène le limbe dans le plan des deux objets; puis on regarde directement l'un des objets H par la partie non étamée du petit miroir; enfin on fait tourner l'alidade jusqu'à ce qu'on voie l'autre objet par réflexion en coïncidence avec le premier. Dans le cas des bords du Soleil et de la Lune, il faut que les disques paraissent se superposer ou se toucher extérieurement. En faisant balancer légèrement le sextant autour d'une ligne qui va de l'œil à l'objet direct H, on voit l'objet H se détacher, puis se confondre avec le premier.

Il arrive quelquefois que l'angle est à peu près connu d'avance; alors l'observation se fait en amenant d'abord l'alidade sur la graduation connue qui répond à cet arc; il ne reste plus qu'à faire prendre à l'alidade quelque petit mouvement, en visant l'objet direct H, pour amener l'autre objet S dans le champ de la lunette; puis de tourner la vis de rappel pour produire l'exacte coïncidence des deux objets. Mais lorsque la distance angulaire est totalement inconnue, voici comment on opère.

On met l'alidade sur le zéro, et l'on vise l'objet de droite S,

qu'on voit alors double : on tourne peu à peu l'alidade en dirigeant graduellement la vision directe à tous les objets situés vers la gauche ; mais en conservant toujours la vue de l'objet S par réflexion. Cette image réfléchie semble ainsi se promener de droite à gauche, et se superposer à tous les corps qui sont sur son passage, et qu'on voit directement à travers la partie non étamée du petit miroir. On continue ces mouvemens de l'alidade et du corps jusqu'à ce qu'on se trouve tourné en face de l'objet H, qu'on voit alors en même temps que S dans la lunette. On produit ensuite la coïncidence des deux objets, et il ne reste plus qu'à lire l'arc gradué.

Quelquefois on renverse le limbe dehaut en bas, les miroirs et la graduation étant en-dessous. Alors le mouvement de l'alidade promène au contraire l'image réfléchie de gauche à droite.

498. On mesure aussi la hauteur des astres en tenant le limbe vertical. On place devant soi un miroir parfaitement horizontal, qu'on appelle un *horizon artificiel;* et l'on se tourne de manière à y voir l'astre par réflexion. On amène en contact, avec le sextant, l'image de l'astre avec celle qui se peint sur cet horizon ; mais ce procédé ne pouvant être d'usage sur la mer, à cause de la mobilité du navire, nous ne nous arrêterons pas à démontrer que l'angle ainsi mesuré est double de celui qu'on cherche.

499. En mer, la distance qu'on observe au sextant est celle de l'astre avec la ligne où la limite de la mer se dessine au ciel. Par ex., on amène le bord de l'image réfléchie du Soleil à être tangent avec cette ligne vue directement à travers la partie non étamée du petit miroir. L'arc ainsi obtenu est, il est vrai, plus grand que la hauteur de l'astre, ou sa distance au plan horizontal du lieu d'observation. L'excès, qu'on appelle *dépression de l'horizon*, doit donc être ensuite retranché de l'arc mesuré. Nous avons enseigné (n° 266) à calculer cette dépression, dont on compose une table destinée à donner la quantité à soustraire, dépendant de l'élévation du pont du navire au-dessus du niveau de la mer.

500. Comme l'éclat du Soleil blesserait la vue, on affaiblit sa lumière par l'interposition de verres colorés. Le sextant (fig. 152) est muni, en P et Q, de plusieurs de ces verres sertis chacun dans un anneau de cuivre mobile autour d'une queue. En faisant tourner cet anneau, on amène les verres entre les deux miroirs, quand c'est l'image vue par double réflexion qu'on veut affaiblir, ou bien entre le petit miroir et l'objet direct, quand c'est l'éclat de celui-ci qu'on veut diminuer. On peut ainsi interposer un, deux ou trois verres colorés, selon les circonstances.

501. Nous avons dit que les miroirs devaient être exactement perpendiculaires au limbe : on s'assure aisément si cette condition est remplie. On place l'œil de manière à voir le limbe du sextant par réflexion dans le grand miroir : si celui-ci est en effet perpendiculaire, l'arc réfléchi fait exactement la continuation de l'arc qu'on aperçoit directement. Quand le grand miroir est oblique au limbe, ces deux arcs, l'un direct, l'autre réfléchi, ont une fracture apparente à leur jonction.

Et quant au petit miroir, on juge s'il est perpendiculaire au limbe, quand, l'alidade étant à zéro, on peut faire coïncider dans la lunette un objet avec sa propre image vue par double réflexion.

On a encore des *viseurs* en cuivre (fig. 155 et 156) : on les pose sur le limbe, et l'on fait en sorte que l'un cache à l'œil l'image de l'autre, vue par réflexion dans le miroir. Il faut que les arètes du viseur vu réfléchi, soient juste le prolongement de celles du viseur vu directement.

502. Des vis de rappel font légèrement basculer chaque miroir, et donnent le moyen de mouvoir le petit plateau circulaire qui les porte, et d'amener, par ce mouvement, les miroirs à la perpendicularité. Il y a aussi une vis qui fait pirouetter le petit miroir sur un axe vertical, afin de le rendre parallèle au grand miroir, quand l'alidade est sur zéro. Nous avons dit qu'on reconnaît cette circonstance quand les deux images d'un même objet sont en parfaite coïncidence.

Quand cette dernière condition n'est pas remplie, on peut la produire en faisant pirouetter un peu le miroir. Mais le plus souvent on s'en dispense, en prenant pour zéro de graduation, le point où il faut amener l'alidade pour que la coïncidence des deux images ait lieu. Alors il faut ajouter ou retrancher à tous les arcs qu'on lit sur le limbe la petite distance entre le zéro du limbe et le point qu'on doit prendre pour tel. C'est ce qu'on appelle *l'erreur de collimation* de l'instrument. On a soin de prolonger un peu les divisions de l'arc gradué en-deçà du zéro, afin de pouvoir mesurer la collimation quand elle est additive.

Supposons que la coïncidence des deux images d'un même objet ait lieu quand l'alidade est sur 25′ en-deçà du zéro : il faudra donc ajouter 25′ à tous les arcs d'observation qu'on lira sur le limbe, parce que le vrai zéro, origine des arcs, doit être porté à 25′ en arrière du zéro de la graduation.

503. Les surfaces opposées, tant des miroirs que des verres colorés qu'on interpose, doivent être exactement parallèles ; sans cela, les réfractions étant obliques, les rayons à leur sortie de chaque verre ne seraient pas parallèles à ceux d'incidence; et se trouvant ainsi détournés de leur direction, l'instrument serait défectueux. La précision du sextant dépend principalement de la juste disposition des pièces et de leur construction. L'alidade doit être exactement centrée sur le point qui est le centre de l'arc gradué du limbe.

Il faut en outre que l'axe optique de la lunette soit bien parallèle au limbe. Des vis de rappel qui tiennent à son canon, lui impriment les mouvemens propres à produire ce résultat. On peut aussi élever plus ou moins la lunette au-dessus du limbe, pour accroître ou diminuer le nombre des rayons de lumière qui y entrent, et modérer comme on veut l'éclat de la réflexion.

Cercle de réflexion.

504. On a réussi à attribuer au sextant les avantages du cercle répétiteur, en donnant au limbe l'étendue d'une circonférence entière, et ajustant les miroirs, l'alidade et la lunette ainsi que nous allons l'expliquer. (*Voy.* fig. 153 et 154.)

La circonférence entière est divisée en 720 parties égales, chacun de ces demi-degrés compte pour un degré, comme dans le cas du sextant, et les n^{os} de graduations sont conformes à cette condition. Deux règles OP et CB sont mobiles autour d'un axe C qui est exactement centré. On peut faire tourner chaque règle seule et indépendamment de l'autre, et leurs mouvemens ne se gênent pas mutuellement. Des vis de pression les arrêtent à volonté sur le limbe, et des vis de rappel leur impriment les petits mouvemens.

L'une BC de ces règles est l'alidade, et porte un vernier sur le bord de sa fenêtre. L'autre règle PO porte la lunette OO, qui a son réticule, comme celle du sextant; des vis servent aussi à mettre cette lunette parallèle au limbe, à l'en écarter, etc. Le manche E vissé par-dessous sert à tenir l'instrument à la main pour faire les observations.

Il y a deux miroirs LG et N, qui sont pourvus de vis propres à les rendre perpendiculaires au limbe, ce dont on s'assure comme on l'a dit n° 501. L'un de ces miroirs LG est fixé sur l'alidade, au-dessus du centre C de rotation, et se meut avec elle; c'est le grand miroir : l'autre N n'est étamé qu'à sa partie inférieure, et est arrêté vers le bout de la règle OP qui porte la lunette OO; il est mobile avec cette règle.

Il y a des verres colorés destinés à obscurcir les rayons solaires : les verres en H s'interposent dans le cours des rayons réfléchis; les autres en K se placent sur les rayons directs : on peut mettre à l'écart les uns et les autres, ou ne conserver que ceux qui sont dans le cours des rayons solaires, quand c'est le soleil qu'on observe. On peut mettre ces verres doubles,

ou triples, quand l'éclat est très vif. Les deux faces de chaque verre sont exactement parallèles. Ils sont d'ailleurs inutiles quand on observe les étoiles ou les objets terrestres.

Cette description succincte, rapprochée de celle du sextant, suffit pour faire concevoir la construction du cercle de réflexion, et comment les pièces doivent être ajustées pour jouer avec aisance. Il nous reste à expliquer l'usage de cet instrument.

505. Supposons qu'on ait fixé, par sa vis de pression, la règle de la lunette OO sur le limbe, dans une direction quelconque. En visant un objet éloigné dans la direction CX, on l'apercevra à travers la partie non étamée du miroir N; si l'on tourne l'alidade BC, jusqu'à ce que son miroir LG soit parallèle au petit miroir N, il suit de ce qui a été expliqué p. 426, que l'image du même objet X sera réfléchie deux fois, d'abord selon CN sur le grand miroir LG, puis selon NO sur le petit miroir. Ainsi l'on verra dans la lunette cette image double en parfaite coïncidence, du moins si les conditions prescrites pour une bonne construction sont remplies. Un léger balancement imprimé au limbe suffit pour s'assurer de cette coïncidence.

Maintenant, si l'on amène l'alidade dans une autre position, telle que BC, sans cesser de diriger la lunette sur l'objet X, qu'on voit par la partie non étamée du petit miroir, les deux miroirs n'étant plus parallèles, les objets M environnans enverront des rayons de lumière au grand miroir LG, qui les réfléchira, en faisant l'angle de réflexion égal à celui d'incidence. Un spectateur placé en M pourrait voir selon MC un de ces objets par réflexion. Or, parmi tous ces objets, il en est un Z dont les rayons se réfléchissent selon CN, et par conséquent aussi selon NO : cet objet Z est donc vu en coïncidence avec l'objet direct X. L'angle ZCX de distance de ces deux objets est le double de celui qu'a décrit l'alidade, à partir du point où les deux miroirs étaient parallèles. Si on lit les graduations des deux points d'arrêt de l'alidade, leur différence sera le nombre de degrés de l'angle de distance des deux signaux,

puisque les demi-degrés sont comptés pour des degrés entiers, sur le limbe.

On fixera d'abord l'alidade BC sur le zéro de la graduation, et l'on dirigera la règle OP, en la faisant tourner sur son axe, de manière que les deux miroirs soient parallèles, c.-à-d. qu'on voie en coïncidence les deux images d'un même objet éloigné. Détachant ensuite l'alidade BC, en laissant la règle OP fixée au limbe par sa vis de pression, on fera tourner cette alidade jusqu'à ce que l'image réfléchie d'un autre objet Z soit vue en coïncidence avec X. On lira sur le limbe l'arc correspondant, qui est la mesure de l'angle demandé ZCX, distance angulaire des deux signaux X et Z.

506. Jusqu'ici tout se passe comme avec le sextant. Mais on peut recommencer la même manœuvre en prenant pour zéro de départ le point où l'alidade BC vient d'être arrêtée par sa vis de pression, ce qui doublera l'angle. Détachez donc la règle OP, et tournez-la pour rendre les deux miroirs parallèles, ce que vous reconnaîtrez en voyant coïncider les deux images d'un même objet X. Fixez alors la règle OP, puis détachez l'alidade et faites-la tourner jusqu'à ce que l'image de Z vienne par réflexion coïncider avec X vu directement. L'arc du limbe sera la mesure de 2 fois l'angle ZCX. Une 3e opération de cette nature donnera le triple de cet angle, et ainsi de suite.

Supposons qu'on ait répété dix fois cette manœuvre, l'arc du limbe sera décuple de celui qu'on cherche : ainsi en divisant l'arc final par 10, on aura la mesure de l'angle ZCX, et les erreurs de pointé et de division du limbe seront affaiblies par cette répétition. Il est inutile de lire la graduation à chaque observation, puisqu'il suffit de connaître l'arc final, et quel multiple il est de celui qu'on demande. Cependant pour éviter les erreurs, il est bon de lire et noter la graduation après la 1re observation.

507. Il est assez difficile d'amener en coïncidence les deux images, soit d'un même objet, soit de deux signaux différens : c'est ici comme pour le sextant, où l'on n'amène pas, sans

quelque peine, les objets dans le champ de la lunette. Mais pour le cercle de réflexion l'embarras n'existe que pour la 1re observation, car on connaît alors l'arc à fort peu près; on en forme les multiples par 2, 3, 4..., puis on porte successivement l'alidade sur les arcs ainsi déterminés, ce qui permet de suite d'en apercevoir les deux images dans la lunette. Un petit mouvement de la vis de rappel suffit pour amener juste la coïncidence.

Au reste, on a pourvu l'instrument d'un appareil très simple qui abrége beaucoup les recherches. On fixe à la règle OP une portion d'anneau VFH mince et concentrique au limbe, muni de deux petits curseurs D et F, qui se fixent à volonté sur l'anneau par une vis de pression : ces curseurs sont l'un d'un côté de l'alidade, l'autre du côté opposé; en voici l'usage.

On met d'abord l'alidade sur zéro, et l'on en approche le curseur N de manière presque à buter sur son bras : puis on tourne la règle OP afin de rendre les deux miroirs parallèles, ainsi qu'il a été dit. Alors on fixe la règle OP, et l'on détache l'alidade en la faisant tourner jusqu'à ce qu'on voie la coïncidence des deux images : enfin on approche le 2e curseur D contre le bras de l'alidade, qui, dans cette position, a été éloignée du 1er curseur N. Jusqu'ici on n'a rien gagné, en facilité d'opérer; on a manœuvré comme précédemment. Mais si détachant la règle OP, on la fait tourner, elle emportera l'anneau et ses curseurs avec elle, et l'on amenera ainsi le curseur N tout contre l'alidade, en même temps que le curseur D s'en sera éloigné. Les deux miroirs seront alors à fort peu près parallèles, et il sera bien aisé de produire le parallélisme parfait, en tournant la vis de rappel de la règle PO. Détachant ensuite l'alidade, on l'amenera presque au contact avec le curseur D, et elle sera très près du point où les deux objets sont vus en coïncidence : et ainsi de toutes les répétitions. Les coïncidences s'obtiennent de la sorte sans recherches, ni difficultés.

Détermination de l'heure à bord.

508. Le premier besoin de l'officier de marine est d'avoir l'heure du lieu, puisque toutes les recherches astronomiques qu'il doit faire supposent cet élément connu. Si la marche du chronomètre était parfaitement régulière, on y trouverait d'abord l'heure de Paris, et à l'aide de la longitude du lieu, on en conclurait l'heure sous le méridien où l'on est. Mais cette longitude est rarement bien connue, et l'*estime* n'a jamais assez de précision pour y pouvoir compter : d'ailleurs la longitude résulte elle-même d'opérations qui supposent qu'on a l'heure du lieu.

509. On obtient l'heure par des observations de la hauteur du Soleil à l'aide de la méthode exposée p. 352. Il est bien rare qu'on puisse se servir des étoiles, parce que, la nuit, l'horizon de la mer n'est pas visible. Du reste, il est plus commode de se servir de la hauteur h du Soleil, que des distances zénithales employées dans l'éq. citée. En désignant la latitude du lieu par l, cette même formule devient

$$\sin^2 \frac{1}{2} p = \frac{\cos m . \sin (m - h)}{\cos l \sin d},$$

en faisant $\qquad 2m = l + d + h.$

Bien entendu que pour tirer de la *Conn. des Tems* la distance polaire d, complément de la déclin. de l'astre, il faut d'abord connaître l'heure contemporaine de Paris; mais comme la déclin. varie lentement, il suffit d'avoir cette heure à peu près, et le chronomètre la donne (*voy.* p. 355).

510. En outre, comme on mesure la distance du Soleil à l'horizon de la mer, pour en conclure la hauteur h, il faut corriger cette distance 1°. de la *dépression de l'horizon* (p. 250) ; 2°. de la *réfraction — parallaxe ;* 3°. et même du demi-diamètre de l'astre, si l'on a mesuré la hauteur du bord supérieur ou inférieur, parce que c'est celle du centre qui est nécessaire.

Il faut aussi avoir égard à l'*erreur de collimation* du sextant, s'il y a lieu (p. 431).

511. Par ex., le 13 octobre 1836, à 5h du soir environ, étant par 25°40′ de latitude N. et 7h55′ longit. O., on a trouvé que le bord inférieur du Soleil était à 10°1′30″ de hauteur apparente. Le chronomètre marquait alors 6h43′44″ : l'œil était élevé au-dessus de la mer de 34pi (11m,05) : quelle est l'heure actuelle?

heure approchée......	5h 0′	t. vr.	hauteur observée......	10°1′30″
longit. en temps.........	7.55		dépression..............	— 5.54
heure de Paris.........	12.55	t. vr.	réfr.—parall..........	— 5.14
déclin. ⊙ =	8°5′56″A		hauteur..............	9.50.22
dist. pol. d =	98.5.56		demi-diam. ⊙	16.5
			haut. du centre h =	10. 6.27

h =	10° 6′ 27″		
l =	25.40. 0...... cos ...	—$\bar{1}$.9548834	
d =	98. 5.56...... sin ...	—$\bar{1}$.9956468	
$2m$ =	133.52.23	—$\bar{1}$.9505302	
m =	66.56.12 .... cos ...	$\bar{1}$.5930072	
$m - h$ =	56.49.45 .... sin ...	$\bar{1}$.9227477	
		$\bar{1}$.5652247	
moitié..............	sin ...	$\bar{1}$.7826123......	37°18′53″,5 (8 fois)
heure vraie du lieu..................			4h58′31″,1
temps moyen à midi vrai..................			11.46. 8,1
heure moyenne du lieu..................			4.44.39,2
heure du chronomètre..................			6.43.44,0
avance sur le temps moyen..................			1.59. 4,8

512. Observez qu'on est parti de la supposition qu'il était 5h de temps vrai quand l'observation a été faite : comme il n'était que 4h58′,5, on pourrait, dans quelques cas, trouver une différence plus grande, ce qui ferait craindre qu'en négligeant la variation en déclin. dans cette durée, le résultat ne fût atteint d'un peu d'inexactitude. Pour éviter ce genre d'erreur, on recommencera le calcul, en partant du résultat obtenu, comme

hypothèse, ce qui n'exigera que la correction des derniers chiffres des logarithmes.

On a supposé ici que la latitude du lieu était connue : si l'on ne l'avait qu'à peu près, le résultat pourrait encore être un peu inexact. Il en est de même de la supposition faite pour la longitude. Nous reviendrons plus tard sur ce sujet.

513. On se sert quelquefois, en mer, pour trouver l'heure, de la *méthode des hauteurs correspondantes*, par des observations du Soleil faites matin et soir (*voy.* p. 357) : mais outre que la correction de déclin. solaire rend le calcul un peu long, il faut que le navire n'ait pas changé de place dans l'intervalle, circonstance qui arrive rarement. Quand on n'a pas égard à ce déplacement, le résultat du calcul n'offre qu'une approximation douteuse.

514. On peut aussi se servir de l'observation du lever ou du coucher du Soleil, dont nous avons appris à calculer l'heure précise ; car le problème consiste à trouver l'angle horaire de l'astre quand son centre paraît dans l'horizon. Or, alors sa distance zénithale z, en ayant égard à la réfraction moins la parallaxe, est $z = 90°33'36'',2$, ainsi qu'on l'a vu p. 387. Il ne s'agit donc que de résoudre le triangle sphérique pzs (fig. 148), où l'on connaît les trois côtés z, d et c, c.-à-d. que d'appliquer l'éq. (9), p. 352 à cette valeur de z ; ensuite on convertit l'angle horaire p, en temps, pour avoir l'heure vraie du phénomène. Il faut que la latitude du lieu soit connue.

Mais l'incertitude des réfractions à l'horizon, et celle même des observations en mer, déterminent à ne pas tenir compte de la réfraction, ni de la parallaxe, dans la formule. Les marins supposent que le centre du Soleil est dans l'horizon quand les deux tiers du disque sont élevés au-dessus de la mer. Alors on doit résoudre un triangle sphérique rectangle npz (fig. 148). Le pôle est en p, le zénith en z, l'horizon nsa, le méridien pzn : le Soleil est en s, et comme l'angle n est droit, on trouve les éq.

$$\cos p = -\tang l \tang D,$$
$$\sin D = -\cos l \sin x,$$
$$\cot x = \sin l \tang p.$$

p est l'angle horaire au lever ou au coucher, qu'on appelle l'*arc semi-diurne ;* il est donné par la 1re éq., quand on a la latitude l du lieu et la déclin. de l'astre. L'une des deux autres fait connaître l'arc x ou as, complément de l'azimut ns, parce que a est le point d'orient ou d'occident, à 90° de n. Ces éq. servent à trouver la déclin. de l'aimant.

Quant à la déclin. D, pour la connaître il faudrait savoir quelle est l'heure de Paris à l'instant du phénomène : mais un à peu près suffit à cet égard, parce que la déclin. varie lentement. Au reste, on peut rectifier ensuite le premier calcul en le recommençant avec l'heure qu'il a donnée.

Quelle est l'heure du lever du Soleil le 10 août 1836, à Paris ? En prenant la déclin. de l'astre à 5^h^ du matin, D = 15°36'3", d'où

tang l..........	0.0583460 —	....		0.0583460 —
tang D..........	$\bar{1}$.4459476	D = 15°36'15"	.....	$\bar{1}$.4460451
cos p..........	$\bar{1}$.5042936 —		cos p....	$\bar{1}$.5043911 —
p =	108°37'30"		p =	108°37'45"
=	7^h^14'30"		=	7^h^14'31"
compl. à 12^h^.....	4.45.30	h. vr.	compl........	4.45.29
heure du lever.	1re approximation.			Heure demandée.

Le calcul donne l'angle horaire p, qui, réduit en temps, est l'heure vraie du lever, ou plutôt son complément à 12^h^. Mais les données de départ ne se trouvant pas d'accord avec cette heure, il faut refaire le calcul en se servant de cette dernière.

Étant donnée l'heure vraie, trouver la hauteur du Soleil. Ce problème a été résolu n° 408, p. 355.

515. Tout ce qui vient d'être dit du Soleil pour donner l'heure se rapporte aussi bien aux étoiles et à la Lune, ainsi qu'on l'a dit p. 352. Mais d'une part, il est rare qu'on puisse voir à la fois, en mer, la limite de l'horizon et la lumière des étoiles, ce qui empêche d'en mesurer la hauteur ; et d'un au-

tre côté, la grande variabilité de la marche de la Lune, exige des interpolations longues pour en trouver la déclin., l'asc. dr., etc., ce qui rend les calculs pénibles. Les marins évitent donc de recourir à cet astre pour obtenir l'heure.

De la latitude du lieu.

516. On observe la hauteur du Soleil m au méridien pm (fig. 131); cette hauteur, corrigée de *réfraction — parallaxe*, donne la hauteur vraie h, qui, introduite dans l'éq. (1), p. 361, donne enfin la latitude l,

$$l = 90^\circ + D - h.$$

La déclin. D du Soleil est tirée de la *Conn. des Tems*, à l'aide de l'heure de Paris contemporaine à celle du lieu, et cette heure est censée à très peu près connue par la longitude, ou par des observations antérieures. D est négatif pour les déclin. australes.

517. On se sert aussi de la méthode des *hauteurs circumméridiennes* du Soleil, qu'on a donnée p. 364; on se contente du 1[er] terme de la série, c.-à-d. de l'éq. (B).

518. Mais comme on est souvent exposé à avoir le ciel nébuleux, on en est réduit quelquefois à se servir du procédé suivant, qui n'a pas toute l'exactitude désirable; mais qui rend cependant de grands services aux marins.

Trouver la latitude par une hauteur absolue du Soleil? Dans le triangle pqz (fig. 129), formé par le zénith z, le pôle p et l'astre q, on connaît deux côtés et un angle, $pq = 90^\circ - D$, $zq = 90^\circ - h$, et l'angle horaire p, parce qu'on suppose ici que l'heure vraie de l'observation de h est connue. On en tire (éq. p. 77)

$$\tang \varphi = \cos p \cot D,$$

$$\sin (l + \varphi) = \frac{\sin h \cos \varphi}{\sin D}.$$

La 1[re] éq. fait connaître l'arc auxiliaire φ, qui, introduit dans la 2[e], avec le signe que lui attribue le calcul, donne l'arc $l+\varphi$; retranchant φ, on a enfin la latitude l. On prend D négatif quand la déclin. du Soleil est australe.

Il y a deux solutions quand $p < 90°$ et $h > D$, abstraction faite du signe : il n'y en a qu'une seule quand $h < D$, et aucune si $p > 90°$ avec $h > D$.

Ce procédé n'est exact qu'autant qu'on a l'heure avec précision. Il est bon d'observer l'astre près du méridien, parce qu'alors une petite erreur sur l'heure influe moins sur la valeur de l.

Le 6 octobre 1836, on a observé, près de Paris, le Soleil à $1^h 26' 6'',6$ t. moy., ce qui équivaut à $1^h 14' 11'',6$ t. vrai, et toutes corrections faites, on a trouvé que la hauteur vraie du Soleil est $h = 33°40'35'',5$. On a $D = -5°15'28''$, $p = 18°32'54''$.

cot D..........	$1.0360990-$	sin D..........	$-\bar{2}.9620699-$
cos p..........	$\bar{1}.9768339$	sin h..........	$\bar{1}.7439043$
tang φ..........	$1.0129329-$	cos φ..........	$\bar{2}.9850314+$
$\varphi =$	$95°32'38'',8$	sin $(l+\varphi)$...	$\bar{1}.7668658+$
$l+\varphi =$	$144.13.28,6$		
$l =$	$48.40.49,8.$		

Il y a deux arcs qui ont le même sinus, et qui sont les valeurs de $l+\varphi$; on prend celui qui est $> 180°$, pour pouvoir retrancher φ qui est $> 90°$, attendu que sa tangente a le signe $-$.

519. *Méthode de Douwes pour trouver à la fois l'heure et la latitude,* ou du moins la latitude, sans connaître l'heure.

Les marins connaissent toujours la latitude approchée du lieu où ils se trouvent, et ils n'ont besoin que de la corriger, sans connaître l'heure exactement. La méthode de Douwes n'a pas une grande précision; mais elle suffit aux besoins de la navigation, et n'exige que des calculs faciles, qu'on évite même en se servant de tables construites sur les formules que nous allons exposer. On ne se sert de ce procédé qu'à défaut d'autre plus exact, lorsque l'heure est inconnue. On a bien, il est

vrai, des formules qui donnent exactement l'heure et la latitude à la fois; mais ces éq., qui résultent de la résolution de plusieurs triangles sphériques, sont assez compliquées, et l'on est exposé à des erreurs de calcul, surtout en considérant que le jeu des signes des lignes trigonométriques jette beaucoup d'embarras dans les opérations. Au reste, nous traiterons ce sujet plus loin.

On mesure deux hauteurs du Soleil, et on les corrige de la *réfraction — parallaxe* pour avoir les hauteurs vraies h et h'. Il est bon que l'une soit près du méridien, l'autre près du premier vertical (5 à 7 heures avant ou après le passage). On prend pour déclin. constante D de l'astre, celle qu'il avait au milieu de la durée écoulée. Soient p et p' les deux angles horaires inconnus correspondans à h et h' : prenons pour valeurs de h' et p' celles dont l'observation a été voisine du méridien, h et p seront relatifs au cas où l'astre en était éloigné; le temps vrai t écoulé de l'une à l'autre est connu. L'éq. 15, p. 74, s'applique aux deux triangles pzs, pzs' (fig. 144), s et s' étant les deux places occupées par le Soleil, p le pôle, z le zénith, pzm le méridien; et l'on a

$$\sin h = \cos(l - \mathrm{D}) - 2\cos l \cos \mathrm{D} \sin^2 \tfrac{1}{2} p,$$
$$\sin h' = \cos(l - \mathrm{D}) - 2\cos l \cos \mathrm{D} \sin^2 \tfrac{1}{2} p';$$

différ. $\sin h' - \sin h = 2\cos l \cos \mathrm{D} (\sin^2 \tfrac{1}{2} p - \sin^2 \tfrac{1}{2} p')$.

Or, posons $y = \tfrac{1}{2}(p + p')$,
$t = \tfrac{1}{2}(p - p') =$ *demi-temps vrai écoulé;*

l'éq. (13), p. 35, donne

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} p - \sin^2 \tfrac{1}{2} p' = \sin y \sin t.$$

En faisant $\mathrm{N} = 2\cos l \cos \mathrm{D}$. . . . . (1)

il vient $\sin y = \dfrac{\sin h' - \sin h}{\mathrm{N} \sin t}$, ... (2)

donc $p' = y - t$. . . . . (3)

$\cos(l - \mathrm{D}) = \sin h' + \mathrm{N} \sin^2 \tfrac{1}{2} p'$. . . . . . . (4)

Ces éq. font successivement connaître N, y, p' et $l-D$, d'où l'on tire l, en ajoutant D. La déclin. prend le signe — quand elle est australe.

Lorsque les observations sont faites des deux côtés du méridien, p' devient négatif par rapport à p, auquel on conserve le signe $+$, et l'on a $t > y$; mais $\sin^2 \frac{1}{2} p'$ reste positif : le calcul est le même. Quant à l'heure actuelle, on ne pourrait la tirer avec précision de la valeur de p', ni de celle de p, qui résultent de celles de y et t. Mais on peut, lorsque la latitude l a été corrigée, se servir de la moindre hauteur h, pour obtenir l'angle horaire p, par la méthode des hauteurs absolues, p. 436.

Comme on a pris pour faire le calcul une valeur approchée pour la latitude l, et que ces formules n'ont pour objet que de la rectifier, lorsque le résultat diffère notablement de la valeur supposée, il faut répéter le calcul, en prenant pour élément l'arc l qu'on vient de trouver, ce qui n'exige qu'une simple correction aux derniers chiffres des log.

Le 7 mars 1836, près de Paris, on suppose $l = 48°40'$, et l'on prend deux hauteurs du Soleil, l'une le matin, l'autre après midi, qui sont, toutes corrections faites :

$h' = 33°43'46'',1$	$\sin h' = 0,5552724$	h........ 13h 2' 17",8 t. m.
$h = 8.37.41,8$	$\sin h = 0,1500233$	h.......... 7 5.49,0
log = $\bar{1}.6077220$	diff. = 0,4052491	2t = 5.56.58,8
	2.... 0.3010300	t = 2.58.29,4
$\bar{1}.6077220$	cos l.... $\bar{1}.8198325$	= 44°37'21",0
sin t — $\bar{1}.8466046$	cos D... $\bar{1}.9982240$	
N...—0.1190865	N...... 0.1190865	On calcule la décl. ☉ à 10h 4' 18" t. moy., du matin, et l'on a
sin y. $\bar{1}.6420309$		D = — 5.10.41,3
y = 26° 0' 43",8		
t = 44.37.21,0		
p' = —18.36.37,2	N....... 0.1190865	
$\frac{1}{2}$ = — 9.18.18,6...	sin² ..... $\bar{2}.4173016$	sin h' = 0,5552724
D = — 5.10.41,3	$\bar{2}.5363881$.............	0,0343865
l—D = 53.52. 2,0	log = $\bar{1}.7706069$...cos(l—D) =	0,5896589
l = 48.41.20,7		

Ainsi le nombre supposé pour l est trop faible de $2'21''$, et il faudra corriger le calcul en prenant ce résultat pour hypothèse.

520. La méthode de Douwes n'est qu'approchée, et la précision n'en est pas toujours satisfaisante. La Trigonométrie sphérique donne des formules plus exactes, et qui ne sont guère plus compliquées.

Dans la figure 144, s et s' sont deux positions du Soleil, dont l'observation a fait connaître les dist. zénith. vraies $sz = z$, $s'z = z'$, corrigées de réfraction — parallaxe, demi-diamètre, etc. Le pôle étant en p, le méridien est pm, et l'on connaît en outre les distances polaires $sp = s'p = d$, complément de la déclin. Nous supposons ici que d est constant, ou plutôt nous prenons pour d la déclin. qui a lieu dans l'instant du milieu entre les deux observations. Il est clair que si l'on connaissait l'angle $zsp = u$, on aurait deux côtés sz, sp du triangle zsp et l'angle compris u, et qu'on pourrait calculer le côté $zp = c$, colatitude du lieu, ainsi que l'angle horaire $spz = p$, et le problème serait résolu.

Or, pour trouver cet angle u, il faut d'abord chercher les deux angles $s'sp = \psi$ et $s'sz = x$, dont u est la différence, ce qui conduit à résoudre les deux triangles $ss'p$ et $ss'z$; on a donc trois triangles sphériques à résoudre successivement. Voici comment on ordonne ces calculs.

D'abord l'angle $sps' = t$ est connu, puisqu'il est, en degrés, le temps solaire vrai écoulé entre les deux observations de hauteur, différence ou somme des deux angles horaires correspondans, selon que l'astre a été observé d'un même côté ou des deux côtés du méridien. Si la montre marche comme le temps moyen, il sera bien facile de réduire en degrés la durée écoulée; ce sera l'angle t.

1°. Dans le triangle isoscèle sps', on connaît deux côtés égaux $sp = s'p = d$, et l'angle compris t; on trouvera le 3° côté $ss' = \delta$, et l'angle $s'sp = \psi$, par les équations (m et p, p. 80).

$$\sin \tfrac{1}{2}\delta = \sin d.\sin \tfrac{1}{2} t, \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

$$\cot \psi = \cos d.\tan g \tfrac{1}{2} t. \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

2°. On connaît maintenant les trois côtés du triangle szs', savoir $sz = z$, $s'z = z'$ et $ss' = \delta$: on trouve l'angle $s'sz = x$ par les éq. (16, p. 74)

$$2k = z + z' + \delta,$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} x = \frac{\sin(k-z).\sin(k-\delta)}{\sin z.\sin \delta}, \ldots \ldots \quad (c)$$

d'où $$u = \psi \mp x,$$

en faisant l'angle $zsp = u$. Nous mettons ici $\mp$, parce que le double signe résulte de l'extraction de racine qui a donné l'arc x; mais on doit observer que c'est presque toujours le signe — qu'il faut prendre, parce que le cas représenté par la figure 144 est seul admissible, à moins que la déclin. du Soleil et la latitude ne soient à peu près égales : car alors il faudrait calculer les deux solutions, sauf à choisir ensuite entre elles. Comme la latitude est toujours à peu près connue d'avance, l'incertitude est bientôt dissipée. Au reste, s'il arrive que l'on reste dans le doute, il suffira de mesurer une 3° hauteur de l'astre, et l'on fera de nouveau le calcul de la latitude, en comparant cette observation à l'une des deux premières, et l'on s'arrêtera à celle des deux solutions qui sera commune aux deux opérations. Il est d'ailleurs rare qu'on soit réduit à user de ce procédé.

3°. Enfin dans le triangle zps, on connaît deux côtés et l'angle compris, savoir $sz = z$, $sp = d$ et l'angle u qu'on vient de trouver. On pourra donc calculer le côté $pz = c$, colatitude cherchée, et l'angle horaire $spz = p$ de l'observation de l'astre quand il était en s. On pourra recourir aux formules données, p. 77, 1°, ou 79, 4°. Mais les éq. que nous allons proposer sont d'un usage plus commode.

Si l'on connaît les côtés b et c du triangle ABC (fig. 52), et l'angle compris A, pour trouver le 3° côté a, on prendra l'éq.

fondamentale

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et on la rendra propre au calcul des log. par l'artifice suivant. D'après les éq. (5) et (6), p. 35, on a $\cos A = 2\cos^2 \frac{1}{2} A - 1$, $\cos a = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} a$; ainsi

$$\begin{aligned} 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} a &= \cos(b+c) + 2\sin b \sin c . \cos^2 \tfrac{1}{2} A \\ &= 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}(b+c) + 2\sin b \sin c . \cos^2 \tfrac{1}{2} A, \\ \sin^2 \tfrac{1}{2} a &= \sin^2 \tfrac{1}{2}(b+c) - \sin b \sin c \cos^2 \tfrac{1}{2} A. \end{aligned}$$

Prenons un arc auxiliaire v, tel que

$$\sin v = \cos \tfrac{1}{2} A . \sqrt{\sin b . \sin c},$$

et nous aurons

$$\begin{aligned} \sin^2 \tfrac{1}{2} a &= \sin^2 \tfrac{1}{2}(b+c) - \sin^2 v \\ &= \sin \tfrac{1}{2}(b+c+2v) . \sin \tfrac{1}{2}(b+c-2v), \end{aligned}$$

d'après l'éq. (13), p. 35.

En appliquant ces formules à la figure 144, on a

$$\sin v = \cos \tfrac{1}{2} u . \sqrt{\sin d . \sin z}, \ldots\ldots \quad (d)$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin \tfrac{1}{2}(d + z + 2v) . \sin \tfrac{1}{2}(d + z - 2v), \quad (e)$$

$$\sin p = \frac{\sin z . \sin u}{\sin c} \ldots\ldots\ldots \quad (f)$$

Cette dernière équ. est donnée par la règle des quatre sinus (p. 68).

La théorie qu'on vient de présenter exige l'emploi de 19 log. et l'addition de plusieurs arcs; elle est beaucoup plus longue que celle de Douwes, mais elle a plus d'exactitude. On peut vérifier les calculs, en y remplaçant partout z par z'; alors u désigne l'angle $zs's$, et u l'angle $zs'p$: c'est le triangle $zs'p$ qu'on résout par les éq. (d), (e), (f), et l'on obtient de nouveau c; on a en outre l'angle horaire $p' = zps'$, propre à l'observation de l'astre en s'.

Appliquons ces éq. au cas, où, par 42° de latitude nord es-

timée, et $1^h10'$ longitude ouest, le 22 mai 1836, avant midi, on aurait mesuré deux hauteurs du bord inférieur du Soleil, le navire étant élevé de 7 mètres au-dessus de la mer. Le chronomètre marquait

$6^h25'17''$	1re haut. obser.	$35°25'52''$	$z = 54°24'6''$
9. 9.53	2e.............	63. 1.57	$z' = 26.47.44$
7.47.35	heure du milieu, ou $19^h47'35''$ le 21 mai		
2.44.36 = t,	$20°34'30''$ demi-temps en degrés.		

Nous supposons ici que z et z' ont été corrigés de la réfraction, de la parallaxe, du demi-diamètre et de la dépression. On présume que la montre retarde de $1^h30'$ sur le temps moyen du lieu; en ayant égard à la longitude, on trouve que l'heure de Paris, correspondante au milieu des observations, est $22^h27'35''$, t. moy., et l'on en déduit la déclin. $\odot = 20°26'16''$ et $d = 69°33'44''$.

Calcul de l'éq. (a).		*Calcul de l'éq.* (b).		*Calcul de l'éq.* (d).	
sin d...	$\bar{1}.9717637$	cos d	$\bar{1}.5430618$	sin d......	$\bar{1}.9717637$
sin $\frac{1}{2}t$...	$\bar{1}.5458428$	tang $\frac{1}{2}t$....	$\bar{1}.5744681$	sin z.....	$\bar{1}.9101534$
sin.....	$\bar{1}.5176065$	cot ψ......	$\bar{1}.1175299$		$\bar{1}.8819171$
	19.14.37			moitié....	$\bar{1}.9409585$
δ =	38.29.14	ψ =	82.31.56,5	cos $\frac{1}{2}u$....	$\bar{1}.9531668$
		ν =	51.35.47,5	sin ν.....	$\bar{1}.8941253$

Calcul de l'éq. (c).				*Calcul de l'éq.* (e).	
z' =	26.47.44				
z =	54.24. 6	sin......	$\bar{1}.9101534$	$2\nu = \pm$	103.11.35
δ =	38.29.14	sin......	$\bar{1}.7940278$	d =	69.33.44
$2k$ =	119.41. 4		$-\bar{1}.7041812$	z =	54.24. 6
k =	59.50.32			somme =	227. 9.25
$k - z$ =	5.26.26		$\bar{2}.9768678$	moitié =	113.34.42
$k - \delta$ =	21.21.18	sin.....	$\bar{1}.5612749$	differ. =	20.46.15
		sin²....	$\bar{2}.8339615$		10.23. 7
	15. 7.59,5....	sin	$\bar{1}.4169807$	sin	$\bar{1}.9621391$
x =	30.15.59			sin	$\bar{1}.2559148$
ψ =	82.31.56,5			sin².......	$\bar{1}.2180539$
u =	52.15.57,5	moitié =	$26°7'59''$	sin........	$\bar{1}.6090269$

$l = 42.2.1$ ...... $e = 47.57.59$ .... $\frac{1}{2}e = 23°58'59'',5$

Calcul de l'éq. (f).

sin z	$\bar{1}.9101534$			
sin u	$\bar{1}.8980997$			
sin c ...	$-\bar{1}.8708439$			
sin p	$\bar{1}.9374092$	$p = 59^\circ 58' 20''$	=	$3^h 59' 53''$
	1re observ. heure vraie du lieu		=	8. 0. 7
	éq. du temps à $21^h 10'$ de Paris		=	11.56.20
	heure moyenne du lieu		=	7.56.27
	chronomètre marque		=	6.25.17
	retard sur le temps moyen du lieu ...		=	1.31.10

Lorsque l'heure qu'on avait d'abord supposée se trouve notablement différente de celle que le calcul donne, comme la déclin. du Soleil à l'instant du milieu peut en être altérée, il faut corriger les données, et refaire le calcul en partant de cette nouvelle supposition.

La méthode que nous venons d'exposer serait exacte, si l'on avait observé une étoile à deux instans de son cours diurne; mais comme la déclin. du Soleil varie beaucoup, surtout vers les équinoxes, la latitude qu'on trouve est affectée de la supposition que cette déclin. demeure constante. C'est surtout pour les observations de la Lune que cette remarque est importante. Si l'on veut donner à ce procédé toute la précision désirable, on ne doit donc pas considérer le triangle $ss'p$ comme isoscèle. En nommant d et d' les deux distances polaires, on résout ce triangle par la méthode que nous avons donnée ci-dessus, et l'on doit remplacer les éq. (a) et (b) par

$$\sin\varphi = \cos\tfrac{1}{2}t\sqrt{\sin d . \sin d'},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\delta = \sin\tfrac{1}{2}(d + d' + 2\varphi) . \sin\tfrac{1}{2}(d + d' - 2\varphi),$$

$$\sin\psi = \frac{\sin t . \sin d'}{\sin\delta};$$

une fois qu'on a δ et ψ, le reste de l'opération est le même que ci-devant.

On peut même observer les hauteurs de deux étoiles diffé-

rentes, dont d et d' sont les distances polaires; en faisant

$$t = \textit{différ. des asc. dr.} \pm \textit{temps écoulé},$$

les éq. précédentes sont applicables. On prend le signe + quand l'astre observé le premier est le plus oriental, celui dont l'asc. dr. est la plus grande, et — dans l'autre cas. Nous n'insisterons pas sur cette théorie, dont on trouvera une application dans notre *Astronomie pratique*, p. 226; les marins font rarement usage des observations de ce genre, parce qu'ils ne peuvent voir avec netteté les étoiles en même temps que l'horizon de la mer, et que leurs observations sont incertaines. Au reste, nos dernières éq. étant de même forme que les éq. (d), (e), (f), l'application ne peut offrir de difficulté. Nous n'avons pas parlé de cette méthode d'obtenir la latitude dans la Géomorphie astronomique, parce qu'on en a d'autres plus précises, lorsqu'on réside dans un observatoire stable; ce n'est qu'en mer que ce procédé peut avoir de l'utilité.

521. On rencontre une difficulté dans l'application des méthodes précédentes. Comme le vaisseau n'est pas stationnaire dans la durée t qui sépare les deux observations, les hauteurs h et h' ne sont pas mesurées au-dessus du même horizon. Ainsi, avant d'appliquer les formules, il faut ramener l'une des hauteurs à l'horizon de l'autre, par ex. chercher ce qu'eût été la petite hauteur au même instant, si elle eût été immédiatement mesurée sur l'horizon de la grande (celle qui est la plus voisine du méridien). (*Voy*. fig. 145.)

Ainsi l'astre est en S, le zénith en z, sz est le compl. de h: quand le Soleil est arrivé en I, le zénith s'est trouvé en T, et l'on veut avoir la hauteur que l'astre avait en S, mesurée sur ce nouvel horizon. Ainsi, l'on cherche la distance zénithale TS. Soient $Sz = 90° - h$, $ST = 90° - H$; on connaît h, et l'on demande H, la direction de la route et sa longueur étant donnés.

Le triangle STz fort étroit est précisément de même espèce que celui qu'on a considéré n° 217, où l'éq. (A) p. 206 ex-

prime la différ. des deux côtés presque égaux Sz, ST. Il suffit donc d'y remplacer l et l' par h et H; nous bornerons la série à son 1er terme, qui a une précision suffisante :

$$H = h + a \cos \varphi, \quad \varphi = A - A';$$

A et A' sont les azimuts de l'astre et de la route, comptés du sud en allant vers le nord, ou réciproquement. On prend A avec le signe —, quand le méridien passe dans l'angle $\varphi = \text{IzS}$ = angle de la route avec le vertical du Soleil; a est le chemin parcouru exprimé en milles ou minutes; le terme $a \cos \varphi$ est, en minutes, la correction de h.

Un navire suivait l'azimut...........	$A' = 28°47'30''0$
La hauteur h a été prise l'azimut étant..	$A = 56.55.\ 0$
et cette hauteur corrigée était $h = 52°55'$	$\varphi = 28.\ 7.30$
le vaisseau faisait 8,1 milles à l'heure;	$\cos \varphi\ \bar{1}.94543$
en $2^h24'$ il a décrit 19',4 milles........	19',4.. 1.28780
on demande quelle était la hauteur H	17',11.1.23323

du Soleil sur le premier horizon. Comme il y a 17',11 de variation en hauteur, on trouve H = 52°37'53", valeur qu'il faut adopter pour h dans les éq. p. 442 et 445.

Si la petite hauteur h a été observée la 1re (le matin) la réduction $a \cos \varphi$ doit être ajoutée à h, quand l'arc $\varphi < 90°$, et retranchée de h dans le cas contraire. Mais on opérera en sens opposé, lorsque la petite hauteur aura été prise le soir.

De la longitude du lieu.

522. *Par les éclipses des satellites de Jupiter.* Il est rare qu'on puisse faire usage de ces éclipses en mer, parce qu'il faut se servir d'une lunette d'environ 4 pieds de distance focale, et que les mouvemens du navire ne permettent pas de la diriger avec assez de stabilité pour permettre l'observation. Au reste, voici le calcul, qui est très facile.

L'heure de Paris à laquelle ces éclipses arrivent est prédite

dans la *Conn. des Tems* : la place de chaque satellite et le sens de sa marche y est indiquée par des *configurations*, afin de porter l'attention sur celui qui doit s'éclipser, ou reparaître après l'éclipse. On dirige la lunette quelque temps avant l'heure où l'on présume que l'éclipse doit arriver ; on a déjà obtenu l'heure du bord par d'autres observations. On note l'heure où le phénomène a eu lieu. Comparant cette heure à celle de Paris qui est indiquée dans la *Conn. des Tems*, la différ. est la longitude du lieu rapportée au méridien de cette ville.

523. *Par des distances lunaires.* Le procédé le plus usité en mer pour obtenir la longitude astronomiquement, consiste à mesurer l'arc de distance entre les centres de la Lune et du Soleil, ou le centre de la Lune et une étoile ou une planète, ainsi que les hauteurs de ces deux astres. Voici la théorie de ces opérations.

L'astre le plus rapproché de la Terre étant la Lune, le point du ciel auquel on la rapporte est très différent, selon les divers lieux d'où on l'observe. C'est cette *parallaxe* qui est ici mise à profit. Concevons que, d'un lieu quelconque, on ait mesuré l'arc $ls = \delta$ (fig. 157) de distance apparente entre les centres l de la Lune et s d'un autre astre, et les hauteurs h et h' *au même instant.* Trois personnes sont employées ensemble à ces mesures ; mais une seule peut y suffire : car elle mesure d'abord les deux hauteurs, puis la distance δ, et enfin de nouveau les deux hauteurs. Elle note les heures de ces cinq observations ; puis divisant les variations en hauteurs proportionnellement aux temps écoulés, elle réduit, par le calcul, les hauteurs h et h' à être contemporaines avec δ. On peut encore, si l'on veut, au lieu de mesurer les hauteurs, les déterminer par le calcul, puisque l'on connaît l'heure pour laquelle elles sont nécessaires (p. 355). Il s'agit ici de hauteurs apparentes, c.-à.-d., affectées de la réfraction et de la parallaxe.

524. Les deux astres sont vus en des points du ciel différens de ceux où on les verrait du centre de la Terre, s'il n'y avait pas d'atmosphère ; et comme la parallaxe lunaire abaisse

l'astre, et surpasse la réfraction qui l'élève, la Lune nous paraît en l plus basse qu'elle n'est pour un spectateur placé au centre de la Terre : celui-ci la verrait en l'; mais le Soleil, au lieu d'être en s', lui paraîtrait plus haut, en s. Nous appelons *distance apparente* δ, la distance des centres des deux astres, telle qu'on l'a mesurée actuellement; et *distance vraie* Δ celle que trouverait un observateur situé au centre de la Terre, s'il n'y avait pas d'atmosphère. On entendra de même les expressions de *hauteurs apparentes* et *hauteurs vraies*.

Ainsi, $l's' = \Delta$ est la *distance vraie* des deux astres. Les hauteurs vraies sont H et H', arcs connus, puisqu'ils sont h et h' dégagés de la réfraction et de la parallaxe. Or il est possible de calculer Δ, arc dont nous nous servirons bientôt pour trouver la longitude du lieu : en sorte que le problème proposé se réduit à *connaître la distance vraie* Δ, *quand on a mesuré la distance apparente* δ.

Dans la fig. 157, z est le zénith, p le pôle, pzm le méridien : les triangles sphériques zls, $zl's'$ donnent, éq. (3) p. 68,

$$\cos lzs = \frac{\cos\delta - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'} = \frac{\cos\Delta - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'},$$

d'où en ajoutant 1 aux deux derniers membres,

$$\frac{\cos\delta + \cos(h+h')}{\cos h \cos h'} = \frac{\cos\Delta + \cos(H+H')}{\cos H \cos H'},$$

mais le 1[er] numérateur est (éq. 11, p. 35)

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\delta) = 2\cos m . \cos(m-\delta),$$

en faisant $\qquad 2m = h + h' + \delta \ldots\ldots\ldots \quad (1)$

Le numérateur du 2[e] membre devient (éq. 5 et 6, p. 35)

$$= 2\cos^2\tfrac{1}{2}(H+H') - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta\,;$$

donc

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta = \cos^2\frac{1}{2}(H+H') - \frac{\cos H \cos H'}{\cos h \cos h'}\cos m \cos(m-\delta).$$

Pour rendre l'éq. propre aux log. on pose

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\frac{\cos H \cos H'}{\cos h \cos h'} \cos m \cos(m-\delta)}}{\cos\frac{1}{2}(H+H')}, \ldots \quad (2)$$

et l'on a enfin

$$\sin\tfrac{1}{2}\Delta = \cos\tfrac{1}{2}(H+H')\cos\varphi \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Ainsi les éq. (1) et (2) servent à trouver les arcs auxiliaires m et φ, et l'éq. (3) donne ensuite Δ.

Maintenant que la distance vraie Δ est connue, c.-à-d. la distance qu'on observerait du centre de la Terre, s'il n'y avait pas d'atmosphère, on recourt à la *Conn. des Tems*, pour en tirer, à la date proposée, l'heure comptée à Paris lorsquecette distance vraie a lieu : cet ouvrage contient les distances vraies des deux astres de 3 en 3 heures, et par interpolation il est aisé de trouver à quelle heure de Paris la distance est Δ. On a donc l'heure de cette ville contemporaine à celle du lieu où l'on a mesuré δ; ce sont des heures d'un même phénomène instantané; la différ. est donc celle des longitudes.

Le 9 avril 1837, à $5^h29'36'',8$ temps moy., on suppose qu'on ait trouvé que les bords voisins du Soleil et de la Lune étaient distans de l'arc $54°30'12''$: que la hauteur apparente du Soleil était $h=21°50'14''$; et celle de la Lune, $h'=61°10'10''$; celle-ci était à l'est du Soleil, l'une et l'autre du côté ouest du méridien. La latitude, par estime, était $41°47'$B, et la longitude $2^h10'$ ouest. Quoique ces évaluations ne soient qu'approchées, elles suffisent pour trouver à peu près l'heure contemporaine de Paris ($7^h40'$), et tirer de la *Conn. des Tems* les données relatives aux deux astres, ainsi qu'il suit.

On suppose que la distance observée entre les deux bords les plus voisins des astres est $=54°30'12''$.

Dist. observée............ 54°30′12″,0
Demi-diam. ☉........... 15.59,0   paral. horiz. equat..... 55.31,1
Demi-diam. ☾.......... 15. 7,8   dim. de lat. (n° 385)... —1,3

Dist. appar. $\delta =$ 55. 1.18,8   par. horiz. du lieu... 55.29,8
$h =$ 21.50.14 .... — 2′24″ $H = 21°47.50$
$h' =$ 61.10.10...... + 22. 2. $H' = 61.32.12$

$2m =$ 138. 1.42,8
$m =$ 69. 0.51,4..... $\cos m$........ $\bar{1}.5530471$
$m - \delta =$ 13.59.32,6..... $\cos (m-\delta)$.... $\bar{1}.9869185$
$\cos H$........ $\bar{1}.9677837$
$\cos H'$....... $\bar{1}.6781506$
$\cos h$....... $-\bar{1}.9676623$
$\cos h'$...... $-\bar{1}.6832461$

$H + H' = 83°20'2''$ $\bar{1}.5349915$

moitié = 41.40.1   moitié.......... $\bar{1}.7674957$

$\cos \frac{1}{2}(H+H')$....... $\bar{1}.8733333$ .... $-\bar{1}.8733333$

$\cos \varphi$................ $\bar{1}.7931684$....... $\sin \varphi$.......... $\bar{1}.8941624$

sin .... $\bar{1}.6665017$ $\varphi = 51°36'10''$

$\frac{1}{2} \Delta = 27°38'40''$,........... dist. vraie....... $\Delta = 55.17.20$

On trouve, *Conn. des Tems*, qu'à 6^h de Paris. ..... $\Delta = 54.11.36$

et diff. = 1°25′55″ pour 3^h.   Différ. = 1. 5.44

Si 1°25′55″ sont dus à 3^h, à combien 1°15′44? ....
On trouve poor 4° terme $2^h 17' 42'' 9$, ainsi. ....
L'heure correspondante de Paris était .... $8^h 17' 42'' 9$
Mais alors l'heure exacte du lieu était............... 5.29.36,8

Donc longitode demandée.............................. = 2.48. 6,1 O.

Cette longitude est occidentale, parce que l'heure de Paris est la plus avancée. Ces calculs exigent de petites corrections, parce que les données, établies d'après une longitude supposée, manquaient d'exactitude : il faudra donc recommencer l'opération, en partant du résultat obtenu, savoir, que la longitude est très voisine de $2^h 48'$.

La distance du Soleil à la Lune est plus facile à observer que celle de la Lune aux étoiles, parce qu'on doit en outre prendre les hauteurs des deux astres, et que quand les étoiles

sont très visibles, l'horizon de la mer l'est bien peu. Mais comme on peut aisément calculer la hauteur d'une étoile (n° 408) à un instant donné, on ne doit pas renoncer à se servir des étoiles pour trouver la longitude du lieu. C'est pour cela qu'on a indiqué dans la *Conn. des Tems* les distances vraies des dix étoiles les plus brillantes, à la Lune, et de 3^h en 3^h. Les planètes Vénus, Jupiter, Saturne et Mars, sont tellement éclatantes, qu'on peut aussi se servir des observations de ces astres; leurs distances vraies sont pareillement indiquées dans la *Conn. des Tems*.

Le calcul de la distance vraie est assez long, surtout lorsqu'au lieu de mesurer en même temps les deux hauteurs, on veut les calculer : quand, au milieu des fatigues de la mer, on est dans la nécessité de faire ces opérations, il est bien avantageux d'en diminuer les difficultés. Diverses méthodes ont été proposées pour cet objet; mais aucune ne présente d'utilité réelle, d'autant plus qu'on y sacrifie toujours un peu de la précision des résultats. Dans tous les cas, on doit recommander de s'assurer avec beaucoup de soin de l'heure du lieu, et de préférer mesurer les hauteurs plutôt que de les calculer, surtout celle de la Lune, afin de ne pas augmenter les chances d'erreur. Comme il est indispensable pour avoir l'heure exactement de prendre une hauteur, on peut faire servir à la détermination de l'heure, l'heure qui est contemporaine à la distance δ qu'on a mesurée.

525. *Par les chronomètres*. On a un chronomètre dont la marche est connue et parfaitement uniforme; on l'a réglé avec soin au port de départ; et comme la *Conn. des Tems* est composée pour le méridien de Paris, on trouve de l'avantage à prendre pour origine des heures le midi de temps moyen en cette ville. Voici comment on opère.

526. Avant de quitter le port, on a fait pendant plusieurs jours des observations astronomiques qui ont donné l'heure de t. moy. du lieu; d'où l'on a conclu l'avance diurne a du chronomètre, son avance absolue A, à un instant déterminé du

jour. Comme la longitude L du lieu est connue par rapport au méridien de Paris, on sait que quand il est l'heure H dans le lieu, il est à Paris H+L, et que le chronomètre avance alors de A sur le t. moy. du lieu. Il avance donc de A — L sur Paris; et comme durant les H + L heures écoulées depuis midi moy. en cette ville, la montre a avancé de $\frac{1}{24}a$ (H + L), on voit qu'à ce midi, elle n'avançait réellement que de

$$h = A - L - \tfrac{1}{24}a(H + L).$$

Telle est l'heure que marquait le chronomètre le jour indiqué, quand il était midi de t. moy. à Paris.

A $5^h 10' 12''$ = H de temps moyen à Brest, la montre retardait de A = — 2′ 17″,5; son retard diurne est $a = -52'',80$: la différ. des méridiens de Brest et de Paris est L = 27′ 18″ O. en temps, et $\frac{1}{24}a = -2'',20$, d'où

$$
\begin{aligned}
H &= 5^h\,10'\,12'' \\
L &= \quad 27.18 \\
5^h,625 = H + L &= 5.37.30 \\
-5{,}625 \times 2'',2 = \tfrac{1}{24}a(H+L) &= \quad + 12{,}38 \\
A &= -\ 2.17{,}5 \\
-L &= -27.18 \\
\text{heure du chr. à midi moy. de Paris } h &= -29.23{,}12
\end{aligned}
$$

c.-à-d. qu'il était alors au chronomètre $11^h.30'.36'',88$.

527. Voici maintenant comment on trouve quelque temps après l'heure θ de t. moy. à Paris, à une époque déterminée.

n jours après, le chronomètre devra marquer $h + an$, à midi moyen de Paris, ce jour-là; et θ heures après, il indiquera

$$T = h + an + \theta + \tfrac{1}{24}a\theta.$$

Cette heure T est connue, et l'on a

$$\theta = T - h - an - \tfrac{1}{24}a\theta.$$

On trouve θ en négligeant d'abord le dernier terme qui est inconnu, et en général très petit; on a d'abord l'heure de Paris à très peu près; on substitue ensuite pour θ cette valeur dans

le dernier terme, et l'on obtient l'heure actuelle θ de temps moyen à Paris, quand le chronomètre marque T.

Mais les observations astronomiques faites sur le navire font connaître l'heure de t. moy. du lieu au même instant; la différ. de ces heures est la longitude du vaisseau, comptée du méridien de Paris.

Reprenons l'ex. qui précède, et supposons qu'au bout de 30 jours après celui où l'heure h de Paris (à midi moy.) a été calculée, on ait trouvé $6^h29'49'',5$ pour l'heure moy. du lieu, lorsque le chronomètre marque.. ... $T = 5^h15'28'',0$

$$-h = +29.23,12$$

$$-an = +52'',8 \times 30 \text{ jours} .. = +26.24,0$$

Heure approchée.... $\theta = 6.11.15,12$

Or, $\frac{1}{24}a\theta = -2''2 \times 6^h,187 .... = +13,61$

Valeur corrigée de θ... $= 6.11.28,73$

Heure contemporaine observée du navire. $= 6.29.49,50$

Longitude du lieu en temps... $= 0.18.20,77$E.

La longitude est orientale, parce que *le lieu le plus oriental compte toujours l'heure la plus avancée.*

528. On remarquera qu'on doit, dans ces formules, prendre en — les quantités A et a, quand elles expriment des retards, et aussi L quand la longitude du lieu de départ est à l'est. n serait négatif, si les jours précédaient celui dont on a pris le midi pour origine.

Un navire en rade de Toulon avait son chronomètre en avance de $A = +3'52''$ sur le méridien de cette ville, à $5^h7'8'' = H$, t. moy. de Toulon: avec un retard diurne $a = -7'',24$, d'où $\frac{1}{24}a = -0''3017$. Comme la longitude est $L = -14'22''$ à l'est de Paris, on trouve

$A = \quad 3'51''$

$-L = +14.22$

$H = 5^h\,7'\,8''$ $-0{,}3017 \times 4{,}88$ .... $+1{,}47$

$L = -14.22$

$\overline{4.52.46}$ heure du chr. à midi de Paris $h = 0.18.15{,}47$

$= 4^h{,}88$ 23 jours après, on est arrivé à Smyrne et le chronomètre marquait $4^h22'43'',2 = T$, lorsqu'on a pris hauteur pour avoir l'heure moy. du lieu, qu'on a trouvée $5^h46'21'',54$. Ainsi l'on a

$T = 4^h22'43'',2$

$-h = -18.15{,}47$

$-23 \times 7'',24 = an$........ $+2.46{,}52$

heure approchée .... $\theta = 4.\ 7.14{,}25$

$0{,}3017 \times 4{,}121$. .... $+1.24$

heure actuelle de Paris .... $4.\ 7.15{,}49$

heure de Smyrne.................... $5.46.21{,}54$

longitude de Smyrne $= 1.39.\ 6{,}05$

529. Nous terminerons en recommandant de toujours faire les calculs de manière à ne commettre d'erreurs que celles qui portent à juger le navire trop près du rivage, de crainte de s'en trouver plus voisin qu'on ne croit, selon ce principe de navigation, qu'*un bon officier doit toujours être arrivé à la côte avant son navire*.

Azimut, déclinaison de l'aiguille aimantée.

530. Nous avons exposé, p. 384, les méthodes dont on se sert pour obtenir l'azimut d'un astre ou d'un signal quelconque, lorsqu'on en connaît la hauteur et qu'on a l'heure. Les marins ne se servent guère que des observations du Soleil, et même ils préfèrent l'astre à son lever ou à son coucher, parce que les calculs sont plus simples. Ils attendent que l'astre soit élevé des $\frac{2}{3}$ de son diamètre au-dessus de l'horizon de la mer, afin d'avoir de la sorte égard à la réfraction, qui fait paraître le Soleil plus haut qu'il n'est réellement. Le centre est alors dans l'horizon : ils en visent successivement les deux bords avec les pinnules de la boussole, et lisent les indications correspondantes de l'aiguille aimantée. La moyenne entre ces deux arcs est l'*azimut magnétique* du centre de l'astre.

Nous avons démontré, p. 439, l'éq. qui donne l'*amplitude φ ortive ou occase* de l'astre, complément de son azimut compté du sud; savoir D étant la déclin. et l la latitude du lieu

$$\sin\varphi \cos l = -\sin D.$$

On a même composé des tables qui donnent à vue toutes les valeurs de l'arc φ, pour chaque latitude et chaque déclin. du Soleil. C'est le plus souvent ainsi que les marins trouvent la déclin. de l'aimant, qui est leur guide à la surface des mers, lorsqu'ils ne peuvent voir le ciel.

531. Quand on n'a pu observer le Soleil à l'horizon, on peut souvent le voir un peu au-dessus de ce plan, et quand la hauteur ne dépasse pas 12 à 15 degrés, on mesure l'azimut de chaque bord avec la boussole, et l'on note les heures et les indications de l'aiguille. La moyenne entre les heures répond à la moyenne de ces indications, et est l'azimut magnétique du centre. On peut alors calculer l'azimut vrai de l'astre; on peut aussi avoir cet azimut en mesurant la hauteur. (*Voyez* ce qui a été dit à ce sujet n° 441.)

532. On connaît ainsi deux azimuts, savoir celui A du Soleil, et celui a qu'indique l'aiguille aimantée. La déclinaison de l'aimant est donc

$$x = T + a.$$

Mais ici, comme n° 446, on doit prendre les arcs chacun avec le signe + ou —, selon sa position relative. Voici la règle.

Les azimuts A et x sont des arcs pris à partir du méridien (nord ou sud); ils ne sont positifs qu'autant qu'on les compte de droite à gauche. L'angle a que forme l'aiguille avec la direction du signal est compté à partir de cette direction, et positif quand il est pris aussi de droite à gauche. Ces arcs sont négatifs quand ils se trouvent situés en sens contraire de ceux qu'on vient d'indiquer.

Le 15 mai 1836, par 31°59′40″ latit. N., et $1^h 12'$ long. O.,

on a relevé avec la boussole le centre du Soleil couchant, et l'on a trouvé que l'aiguille indiquait $a = 78°44'30''$ du nord à l'est; l'astre était à l'horizon, et sa déclin. $D = 19°0'50''$

sin D......	$\bar{1}.512948$	$a =$	$+ 78°44'.30''$
cos l....—	$\bar{1}.928447$	$A =$	$- 67.24.30$
sin	$\bar{1}.584501$	$x =$	11.20 N. O.
$\varphi = 22°35'30''$			

Le 18 octobre 1836, par 41°46' latit. N., et $9^h42'$ long. O., à $9^h41'44''$ temps vrai, au matin, on a relevé le centre du Soleil au compas, et l'on a trouvé que l'aiguille indiquait $a = 98°15'$; on demande quelle est la déclin. de l'aimant. On fera le calcul indiqué p. 384, et l'on aura l'azimut A du Soleil à cette heure $A = 139°54'20''$
$a = 98\ 15.\ 0$
$x =$ Déclin. de l'aiguille $= 41.39.20$ N. E.

533. On trouve encore la déclinaison de l'aimant par la méthode des hauteurs correspondantes : mais comme l'horizon du vaisseau change sans cesse, ce procédé trouve rarement son application. On relève à la boussole les bords opposés du Soleil à deux instans où l'astre est à même hauteur. La direction du milieu, ou la moyenne entre les graduations indiquées par l'aiguille, est celle du méridien du lieu. L'angle que fait cette ligne avec chacune des deux précédentes, ou la demi-différence des deux arcs, est l'azimut de l'aiguille, c.-à-d. la déclin. demandée.

Ainsi l'on a observé le Soleil à la même hauteur matin et soir, et l'aiguille s'est dirigée sur.... 53°20' du S. à l'E.
et sur.... 31.30
Différ..... 21.50
Déclin. de l'aiguille = moitié = 10.55 N. E.

534. Quant aux azimuts des signaux, ou ce qu'on appelle leurs *relèvemens,* lorsqu'on les obtient par le secours des

astres, on opère ainsi qu'il a été expliqué p. 388. Mais le plus souvent, en mer, ces mesures se prennent avec la boussole. On s'est d'abord bien assuré de la déclinaison de l'aiguille aimantée, dont on a déjà l'azimut x. Visant ensuite le signal avec l'alidade ou la lunette de la boussole, appelée *compas*, on lit la graduation correspondante, qui en est l'azimut magnétique a. On en tire l'azimut vrai de ce signal, $A = x - a$, toujours en donnant aux lettres les valeurs et les signes qui sont conformes à la règle ci-dessus.

Un marin peut, de la sorte, faire une carte des divers sommets et contours d'une côte qu'il aperçoit du navire. En effet, les azimuts A qu'il trouve ainsi pour chacun de ces signaux, lui donnent une suite de lignes droites rayonnantes qui passent respectivement par ces différens objets. En répétant la même opération d'une autre station, il a encore des rayons partant de ce lieu et passant par les mêmes signaux ; et comme l'intervalle des deux stations est la route du vaisseau, qui est connue de grandeur et de direction, par rapport au méridien vrai, chaque signal est situé au sommet d'un triangle rectiligne dont la base est cette route, et dont les côtés adjacens sont de directions connues par leurs azimuts. Ainsi, il est aisé de tracer ces triangles qui ont une base commune, et d'avoir la place de chaque objet.

Cette opération a peu de précision, non-seulement à cause des infidélités auxquelles la boussole est sujette, mais surtout par les agitations du navire. Mais les marins s'en contentent ordinairement, parce qu'une plus grande exactitude ne leur est pas nécessaire. (*Voy.* l'*Astron. pratique*, p. 350 et suivantes.)

FIN.



EXPLICATION ET USAGE DES TABLES.

La TABLE Ire est destinée à réduire à l'horizon les angles situés dans des angles peu inclinés (de 4 degrés au plus) : elle donne les valeurs des log. de la quantité $(\frac{1}{4}\sin 1'')\alpha^2$, pour toutes les valeurs de α secondes, et l'on a $\log(\frac{1}{4}\sin 1'') = \bar{6},08351488$. L'usage de cette table a été exposé page 135.

La TABLE II donne les longueurs du degré de méridien et de parallèle sur toutes les latitudes, l'aplatissement étant $\frac{1}{309}$. On y trouve aussi les log. des normales. Cette table est extraite de la base du système métrique (III, p. 286 et 290), et calculée sur les éq. (6), p. 173, et (11), p. 178. (*Voyez* en outre le n° 251, p. 236.)

La TABLE III renferme toutes les valeurs relatives au système métrique français, calculées avec la plus grande précision. (*V.* p. 191.)

La TABLE IV donne les mesures itinéraires des principales nations. Celles dont les marins font usage sont exposées dans la note p. 404.

La TABLE V est destinée à donner la marche du Soleil moyen, et à convertir une durée de temps moyen en temps sidéral, et réciproquement. Pour en comprendre l'usage, consultez les pages 342 à 346.

La TABLE VI donne les observations du pendule faites en divers lieux, par les plus habiles physiciens. (*Voyez* ce qui a été dit page 277, sur la construction et l'usage de cette table.

TABLE I

Pour réduire les angles à l'horizon.

ARCS.	LOGAR.	DIFF. p. 1″.	ARCS.	LOGAR.	DIFF. p. 1″.	ARCS.	LOGAR.	DIFF. p. 1″.
1000″	0.083515	867	1260″	0.284256	688	1560″	0.469764	555
02	.085250	864	66	.288382	685	72	.476420	550
08	.090436	859	72	.292489	681	84	.483025	546
14	.095591	854	78	.296577	678	96	.489581	542
1020	0.100715	849	84	.300645	675	1608	0.496087	538
26	.105810	844	90	.304694	672	20	.502545	534
32	.110874	839	96	.308725	669	32	.508955	530
38	.115910	834	1302	0.312737	666	44	.515319	526
44	.120916	830	08	.316730	663	56	.521636	523
1050	0.125894	825	14	.320706	660	68	.527907	519
56	.130843	820	20	.324663	657	80	.534134	515
62	.135764	816	26	.328602	654	92	.540316	512
68	.140657	811	32	.332523	651	1704	0.546454	508
74	.145524	806	38	.336427	648	16	.552550	504
1080	0.150362	802	44	.340314	645	28	.558602	501
86	.155175	798	1350	0.344183	642	40	.564613	498
92	.159960	793	56	.348034	639	52	.570583	494
98	.164720	789	62	.351869	636	64	.576512	491
1104	0.169453	785	68	.355687	634	76	.582401	487
10	.174161	780	74	.359488	631	88	.588250	484
16	.178843	776	80	.363273	628	1800	0.594060	480
22	.183501	772	86	.367041	625	20	.603658	475
28	.188133	768	92	.370793	623	40	.613151	470
34	.192741	764	98	.314529	620	60	.622541	465
1140	0.197325	760	1404	0.378249	617	80	.631831	460
46	.201884	756	10	.381953	615	1900	0.641022	455
52	.206420	752	16	.385642	612	20	.650117	451
58	.210932	748	22	.389314	610	40	.659118	445
64	.215421	744	28	.392971	607	60	.668027	440
1170	0.219887	741	34	.396613	605	80	.676845	437
76	.224330	737	1440	0.400240	602	2000	0.685575	432
82	.228750	733	46	.403852	599	20	.694218	428
88	.233148	729	52	.407448	597	40	.702775	424
94	.237524	726	58	.411030	595	60	.711249	421
1200	0.241877	722	64	.414597	592	80	.719642	416
06	.246210	718	70	.418150	590	2100	0.727954	411
12	.250520	715	76	.421688	587	30	.740274	405
18	.254810	711	82	.425211	585	60	.752422	399
24	.259078	708	88	.428721	583	90	.764403	394
1230	0.263325	705	94	.432216	580	2220	.776221	389
36	.267552	701	1500	0.435697	577	50	.787880	384
42	.271758	698	12	.442619	572	80	.799385	379
48	.275944	694	24	.449485	568	2310	0.810739	374
54	.280110	691	36	.456297	563	40	.821947	369
1260	0.284256		48	.463057	559	70	.833012	364
			60	.469764		2400	.843037	

Suite de la Table I.

ARCS.	LOGAR.	DIFF. p. 10"	ARCS.	LOGAR.	DIFF. p.10".	ARCS.	LOGAR.	DIFF. p.10"
2400"	0.843937	3597	4800"	1.445997	1798	7440"	1.826661	1163
30	.854727	3553	4860	.456787	1776	7500	.833637	1154
60	.865385	3510	4920	.467445	1755	7560	.840559	1144
90	.875914	3467	4980	.477974	1734	7620	.847425	1135
2520	0.886316	3426	5040	.488376	1713	7680	.854237	1127
50	.896705	3386	5100	.498655	1693	7740	.860997	1118
80	.906754	3347	5160	1.508814	1674	7800	.867704	1109
2610	.916796	3309	5220	.518856	1655	7860	.874360	1101
40	.926723	3271	5280	.528783	1636	7920	.880965	1093
70	.936537	3235	5340	.538597	1618	7980	.887521	1084
2700	0.946242	3182	5400	.548302	1600	8040	.894027	1076
2760	0.965333	3112	5460	.557900	1582	8100	1.900485	1068
2820	0.984013	3048	5520	.567393	1565	8160	.906895	1061
2880	1.002300	2985	5580	.576783	1548	8220	.913259	1053
2940	.020210	2024	5640	1.586073	1532	8280	.919576	1045
3000	.037757	2867	5700	.595265	1516	8340	.925847	1038
3060	.054958	2811	5760	.604360	1500	8400	.932074	1030
3120	.071824	2757	5820	.613361	1485	8460	.938256	1023
3180	.088369	2706	5880	.622270	1470	8520	.944394	1016
3240	.104605	2656	5940	.631088	1455	8580	1.950490	1009
3300	.120543	2608	6000	1.630817	1440	8640	.956542	1002
3360	.136194	2562	6060	.648460	1426	8700	.962553	905
3420	1.151567	2518	6120	.657018	1412	8760	.968523	988
3480	.166673	2475	6180	.665492	1399	8820	.974452	982
3540	.181521	2433	6240	.673884	1385	8880	.980341	975
3600	.196120	2393	6300	.682196	1372	8940	.986190	968
3660	.210477	2354	6360	.690429	1359	9000	.992000	962
3720	.224601	2316	6420	.698585	1347	9060	.997771	956
3780	.238499	2280	6480	1.706665	1334	9120	2.003505	949
3840	.252177	2245	6540	.714670	1322	9180	.009200	943
3900	.265644	2210	6600	.722603	1310	9240	.014859	937
3960	.278905	2177	6660	.730463	1298	9300	.020481	931
4020	1.291967	2145	6720	.738253	1287	9360	.026067	925
4080	.304835	2113	6780	.745974	1276	9420	.031617	919
4140	.317516	2083	6840	.753627	1264	9480	.037132	913
4200	.330014	2053	6900	.761213	1253	9540	2.042612	908
4260	.342334	2025	6960	.768733	1243	9600	.048057	902
4320	.354482	1997	7020	.776189	1232	9660	.053469	896
4380	.366463	1970	7080	.783581	1222	9720	.058847	801
4440	.378281	1943	7140	.790911	1212	9780	.064193	885
4500	.389940	1917	7200	.798180	1201	9840	.069505	880
4560	1.401445	1892	7260	1.805388	1192	9900	.074785	875
4620	.412799	1868	7320	.812537	1182	9960	.080034	871
4680	.424007	1844	7380	.819628	1172	10000	2.083515	
4740	.435072	1821	7440	.826661				
4800	.445997							

Nota. Si le nombre de secondes est exprimé

par 5 chiffres entiers, *ajoutez* 2 à la caractéristique.
par 3 chiffres entiers, *retranchez* 2 de la caractéristique.
par 2 chiffres entiers, *retranchez* 4 de la caractéristique.

Pour trouver dans la table I le logarithme qui répond à un arc donné, on réduira cet arc en *secondes*, et, s'il est nécessaire, on déplacera la virgule pour que le nombre des chiffres entiers qui expriment cet arc soit de *quatre*. On entrera dans la table avec ce nombre, et l'on y trouvera le logarithme demandé, en interpolant, s'il le faut, à la manière ordinaire. Lorsqu'on aura été obligé de déplacer la virgule, on substituera à la caractéristique donnée dans la table, celle que détermine la règle qui est énoncée ci-dessus.

Ainsi, pour l'arc de 21′ 12″, ou 1272″, la table donne directement 0.292489 : mais pour 3° 32′, ou 12720″, on écrit 1272″,0, ce qui conduit au même log.; seulement il faut ajouter 2 à la caractéristique, et l'on a 2.292489. Pour l'arc de 127″,2, on écrirait 1272″, et l'on retrancherait au contraire 2 à la caractéristique, ce qui donnerait $\bar{2}$.292489. Enfin, s'il s'agit de 12″,72, on a $\bar{4}$.292489.

Quel est le log. répondant à 9′ 24″,75 = 564″,75? J'écris 5647,5:

La table donne pour .... 5640 ..... 1.586073
Si 10″ donnent 1532 de différ., combien 7″,5? 1149

Retranchant 2 à la caractéristique, parce que l'arc proposé n'a que 3 chiffres, j'ai.......................... $\bar{1}$.587222

On n'a pas fait varier les arcs de cette table en progression arithmétique; on a préféré donner aux logarithmes une loi d'accroissement favorable aux interpolations.

TABLE II.

Longueurs des degrés de méridiens, de parallèles et des normales pour l'aplatissement 0,00324.

LATITUD.	DEGRÉ du méridien.	DIFF.	DEGRÉ du parallèle.	DIFFÉR.	LOGARITHM. des normales.	DIFF.
	mètres.		mètres.			
0°	110 571,4		111277,5		0,0000000	
1	572,1	0,7	111260,8	16,7	004	4
2	573,4	1,2	111210,3	50,5	017	13
3	575,4	2,0	111126,1	84,2	039	22
4	578,0	2,6	111008,2	117,9	068	29
5	581,2	3,2	110856,7	151,5	107	39
6	110 585,1	3,9	110671,9	184,8	0.0000154	47
7	589,6	4,5	110453,5	218,4	209	55
8	594,8	5,2	110201,7	251,8	272	63
9	600,6	5,8	109916,3	285,4	344	72
10	607,0	6,4	109597,8	318,5	424	80
11	110 614,0	7,0	109246,0	351,8	0.0000512	88
12	621,6	7,6	108861,1	384,9	607	95
13	629,9	8,3	108443,2	417,9	711	104
14	638,7	8,8	107972,6	450,6	822	111
15	648,0	9,3	107509,3	483,3	941	119
16	110 658,0	10,0	106993,2	516,1	0.0001068	127
17	668,4	10,5	106444,7	548,5	1201	133
18	679,5	11,0	105863,9	580,8	1342	141
19	691,0	11,5	105251,1	612,8	1490	148
20	703,1	12,1	104606,2	644,9	1644	154
21	110 715,6	12,5	103929,7	676,5	0.0001805	161
22	728,7	13,1	103221,6	708,1	1972	167
23	742,2	13,5	102482,1	739,5	2146	174
24	756,1	13,9	101711,5	770,6	2325	179
25	770,5	14,4	100910,0	801,5	2511	186
26	110 785,4	14,8	100077,9	832,1	0.0002701	190
27	800,5	15,2	99215,1	862,8	2897	196
28	816,1	15,6	98322,5	892,6	3099	202
29	832,0	15,9	97399,6	922,9	3304	205
30	848,3	16,3	96447,1	952,5	3515	211
31	110 864,9	16,6	95465,4	981,7	0.0003730	215
32	881,8	16,9	94454,6	1010,8	3949	219
33	899,0	17,2	93414,8	1039,8	4171	222
34	916,5	17,5	92346,7	1068,1	4397	226
35	934,2	17,7	91250,4	1096,3	4627	230
36	110 952,1	17,9	90126,2	1124,2	0.0004859	232
37	970,1	18,0	88974,5	1151,7	5094	235
38	988,5	18,4	87795,5	1179,0	5331	237
39	111 006,9	18,4	86589,9	1205,6	5571	240
40	111 025,5	18,6	85357,7	1232,2	5812	241
41	111 044,1	18,6	84099,4	1258,3	0.0006055	243
42	062,9	18,8	82815,4	1284,0	6299	244
43	081,7	18,8	81506,0	1309,4	6544	245
44	100,6	18,9	80171,7	1334,3	6790	246
45	111 119,4	18,9	78812,6	1359,1	0.0007036	246

SUITE DE LA TABLE II.

Longueurs des degrés de méridiens, de parallèles et des normales pour l'aplatissement 0,00324.

LATITUD.	DEGRÉ du méridien.	DIFF.	DEGRÉ de parallèle.	DIFF.	LOGARITHM. des normales.	DIFF.
	m		m			
45°	111 119,4		78812,6		0.000 7036	
46	138,3	18,8	77429,6	1383,0	7282	246
47	157,1	18,8	76022,8	1406,8	7527	245
48	176,0	18,9	74592,6	1430,2	7772	245
49	194,7	18,7	73139,6	1453,0	8017	245
50	213,3	18,6	71664,1	1475,5	8260	243
51	111 231,8	18,5	70166,5	1497,6	0.000 8501	241
52	250,1	18,3	68647,4	1519,1	8741	240
53	268,3	18,2	67107,1	1540,3	8979	238
54	286,3	18,0	65546,3	1560,8	9214	235
55	304,1	17,8	63965,3	1581,0	9447	233
56	111 321,7	17,6	62364,5	1600,8	0.000 9677	230
57	339,0	17,3	60744,5	1620,0	09904	227
58	356,0	17,0	59105,7	1638,8	10127	223
59	372,7	16,7	57448,8	1656,9	10346	219
60	389,2	16,5	55774,2	1674,6	10562	216
61	111 405,2	16,0	44082,6	1691,7	0.00 10773	211
62	421,0	15,8	52374,0	1708,5	10980	207
63	436,3	15,3	50649,3	1724,7	11182	202
64	451,2	14,9	48909,0	1740,3	11378	196
65	465,8	14,6	47153,4	1755,6	11570	192
66	111 479,9	14,1	45383,3	1770,1	0.00 11756	186
67	493,6	13,7	43599,4	1783,9	[illegible]1936	180
68	506,7	13,1	41801,8	1797,6	12111	175
69	519,5	12,8	39991,3	1810,5	12279	168
70	531,7	12,2	38168,4	1822,9	12441	162
71	111 543,4	11,7	36333,8	1834,6	0.00 12596	155
72	554,5	11,1	34487,8	1846,0	12744	148
73	565,1	10,6	32631,2	1856,6	12886	142
74	575,2	10,1	30764,4	1866,8	13020	134
75	584,7	9,5	28888,3	1876,1	13147	127
76	111 593,7	9,0	27003,0	1885,3	0.00 13267	120
77	602,0	8,3	25109,3	1893,7	13379	112
78	609,7	7,7	23207,8	1901,5	13483	104
79	616,9	7,2	21299,3	1908,5	13580	97
80	623,4	6,5	19384,0	1915,3	13668	88
81	111 629,2	5,8	17462,8	1921,2	0.00 13748	80
82	634,5	5,3	15536,2	1926,6	13820	72
83	639,1	4,6	13604,7	1931,5	13884	64
84	643,0	3,9	11669,1	1935,6	13940	56
85	646,3	3,3	9729,8	1939,3	13987	47
86	111 649,0	2,7	7787,4	1942,4	0.00 14025	38
87	651,0	2,0	5842,6	1944,8	14055	30
88	652,0	1,3	3896,1	194[illegible],5	14077	22
89	653,3	0,7	1948,5	1947,6	14090	13
90°	111 6533,	0,3	0000,0	1948,5	0.00 14094	4

TABLE III. — *Des Mesures Françaises*,

D'après la longueur du mètre légal donné page 95.

Le mètre = 443^{li},296....... en lign., log = 2.64659 38125 405582
= 36^{po},9413333... en pouc., log = 1.56751 25664 929333
= 3^{pi},0784444....eu pied, log = 0.48833 13204 453085
= 0^{toi},5130 74074 en toises, log = $\bar{1}$.71018 00700 616649
La toise = 1^{m},94903 63098 245867, log = 0.28981 99299 383351
Le pied = 0^{m},32483 93849 707645, log = $\bar{1}$.51166 86795 546915
Le pouce = 2^{cm},7069 94874 7563705, log = 0.43248 74335 070667
L'aune anci. = $3^{pi} 7^{po} 10^{li}$ 5/6 à pen près = 43^{po},857 = 1^{m},187694.
L'aune nouv. = 12 décimètres.

Le mètre car. = 0te,26324 5006487, log = $\bar{1}$.42036 01401 233298
= 9^{pi},47682 019753, log = 0.97666 26408 906170
Le pied carré. = 10^{dc},55206 2603, log = 1.02333 73591 093830
La toise carr. = 3^{mc},79874 2537, log = 0.57963 98598 766702
1 are = 1 décam. carré = 26^{tc},32450 log = 1.42036 01401 233298
L'hectare = 2,924944 arpens log = 0.46611 76
L'arpent de 900 toise carree = 10 perches de 18^{pi} = 34, 1887 ares.
le pouc. carré = 7^{cc},327822, log = 0.86497 48670 141334.

Le mètr. cub. = 0^{tc},13506 4187445, log = $\bar{1}$.13054 02101 849947
= 29^{pic},17386 448805, log = 1.46499 39613 359255
La toise cub. = 7^{mc},40388 7136316, log = 0.86945 97898 150053
Le pied cub. = 34^{mc},27725 526 litres, log = 1.53500 60386 640745
= 36,80511 pintes, log = 1.56590 81
Une pinte = 46,95 pouees cubes, log = 1.67163 56
= 0,9313 litres ou déc. cub., log = $\bar{1}$.96909 79
Le litre ou Déc. cube { = 1,07375 pintes, log = 0.03090 20
= 50,41242 pouces cubes, log = 1.70253 76
La corde de bois = 116 pieds cubes = 4 pieds sur 8 et sur 3 1/2 = 3,8380 stères.
Le litron = 0,8125 litres = 40,960 pouces cubes.
Le litre = 1,244 litrons.
Le décalitre = 0,29174 pieds cubes.
L'hectolitre = 7,6874 boisseaux, log = 0.88577 94
Le boisseau = 1,3008 décalitre; le nouveau est 1/8 d'hectolitre.
Le setier = 7869,36 pouces cubes = 4,554 pieds cubes = 12 boisseaux.
Le muid = 298 pintes = 277,5 litres.
La velte était de 8 pintes (= 7,45 litres): dans le commerce on la fait de 7,61717 litres, et la pinte de 0,95 litres.

Le kilogram. = 18827,15 grains, log = 4.27478 45827 4
= 2^{liv},04287 65191, log = 0.31024 211666
La livre = 4^{hectgr},89505 8466, log = 0.68975 788334
L'once = 30,5941 grammes, log = 1.48563 790068
L'hectogr. = 3,268602 onces, log = 0.51436 209932
Le pied cube d'ean à + 4° pèse 645343 grains = $70^{liv} 0^{on} 3^{gr} 7^{gr}$.
L'hectogr. = $3^{on} 2^{gr}$ 10,715 grains.
Le kilogr. = $2^{liv} 0^{on} 5^{gr}$ 35, 15 grains.

DIMENSIONS DES MESURES DE CAPACITÉ.

Pour les substances sèches, la hauteur du cylindre = diamètre de la base.

Hectolitre, diam. et hanteur 503^{mm},1 décalitre.................. 233^{mm},5
Demi-hectolitre.......... 399,3 litre.... .... 108,4.
Double décalitre......... 294,2

Pour les liquides, le diamètre est la moitié de la hauteur.

Donble litre diamètre..... 108^{mm},4, hauteur 216^{mm},7.
Litre.................... 86,0........ 172,0.
Demi-litre. .... 68,3........ 136,6.

TABLE IV.

MESURES ITINÉRAIRES ÉTRANGÈRES.

On suppose le mille géogr. allemand=3807,07 toises=22842p54=23642,01 pieds du Rhin, extrait du *Manuel allemand de Géog.*, par Muncke. *V.* Férussac, *Math.*, novembre 1831, p. 253.

NOMS ET NATIONS.	DOIVENT CONTENIR	par DEGRÉ.	PIEDS de Paris	en MÈTRES.
Arabe		56,57	6045,7	1963,9
Bavarois, petit		14,15	24212,7	7865,2
— grand		8,69	39425,8	12807,1
Chinois		193,40	1771,5	575,5
États de Brunswick	2811,2 verges rhénanes.	10,52	32569,4	10579,8
Danois	12000 aunes danoises	14,79	23165,0	7524,9
Lieue française		25,00	13704,4	4451,7
— maritime		20,00	17130,0	5564,5
Nouv. mille anglais	1760 yards	69,12	4956,6	1610,1
— maritime		60,00	5710,1	1854,9
— lieue		20,00	17130,5	5564,6
Mille de Hanovre	32000 pieds colomb	11,89	28800,0	9355,4
— hollandais		19,00	18032,1	5857,5
— italien	1000 pas géograph	160,00	5710,1	1854,9
— Juif ancien	2000 aunes bibliques	100,80	3398,9	1104,1
Lieue des Pays-Bas		19,67	1711715	5560,4
Mille *idem*		20,00	17130,5	5564,6
— Nuremberg		13,10	20153,5	6546,6
— Autriche		7,48	45803,5	14878,8
— Perse		22,50	15227,1	4946,4
— Polonais		20,00	17130,5	5564,6
— Portugais		18,00	19034,0	6183,0
— Prussien	2000 verges	14,78	23113,0	7508,0
Werste russe	1500 arschines	104,30	3284,8	1067,0
Mille saxon	12000 aunes de Dresde	16,21	20907,8	6791,7
— de police	16000 *idem*	12,29	27877,1	9055,5
— Écossais	1147 toises	49,80	6882,0	2235,6
— Souabe		12,00	28550,8	9274,4
— Suédois	18000 aunes	10,41	32911,6	10691,0
— Suisse		13,30	25760,2	8367,9
— Espagnol	5000 veras	26,33	12882,0	4184,6
Berri turc		66,67	5138,9	1669,3
Mille maritime turc		86,40	3965,4	1291,1
— hongrois		13,30	25760,2	8043,1

TABLE V.

MARCHE DU ⊙ MOYEN EN ASCENSION DROITE,

en temps moyen et en temps sidéral.

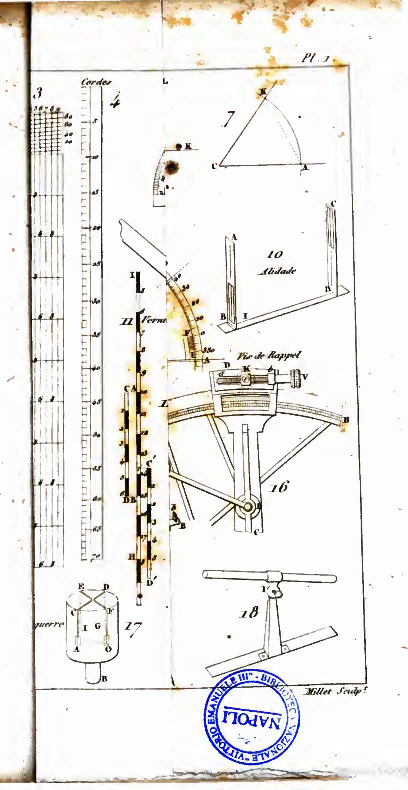
HEURES.			MINUTES.						SECONDES.	
	T. moy.	T. sidér.		T. moy.	T. sidér.		T. moy.	T. sidér.	T. m. et sid.	
1h	9"83	9"86	1'	0"16	0"16	31'	5"08	5"09	1"	0"00
2	19,66	19,71	2	0,33	0,33	32	5,24	5,26	3	0,01
3	29,49	29,57	3	0,49	0,49	33	5,41	5,42	6	0,02
4	39,32	39,43	4	0,66	0,66	34	5,57	5,59	9	0,03
5	49,15	49,28	5	0,82	0,82	35	5,73	5,75	13	0,04
6	58,98	59,14	6	0,98	0,99	36	5,90	5,91	17	0,05
7	1' 8,81	1. 9,00	7	1,15	1,15	37	6,06	6,08	20	0,06
8	1.18,64	1.18,85	8	1,31	1,31	38	6,23	6,24	24	0,07
9	1.28,47	1.28,71	9	1,47	1,48	39	6,39	6,41	28	0,08
10	1.38,30	1.38,56	10	1,64	1,64	40	6,55	6,57	31	0,09
11	1.48,13	1.48,42	11	1,80	1,81	41	6,72	6,74	35	0,10
12	1.57,96	1.58,28	12	1,97	1,97	42	6.88	8.90	39	0,11
13	2. 7,78	2. 8,13	13	2,13	2,14	43	7,04	7,06	42	0,12
14	2.17,61	2.17,99	14	2,29	2,30	44	7,21	7,23	46	0,13
15	2.27,44	2.27,85	15	2,46	2,46	45	7,37	7,39	50	0,14
16	2.37,27	2.37,70	16	2,62	2,63	46	7,54	7,56	53	0,15
17	2.47,10	2.47,56	17	2,79	2,79	47	7,70	7,72	57	0,16
18	2.56,93	2.57,42	18	2,95	2.96	48	7,86	7,88	60	0,16
19	3. 6,76	3. 7,27	19	3,11	3,12	49	8,03	8,05		
20	3.16,59	3.17,13	20	3,28	3,29	50	8,19	8,21		
21	3.26,42	3.26,99	21	3.44	3,45	51	8,35	8,38		
22	3.36,25	3.36,84	22	3,60	3,61	52	8,52	8,54		
23	3.46,08	3.46,70	23	3,77	3,78	53	8,68	8,71		
24	3,55,91	3.56,56	24	3,93	3,94	54	8,85	8,87		
25	4. 5,74	4. 6,41	25	4,10	4,11	55	9,01	9,04		
26	4.15,57	4.16,27	26	4,26	4,27	56	9,17	9,20		
27	4.25,40	4.26,13	27	4,42	4,43	57	9,34	9,36		
28	4.35,23	4.35,98	28	4,59	4,60	58	9,50	9,53		
29	4.45,06	4.45,84	29	4,75	4,76	59	9,67	9,69		
30	4.54,89	4.55,69	30	4,92	4,93	60	9,83	9,86		

Une durée de temps sidéral s'exprime en temps moyen en *retranchant* les nombres de la première colonne (*temps moyen*).

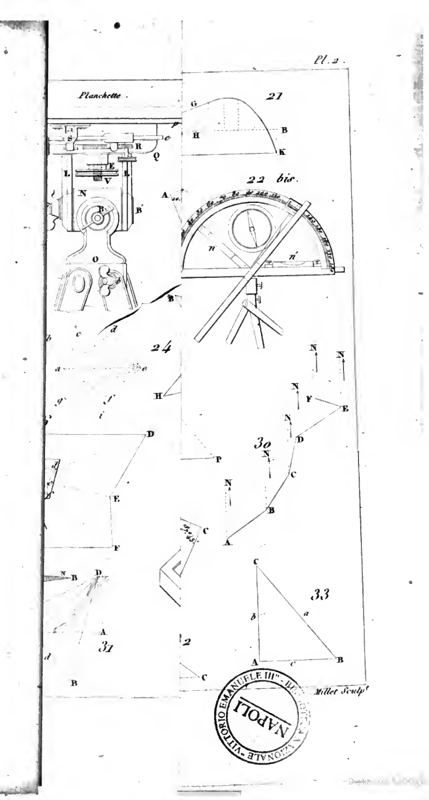
Une durée de temps moyen s'exprime en temps sidéral en *ajoutant* les nombres de la deuxième colonne (*temps sidéral*).

STATIONS.	Pendule à secondes sexag. oscill. infinim. petites dans le vide.			M.
	OBSERVÉ	Réduit au niveau des mers.	CALCULÉ.	
	mm	mm	mm	mm
Paris	993,8267	993,8493	993,90017	— 2″,30
	993,84474	993,86733	»	— 1 ,43
	993,84474	993,96733	»	— 1 ,42
Unst	994,943086	994,945903	994,88706	+ 2 ,56
	994,9366	994,9393	994,88712	+ 2 ,27
Dunkerque	994,07914	994,08039	994,09189	— 0 ,50
Clermont	993,45554	993,58239	993,63055	— 2 ,09
Bordeaux	993,44757	993,45288	993,54740	— 4 ,11
Figeac	993,38828	993,45793	993,52721	— 3 ,01
Formentera	992,91276	992,97612	993,00533	— 1 ,27
Portsoy	994,6821	994,6911	994,64791	+ 1 ,86
Leith	994,5289	994,5354	994,50969	+ 1 ,12
	994,524462	994,530700	994,50960	+ 0 ,92
Clifton	994,2694	994,3018	994,29972	+ 0 ,09
Arbury-Hill	994,1525	994,2228	994,19348	+ 1 ,26
Londres	994,1147	994,1236	994,13360	— 0 ,43
Shanklin	994,0243	994,0474	994,05610	— 0 ,37
Saint-Thomas	991,1076	991,1096	991,02583	+ 3 ,64
Maranham	990,8861	990,8934	990,03544	— 6 ,18
Ascension	991,1932	991,1949	991,12211	+ 3 ,16
	991,18086	991,18242	991,12185	+ 2 ,63
Sierra-Leone	991,0784	991,0964	991,13615	— 1 ,73
Trinité	991,0594	991,0614	991,19876	— 5 ,98
Bahia	991,1861	991,2064	991,25180	— 3 ,28
Jamaïque	991,4731	991,4739	991,50653	— 1 ,42
New-Yorck	993,1609	993,1689	993,18334	— 0 ,63
Drontheim	995,0087	995,0203	995,08284	— 2 ,72
Hammer-Fest	995,5381	995,5409	995,54163	— 0 ,03
Groënland	995,7453	995,7484	995,73699	+ 0 ,50
Spitzberg	996,0339	996,0359	995,93941	+ 4 ,19
Ile Mowi	991,78519	991,78566	991,66918	+ 5 ,06
Ile Gouam	991,45224	991,45286	991,30053	+ 6 ,63
Ile Rawack	990,95799	990,95837	990,02557	— 2 ,92
Ile Maurice	991,79473	991,79256	991,62832	+ 7 ,45
»	991,76664	991,76816	991,52773	+ 6 ,11
Rio-Janeiro	991,69220	991,69376	991,79483	— 4 ,39
Port Jackson	992,61622	992,62653	992,60001	+ 1 ,15
	992,58604	992,58794	992,60012	— 0 ,53
Cap de B.-Espér.	992,56378	992,56846	992,60504	— 1 ,59
Iles Malouines	994,06468	994,06655	994,13959	— 3 ,17
	994,12760	994,12947	994,13446	— 0 ,22
Toulon	993,38484	993,38578	993,39514	— 0 ,40

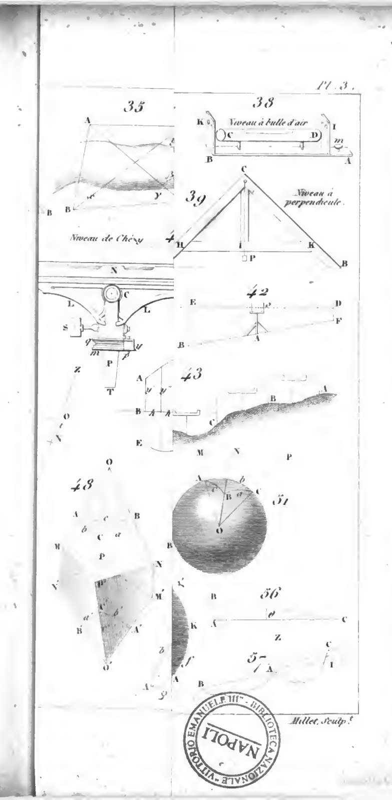
STATIONS.	ALTIT.	LATITUDES.	LONGITUDES.	OBSERVATEURS.
	m			
Paris	70	48°50′ 14″ N	0° 0′ 0″	Borda.
	70	«	»	Biot, Mathieu, Bouvard.
	72	«	»	Freycinet, Duperrey.
Unst	9	60.45.25 N	3. 6.11 O	Biot.
	8,53	60.45.28 N	3. 8.29 O	Kater.
Dunkerque	4	51. 2.10 N	0. 2.22 E	
Clermont	406	45.46.48 N	0.45. 2 E	Biot, Mathieu.
Bordeaux	17	45.50.26 N	2.54.14 O	
Figeac	223	44.36.45 N	9.18 —	
Formentera	203	38.39.56 N	0.50. 0 O	Biot, Chaix, Arago.
Portsoy	28,65	57.40.59 N	4.59.46 O	Kater.
Leith	20,7	55.50 41 N	2.32. 5 O	Kater.
	21,0	55.58.37 N	»	Biot.
Clifton	103,3	53.27.43 N	»	Kater.
Arbury-Hill	224,6	52.12.55 N	»	Kater.
Londres	28,2	51.31. 8 N	2.20.24 O	Kater, Sabine.
Shanklin	73,7	50.37.24 N	»	Kater.
Saint-Thomas	6,4	0.24.41 N	4.24.20 N	
Maranham	13,5	2.31.43 S	46.41.53 O	Sabine.
Ascension	5,2	7.55.48 S	16.44.11 O	
	5,0	7.55. 9 S	16.41. 0 O	Duperrey.
Sierra-Leone	57,9	8.29.28 N	15.35.35 O	
Trinité	6,4	10.38.56 N	63.55.38 O	Sabine.
Bahia	64,9	12.59.21 S	40.53.27 O	
Jamaïque	2,7	17.56. 7 N	79.14.27 O	
New-Yorck	20,4	40.42.43 N	76.23.51 O	
Drontheim	36,8	63.25.54 N	8. 2.36 E	
Hammerfest	8,8	70.40. 5 N	21.25.21 E	Sabine.
Groënland	7,6	74.32.19 N	21.10.21 O	
Spitzberg	6,4	79.49.58 N	9.20. 6 E	
Ile Mowi	1,5	20.52. 7 N	159. 2. 3 O	
Ile Gouam	2,0	13.27.51 N	142.37.25 E	Freycinet.
Ile Rawack	1,5	0. 1.35 S	128.35. 5 E	
Ile Manrice	15,5	20. 9.56 S	55. 8.26 E	
	4,98	20. 9.19 S	55. 8.15 E	Duperrey.
Rio-Janeiro	5,0	22.55.13 S	45.37.59 O	Freycinet.
Port-Jackson	33,5	33.51.34 S	148.48. 0 E	
	6,08	33,51.39 S	148.50. 0 E	Duperrey.
Cap de B.-Esp.	15,0	33.55.15 S	16. 9.45 E	Freycinet.
Iles Malouines	6,0	51.35.18 S	60.26.53 O	
	6,0	51.31.44 S	60.40.51 O	Duperrey.
Toulon	3,0	43. 7. 9 S	3.35.26 E	


Pl. 1.
Cordes
Alidade
Verni
Vis de Rappel
querre
Millet Sculp.t

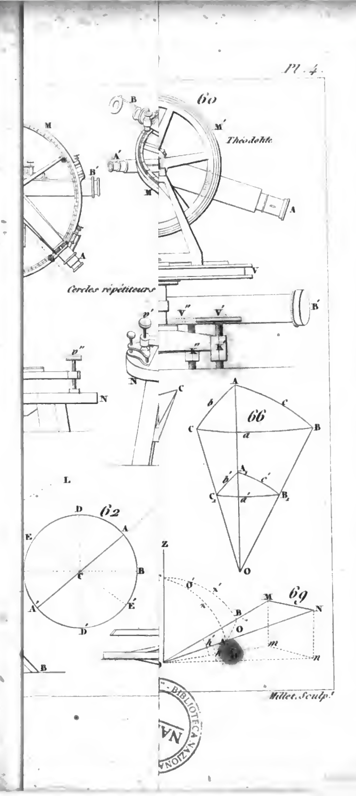



Pl. 2.
Planchette.
21
22 bis.
24
30
31
33
Millet Sculp.t



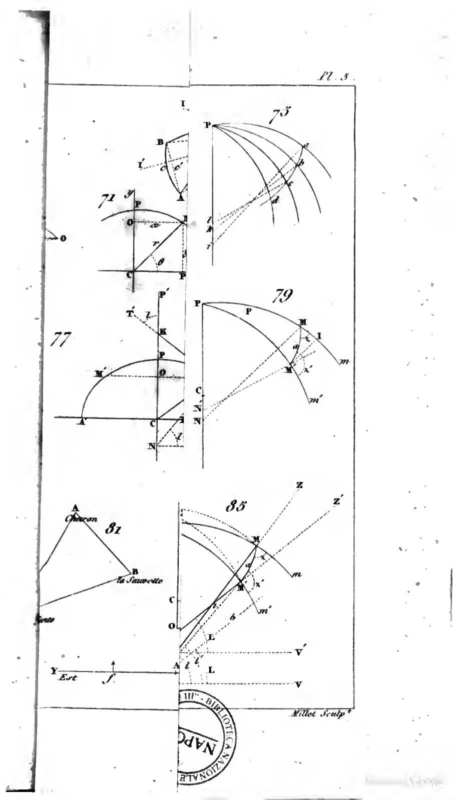

35
38
Niveau à bulle d'air
39
Niveau à perpendicule.
Niveau de Chézy
42
43
48
51
56
Millet, Sculp.





Millet, Sculp.t





75
71
77
79
81
85
Chevron
la Sauvette
Est
Millet Sculp.



Pl. 6.

88

91

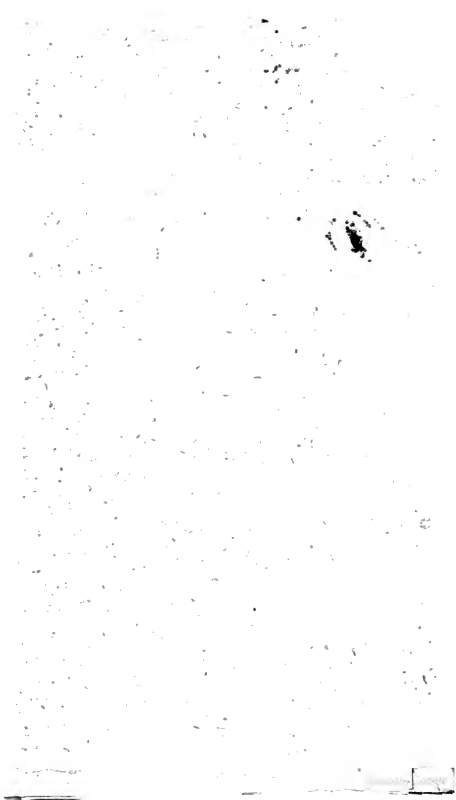
93

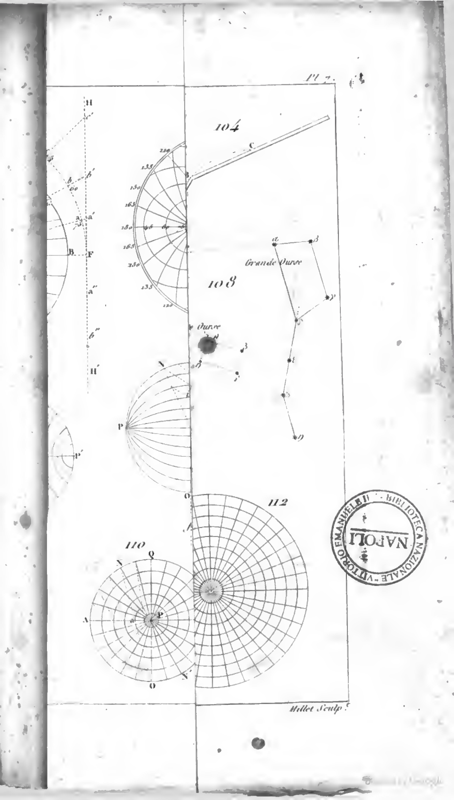
96

97

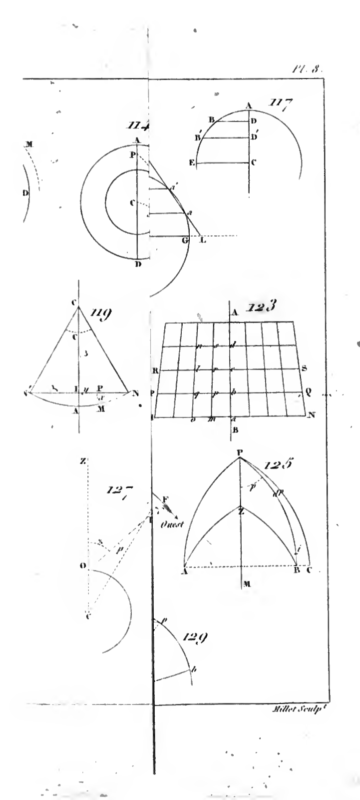
100

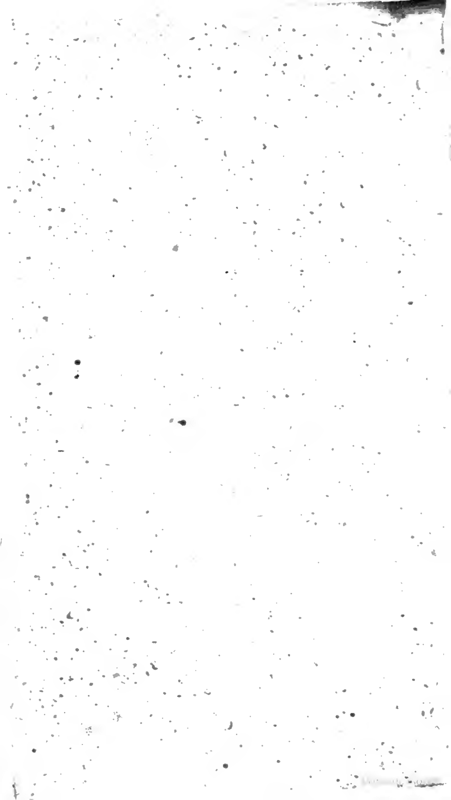
Millet Sculp.

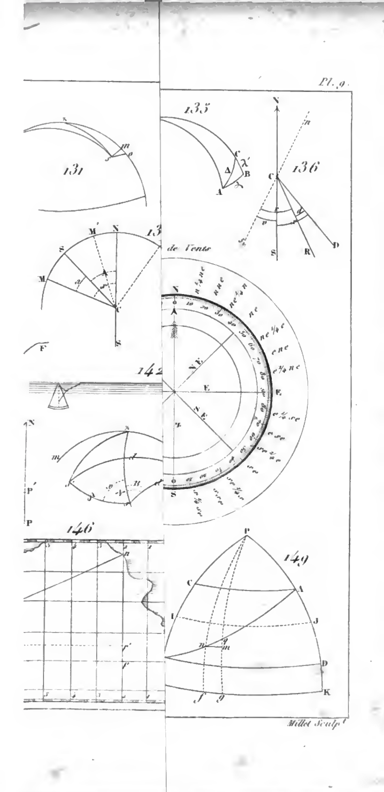



Pl. 7.
104
C
108
Grande Ourse
Ourse
112
110
Q
N
A
P
O
Hillet Sculp.



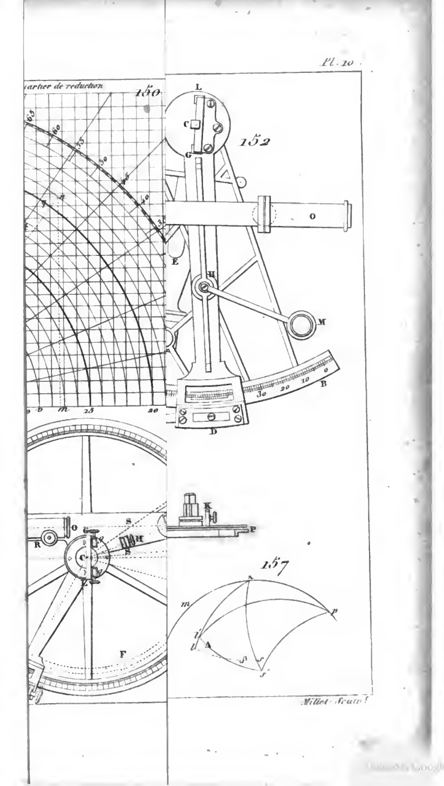

117
114
119
123
125
127
Ouest
129
Millet Sculp t





Pl. 9.
131
135
136
de Vents
142
146
149
Millet Sculp.t





Pl. 10.
artier de reduction
150
152
157
L
C
G
O
E
H
M
B
D
K
P
S
R
F
Millet Sculp.

